Ośrodek Rozwoju Edukacji

Małgorzata Skura & Michał Lisicki

Matematyka od przedszkola

Metody i zasady wprowadzania pojęć matematycznych. Przygotowanie do rozumienia liczb i posługiwania się nimi

Skura & Lisicki

Matematyka od przedszkola

Metody i zasady wprowadzania pojęć matematycznych. Przygotowanie do rozumienia liczb i posługiwania się nimi

Warszawa 2015

Wydawca:
Ośrodek Rozwoju Edukacji
Aleje Ujazdowskie 28
00-478 Warszawa
tel. +48 22 345 37 00
fax +48 22 345 37 70

Publikacja powstała w ramach projektu „Wdrożenie podstawy programowej kształcenia ogólnego w przedszkolach i szkołach"

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

MINISTERSTWO
EDUKACJI
NARODOWEJ

ORE
Ośrodek
Rozwoju
Edukacji

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

Publikacja współfinansowana przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

EGZEMPLARZ BEZPŁATNY

Realizacja:
Agencja Reklamowo-Wydawnicza A. Grzegorczyk
www.grzeg.com.pl

Spis treści

W książce podajemy wiele opisów konkretnych propozycji zadań dla dzieci. Najczęściej podstawą działania są klocki. Celowo opisy uprościliśmy po to, by jak najbardziej wyeksponować to co jest istotą zadania. Naszym celem jest wskazać treści oraz realizujące je działania. Kiedy nauczyciel będzie wiedział o co w zadaniu chodzi z łatwością zaproponuje jego modyfikacje, wykorzystując dostępne w przedszkolu zabawki. Umieściliśmy także opisy zadań dla uczniów klasy pierwszej. Po pierwsze, żeby pokazać związek matematyki w przedszkolu z matematyką w szkole; po drugie, by nie stawiać niepotrzebnego naszym zdaniem progu między przedszkolem a szkołą.

Do poradnika przygotowany jest **Program edukacji matematycznej w przedszkolu** dostępny na stronie www.berdo.org.

Wstęp

Książka jest prezentacją pomysłu i opartej na nim koncepcji organizowania małym dzieciom edukacji matematycznej na przykładzie jednego z najbardziej podstawowych i zarazem abstrakcyjnych pojęć matematycznych jakim jest liczba. W książce ważnych jest kilka założeń. Oto najważniejsze z nich, które warto znać przed przystąpieniem do lektury.

Tylko nauczyciel, który **zna i rozumie matematykę oraz wie po co jej uczy** może dobrze prowadzić swojego ucznia (którym może być nawet bardzo małe dziecko).

Dobry **układ treści oraz właściwe stopniowanie ich trudności** jest koniecznym warunkiem do tego, by wysiłek dziecka owocował lepszym rozumieniem poznawanych pojęć. W przeciwnym razie dziecko pokonuje przeszkody, wynikające z braku biegłości czy dobrego zrozumienia pojęć, które powinno poznać wcześniej.

Są pewne ogólne, uniwersalne zasady, których przestrzeganie pozwala, by proces edukacji matematycznej przebiegał w **dobrym kierunku, w tempie adekwatnym** do możliwości intelektualnych dziecka. Celem ich stosowania nigdy nie jest przyśpieszanie tego procesu; kluczowa jest jego jakość.

Przytaczane konkretne rozwiązania (opisy zajęć w dziećmi) należy traktować wyłącznie jako przykładowe pomysły. Służą one zilustrowaniu tego **jak dobierać treści oraz jak je układać,** przestrzegając ważnych naszym zdaniem reguł. Dobremu zrozumieniu przez dzieci matematyki sprzyjają zasady, polegające na przejściu drogi **od najbardziej podstawowego etapu**, kiedy to poznawane pojęcia osadzone są w realnym, bezpośrednim otoczeniu dziecka, aż do najbardziej **abstrakcyjnego poziomu symboli matematycznych**. Od **konkretnych sytuacji** przez poszukiwanie wspólnych dla nich prawidłowości **do sformułowania ogólnego, uniwersalnego prawa matematycznego**.

Naszym celem jest przede wszystkim przybliżenie nauczycielom małych dzieci tego co jest przedmiotem matematyki. Każdy nauczyciel, który będzie wiedział czego i w jakim celu uczy, bez trudu znajdzie wiele pomysłów zadań i zabaw, by doświadczenia organizowane dzieciom przybliżały je do zrozumienia.

Nauczyciel, który wie, do czego zmierza, rozumie sens czynności, **znajdzie z łatwością różnorodne sposoby urozmaiceń**, aby nie nużyć dzieci powtarzaniem wciąż tego samego ćwiczenia. W pracy intelektualnej dzieci powinien być jeden jasny cel wymagający wysiłku umysłowego. Środki dojścia do tego celu powinny być jak najprostsze, aby nie wymagały specjalnego wysiłku i odrywania uwagi od celu głównego. Dlatego tak ważne jest by mieć cel, do którego chcemy dziecko doprowadzić. Celem urozmaiceń nie jest zabawa, która najczęściej przenosi lub rozprasza uwagę. Skupienie i utrzymanie uwagi to jedno z najważniejszych wyzwań stojących przed nauczycielem[1]. Lepiej naszym zdaniem wyraźnie podzielić czas na zabawę i na naukę. W zabawie to dzieci są „organizatorem" a nauczyciel jedynie podejmuje propozycje dzieci lub wręcz wyłącznie dba o ich bezpieczeństwo. Nauka, o jakiej piszemy w książce, ma miejsce wtedy, kiedy to nauczyciel planuje i realizuje to co zaplanował.

[1] por. L. Jeleńska: Metodyka arytmetyki i geometrii w pierwszych latach nauczania, Nasza Księgarnia, Warszawa 1948, s. 11.

Na porannym seansie w dużej sali kinowej jest tylko kilkoro kinomanów. W połowie seansu przychodzi mocno spóźniony widz i zamiast zająć pierwsze z brzegu wolne miejsce przepycha się w rzędzie, w którym siedzi już kilka osób. Robi przy tym wielkie zamieszanie. Na parkingu są trzy wolne miejsca postojowe obok siebie. Przyjeżdża samochód i kierowca parkuje poziomo tak, że zajmuje wszystkie trzy. Inny kierowca na innym parkingu myli lewą nogę z prawą i zamiast na pedał hamulca naciska na pedał gazu. Efekt – kilka samochodów u blacharza. W telewizji emitują reportaż o pokaźnej grupie klientów, którzy kupili za 8 tysięcy złotych materac przydatny na wszystkie choroby od zwyrodnienia kręgosłupa, przez trądzik, po zawał serca. Tymczasem taki sam materac można kupić w sklepie meblowym za dużo, dużo mniej. Okazyjnie można też kupić nieco tańsze, bo tylko za 2,5 tysiąca złotych, profesjonalne urządzenie do masażu. Też działa na wszelkie dolegliwości. Każdy z czytelników mógłby podać wiele, bardzo wiele podobnych sytuacji, kiedy to ludzie wokół nas wykazali się „przerwą w myśleniu". Co jest źródłem takich zachowań człowieka? Lenistwo intelektualne? Bylejakość intelektualna? Pośpiech? Powszechne obniżenie ilorazu inteligencji?

Często zdarza się, że nauczyciele zapytani o to, czego dzieci uczą się w przedszkolu na zajęciach z matematyki, odpowiadają, że uczą się logicznie myśleć. Prosimy ich wtedy, żeby podali przykłady na to, że dziecko nie myśli logicznie. Ze swojego punktu widzenia, dziecko zazwyczaj myśli logicznie. Zapytane, czy sześć słoni i sześć biedronek, to tyle samo, odpowiada, że nie – słoni jest więcej. Po czym logicznie uzasadnia, bo słonie są większe od biedronek. W jednym z teleturniejów występy dzieci przedszkolnych oceniane były w skali od 1 do 10 punktów, z możliwością uzyskania też połówek punktów. Punkty przyznawało trzech jurorów, po czym… obliczano średnią arytmetyczną. Z tego powodu ogólna wartość punktów nie zawsze była liczbą naturalną. Jedna z dziewczynek otrzymała 8,1 punktu. Prowadzący oznajmił, że zdobyła „osiem i jeden", co dziewczynka logicznie oceniła – „czyli dziewięć!". Dziecko w odróżnieniu od dorosłych w tej sytuacji wykazało się logicznym myśleniem. Skoro już przy teleturniejach jesteśmy, ciekawe jest porównanie co zajmowało niegdyś telewizyjną publiczność a co zajmuje dziś. Od kiedy Wielką Grę zastąpiła Randka w ciemno wiele się zmieniło. W sobotnie wieczory przez godzinę można oglądać celebrytów skaczących do basenu. Zresztą obserwacja tego, kto dziś zyskuje status celebryty, w przeciwieństwie do tych sprzed lat, kiedy to nie byli znani tylko z tego, że byli znani skłania do refleksji.

Warto zastanowić się nad tym, co zrobić, żeby dzieci chciały myśleć, podejmowały w życiu na miarę swoich możliwości rozsądne decyzje, efektywnie radziły sobie z problemami. Czego Jaś się nie nauczy, tego Jan nie będzie umiał. Dobrze by wiedza i umiejętności były w cenie. Edukacja matematyczna szczególnie nadaje się do tego, by zająć się rozwojem intelektualnym i sprawić, żeby dzieci od małego lubiły pokonywać trudności i z ciekawością podejmowały wyzwania.

Naszym celem jest przekonanie nauczyciela o tym, że warto wiedzieć, co się robi na zajęciach z matematyki, po co to się robi, a nie tylko troska o to, by dziecko było zajęte, nie nudziło się, czasami by dobrze się bawiło. Ale nie ma nic gorszego dla rozwoju myśli matematycznej dziecka, jak pozwolić, by gromadziły się różne drobne, mętne nieporozumienia, niedomówienia, zaniedbania, które w końcu skrępują swobodę myśli i odbiorą pewność sądu[2]. Dla osób o wykształceniu muzycznym zbędne jest wykonanie utworu: „słyszą"

[2] Ibidiem, s. 130.

go patrząc na nuty. Dla osób bez takiego wykształcenia dopiero odegranie melodii daje jej rozpoznanie. Dla nauczyciela zadania powinny być znaną melodią – powinien panować nad całością jego rozwiązania. Jeśli coś rozwiązujemy, to najpierw było to zawiązane. O ile wiemy, jak był węzeł zawiązany, o tyle łatwiej nam będzie ten węzeł rozwiązać. Nauczyciel powinien umieć zawiązywać zadania.

Dziś, podobnie jak i sto lat temu dziecko, które rozpoczyna sformalizowaną naukę **wiele z matematyki już potrafi.** Zna liczby, miary, kształty i korzysta z relacji między nimi. Dziecko nim pójdzie do przedszkola, a potem do szkoły, uczy się matematyki w domu, na dworze, dziś w dużej mierze też przez telewizję, a jeszcze bardziej gry komputerowe. Oczywiście wiedza i umiejętności dzieci z matematyki na progu szkoły są w dużej mierze błędne, niekompletne. Nie jeden uczeń klasy pierwszej przekonany jest o tym, że „złote" monety są bardziej wartościowe niż srebrne i wybierze garść monet groszowych zamiast kilku złotowych. Wiele dzieci sądzi, że pieniądze mają rodzice ze ściany, którą proszą i ściana im daje. W ścianie jest bowiem bankomat, z którego dorośli wypłacają pieniądze. Wiele z tych sądów wynika ze specyfiki myślenia dziecka, z myślenia konkretnego, jeszcze przedoperacyjnego. Dla kilkulatka wody w butelce jest więcej lub mniej, w zależności, czy dziecko patrzy na wysokość słupka wody, czy na powierzchnię lustra wody.[3] Pojęcia matematyczne, którymi posługują się przedszkolaki, a potem uczniowie w klasach początkowych, w większości mają jeszcze charakter intuicyjny. Intuicje są stopniowo przekształcane w abstrakcyjne pojęcia.

Edukacja matematyczna to nie tylko uczenie się przez dziecko umiejętności i wiedzy z matematyki. Ma ona jeszcze jedno ważne zadanie. Przyczynia się do rozwoju poznawczego i wzmacnia podstawowe umiejętności poznawcze, takie jak obserwacja, umiejętność reprezentowania danych, interpretowania ich, analizowania i syntetyzowania, ale też oceniania i realizowania zaplanowanych działań. **Pojęcia matematyczne zorganizowane są logicznie – jedne wynikają z innych, są nadrzędne i podrzędne**, między nimi są różne związki. Dzieci rozwiązując problemy, stosują różne strategie, oceniają i weryfikują wyniki itp. Dzięki temu powoli stają się odkrywcami i krytycznymi użytkownikami wiedzy. Matematyka już od przedszkola powinna być przedstawiana dzieciom jako proces poszukiwania, proces próbowania i popełniania błędów. Ma to być proces, w którym używanie metod i budowanie rozumienia pojęć dokonuje się poprzez rozwiązywanie problemów, a nie w drodze przekazywania zorganizowanej, ograniczonej wiedzy.

Rozumienie języka matematyki nie jest kluczem do wszelkiej pomyślności, tak jak znajomość języka obcego nie przyda się zbytnio póki siedzi się w domu. Kiedy wyruszamy w świat, sprawne posługiwanie się językiem obcym daje nam swobodę porozumiewania się z ludźmi i poznawania ich kultury. Podobnie z matematyką, szczególnie w czasach kiedy technologia tak bardzo zmienia otaczającą rzeczywistość.

Dzieci w wieku przedszkolnym i w młodszym wieku szkolnym intensywnie rozwijają się zwłaszcza emocjonalnie i intelektualnie. Podczas tego etapu rozwoju ewoluują od postrzegania, myślenia konkretnego do zdolności abstrakcyjnego i sformalizowanego myślenia. Uczenie się matematyki w tym wieku jest szczególnie powiązane z osobistą działalnością dzieci. Priorytetem są zatem empiryczne i indukcyjne formy pozyskiwania wiedzy, po to by później zostały one stopniowo zastępowane sformalizowaną wiedzę

[3] J. Piaget, B. Inhelder: Obrazy umysłowe, w: Inteligencja, P. Oleron, J. Piaget, B. Inhelder, P. Greco, PWN, Warszawa 1967, s. 94-97.

i stosowaniem dedukcji. Empiryczne to znaczy przez własne doświadczenie. Indukcja polega na wyciąganiu wniosków na podstawie określonej liczby przypadków. To **myślenie od szczegółu do ogółu**. Dziecko widzi wokół siebie różne psy. Zauważa, że każdy z tych psów potrafi szczekać. Dochodzi do wniosku, że każdy pies szczeka. Dziecko obserwuje, manipuluje różnymi trójkątnymi kształtami. Na tej podstawie poznaje własności trójkąta. Jeszcze jeden przykład – dziecko kilka razy dodało do siebie te same liczby w różnej kolejności. Na tej podstawie wysnuło wniosek, że kolejność dodawania liczb nie wpływa na wynik. Dorosły zna to prawo jako prawo przemienności dodawania.

Uczenie się matematyki przez małe dziecko jest ściśle związane z tym, co dziecko w danym momencie interesuje, co powoduje, że jest w stanie na czymś dłużej skoncentrować swoją uwagę. Już od przedszkola powinno być powiązane z rozwijaniem pewnych postaw i nawyków pracy. To pomoże dziecku zdobyć zaufanie do własnych możliwości, do skutecznego rozwiązania problemów, do tego by być pomysłowym i wytrwałym.

1. Programowanie edukacji matematycznej

1.1. Po co uczymy się matematyki? Cele edukacji matematycznej

Od czasu wprowadzenia na maturze obowiązkowego egzaminu z matematyki dużo się mówi o nauczaniu matematyki. Niestety powodem do tego typu dyskusji nie są genialne osiągnięcia maturzystów, ale wręcz przeciwnie, ich wielkie problemy z tym przedmiotem. Wprowadzenie obowiązkowego egzaminu maturalnego podkreśliło uznanie matematyki za kluczowy przedmiot nauczania na każdym szczeblu edukacji, od przedszkola zaczynając. **Matematyka** zasłużyła na to miano, gdyż:

– przydaje się w **codziennym życiu i funkcjonowaniu w społeczeństwie**: umiejętności i wiedza z matematyki, strategie myślenia wykorzystywane przy rozwiązywaniu zadań przydają się w różnych okolicznościach. Wiele codziennych problemów wymaga podstawowej wiedzy i umiejętności z matematyki – są to sytuacje związane z rachowaniem, pomiarem, opisywaniem kształtów, organizowaniem przestrzeni, posługiwaniem się pieniędzmi, zapisywaniem i interpretowaniem danych liczbowych;

– ma zastosowanie w **uczeniu się innych przedmiotów** (innych zakresów edukacji). Wiele zakresów matematyki rozwinęło się w odpowiedzi na potrzeby różnych dziedzinie nauki i technologii, nauk społecznych i ekonomii. Dziecko korzysta z matematyki na różnych zajęciach, a to pozwala też zobaczyć zastosowanie matematyki. Jest to proces dwukierunkowy: inne obszary nauczania mogą być też dobrymi kontekstami do wprowadzania, utrwalania różnych pojęć matematycznych[4];

– zapewnia możliwość **rozwoju procesów intelektualnych**, rozwija rozumowanie indukcyjne i dedukcyjne, twórcze myślenie i umiejętności komunikowania się. Matematyka wprowadza dzieci w niektóre kluczowe strategie myślenia potrzebne do rozwiązywania problemów i daje szanse użycia różnego rodzaju rozumowań. Dziecko uczy się proponować różne rozwiązania i próbuje różnych podejść do problemów. Matematyka pozwala dziecku nauczyć się skutecznych strategii rozwiązywania problemów, które potencjalnie mają zastosowanie we wszystkich obszarach działalności człowieka[5];

– uczenie się matematyki daje **uczucie przyjemności**, szczególnie wtedy gdy dziecko odczuje satysfakcję z dobrze rozwiązanego zadania, gdy zrozumie pojęcie, czy dostrzeże poszukiwany kształt. Małym dzieciom przyjemność sprawia sam proces rozwiązywania problemów. Doskonale to widać, gdy osiągają wgląd w rozwiązanie zadania, rozpoznają wzór, odkryją coś, połączą skutecznie pojęcia, gdy znajdą matematyczną zasadę, która zawsze działa, a nawet wtedy, gdy odkryją wyjątek od reguły. Wtedy uśmiechają się, wyraźnie widać, że odczuwają radość[6];

– jest istotną i charakterystyczną **formą wiedzy człowieka,** z własnymi koncepcjami i zasadami, własnym sposobem dokonywania twierdzeń, formułowania argumentów, uzasadniania wniosków. Wykształcony człowiek korzysta z różnych rodzajów wiedzy i docenia charakterystyczne sposoby rozumowania. Innego rodzaju dowodów i argu-

4 D. Haylock: Mathematics Explained for Primary Teachers, SAGE, Londyn 2010, s.12.

5 Ibidiem, s.13.

6 Ibidiem s.13 - 14.

mentów, różnych sposobów rozumowania wymaga wyjaśnianie wydarzenia historycznego, prawa fizycznego, zasady teologicznej, czy prawa w matematyce. Oczywiście dzieci w przedszkolu czy w szkole podstawowej nie są w stanie wyjaśniać matematycznych pojęć za pomocą formalnych dowodów. Ale mogą doświadczać wielu innych charakterystycznych rodzajów procesów matematycznych, a nawet już w wieku przedszkolnym zaczynają wykazywać i wyjaśniać, dlaczego różne pojęcia są zawsze prawdziwe;

– matematyka jest również znaczną częścią **dziedzictwa kulturowego**. Matematyka, którą się dziś posługujemy, znana już była w starożytnych Chinach. Nasz system liczbowy ma korzenie w starożytnym Egipcie, Mezopotamii i kulturze indyjskiej. Znamy wybitnych greckich matematyków, takich jak Pitagoras, Euklides czy Archimedes. Docenianie matematyki jako przedmiotu powinno obejmować również wiedzę o tym, jak matematyka rozwijała się w czasie, w różnych kulturach i jak te kultury przyczyniły się do rozwoju matematyki. Angażowanie dzieci w poznawanie historii matematyki może zainteresować je samą matematyką i przyczynić się do pozytywnego nastawienia do tego przedmiotu[7].

Celem edukacji matematycznej w przedszkolu jest rozwijanie zdolności do poznawania rzeczywistości, stawiania hipotez, logicznego rozumowania, skutecznego wykorzystania różnych strategii i procedur matematycznych, rozwiązywania różnych problemów.

Historia matematyki pokazuje, że człowiek zawsze był zainteresowany zrozumieniem swojego otoczenia, tworzenia relacji i wyrażania rzeczywistości za pomocą pojęć matematycznych. Wiedza matematyczna pojawiała się często wraz z potrzebą rozwiązania kwestii związanych z handlem, dystrybucją ziemi lub problemami architektonicznymi. Z tego powodu pierwsza wiedza miała charakter proceduralny i była użyteczna do rozwiązywania codziennych problemów. W kolejnych wiekach zaczęła służyć potwierdzaniu i generalizowaniu stosowanych procedur, rozważała je, czyniła przypuszczenia, udowadniała je, obalała itp. Zatem stała się systemem pojęć i procedur, które charakteryzują się wysokim poziomem abstrakcji i formalizacji. Wiedza matematyczna od samego początku jest jedną z najbardziej użytkowych i wywodzi się z potrzeby zrozumienia i opisania bezpośrednio otaczającego środowiska. W podobny sposób następuje rozwój wiedzy i umiejętności matematycznej dziecka – od umiejętności radzenia sobie z rzeczywistymi, bliskimi mu problemami, zaspokajania jego potrzeb po wyabstrahowanie ważnych cech pojęć i działania na nich – już abstrakcyjnego i sformalizowanego. Widać analogię w tym, jak rozwijała się matematyka jako dziedzina wiedzy i jak rozwija się myślenie matematyczne każdego człowieka. Dlatego często będziemy przywoływać fakty z historii matematyki po to, by pomogły nam zrozumieć jak rozwija się myślenie matematyczne dzieci.

1.2. Co z matematyki w przedszkolu? Wybór treści z matematyki

W ramach edukacji matematycznej dzieci uczą się pewnej wiedzy, pewnych umiejętności, rozwijają określone postawy. Nie da się wyróżnić treści, które nastawione są tylko na rozwój wiedzy, czy tylko na rozwijanie postaw. Lepiej przyjąć podejście całościowe,

[7] P.Williams: Independent Review of Mathematics Teaching of Early Years Setting and Primary Schools, Final Report, DCSE, Londyn 2008, s. 62.

czyli że jednocześnie dziecko przyswaja wiedzę, uczy się umiejętności, rozwija postawy. Czasami pewne treści bardziej są powiązane z wiedzą niż umiejętnościami, przy innych najważniejszy jest nacisk na rozwijanie postaw.

Z punktu widzenia rodziców matematyka w przedszkolu i na początku szkoły, niewiele ma wspólnego z formalną matematyką, pełną liczb i wzorów. Z drugiej strony wiele czasu i energii poświęca się w tym okresie na działania, które mają niewielką wartość rozwojową. Doborem treści nauczania znawcy edukacji wspierani przez media szczególnie intensywnie zajmują się w okresie wielkich zmian w systemie edukacji, na przykład wtedy, gdy wprowadza się nową podstawę programową. To ważny temat dla nauczycieli oraz dla rodziców. Czego dzieci mają się uczyć? Czego dzieci mają się uczyć z matematyki? Liczenia? Zapewne. Ale do ilu? Dodawania i odejmowania? Też. A w jakim zakresie? Rozwiązywania zadań z treścią? Czy tylko prostych, czy też złożonych? Geometrii? Tak, każdy nauczyciel wie, że musi być geometria.

Czy da się precyzyjnie zmierzyć i określić w jakim zakresie dziecko w wieku kilku lat powinno liczyć? Czy da się precyzyjnie określić w jakim zakresie powinno dodawać, czy odejmować? Można przeprowadzić badania na ten temat. I zapewne prowadzi się. Można też podpierać się własnymi doświadczeniami pracy z dziećmi, czy oprzeć się na tradycji edukacyjnej, czyli tego, jak zawsze było.

Można zadać pytanie: Jaki poziom umiejętności posiada przeciętny kilkulatek? Wyniki badań, które dadzą odpowiedź na to pytanie brać pod uwagę programując edukację. Można też postawić pytanie inne: ile jest w stanie nauczyć się kilkuletnie dziecko z matematyki? Powstaną wtedy nieco inne programy nauczania. Takie podejście bliskie będzie teorii Lwa Siemionowicza Wygotskiego na temat **strefy najbliższego rozwoju.**

L.S. Wygotski uczenie się i nauczanie rozumiał jako wspólną aktywność dziecka i nauczyciela w strefie rozwoju – aktualnej i najbliższej. Strefa najbliższego i strefa aktualnego rozwoju bazują na pojęciu interioryzacji czyli uwewnętrzniania. Proces interioryzacji jest stopniowy. Najpierw dorosły kontroluje i ukierunkowuje aktywność dziecka, organizuje efektywne strategie wspierające rozumowanie i poszukiwanie rozwiązań. Efektem tych działań jest wspólne rozwiązywanie problemów. Stopniowo dziecko przejmuje inicjatywę. Podejmuje próby samodzielnego wykonania zadania przy aktywnej obserwacji nauczyciela, który poprawia, ukierunkowuje, dostarcza wskazówek. Wreszcie dorosły oddaje kontrolę dziecku. Zaczyna funkcjonować jako przychylne audytorium. Zakończony proces interioryzacji pozwala dziecku w pełni korzystać z nowej umiejętności, stwarza nowe możliwości[8]. Bardzo dobrze ten proces ilustruje przykład jak dziecko uczy się sznurować buty. Początkowo biernie przygląda się jak sznurowadła zawiązuje dorosły. Po jakimś czasie próbuje za nie chwytać, ale de facto bardziej przeszkadza niż pomaga. Stopniowo, w miarę ćwiczenia to dziecko przejmuje inicjatywę, zaś dorosły powoli wycofuje się. Jest „w odwodach", by pomóc kiedy powstanie supeł. Ostatni etap, kiedy to dziecko coraz lepiej sobie radzi, obecność dorosłego sprowadza się oglądania postępów. Droga: 1. dorosły robi – dziecko obserwuje, 2. dorosły robi – dziecko pomaga, 3. dziecko robi – dorosły pomaga, 4. dziecko robi – dorosły obserwuje, jest uniwersalną drogą, charakterystyczną nie tylko dla nauki sznurowania.

To stanowisko niejako godzi dwa postawione wcześniej pytania: jaki jest poziom wiedzy, umiejętności kilkulatka? Czy i na ile nauczyciel ma wykraczać poza poziom dostępny dziecku?

[8] E. Filipiak: Rozwijanie zdolności uczenia się. Z Wygotskim i Brunerem w tle, GWP, Sopot 2012, s. 27 - 30.

Często słyszymy od nauczycieli opinie, że zadanie jest **za trudne** dla dziecka. „Za trudne", bo ich zdaniem dziecko nie będzie potrafiło samodzielnie sobie z nim w tym momencie poradzić. Odpowiadamy na to: I bardzo dobrze! Zadanie powinno być dla dziecka wyzwaniem, a takim zadaniem jest zadanie trudne, a nie proste, z którym dziecko bez większej refleksji sobie poradzi. Rozwojowi intelektualnemu służyć będzie zadanie trudne. Rozwojowe są sytuacje, w których człowiek odczuje, że czegoś nie potrafi i chce się tego nauczyć[9]. Warunkiem jest odczucie – nie wiem, nie potrafię i idące zaraz za nim przekonanie – chcę się dowiedzieć, chcę się nauczyć. W takich sytuacjach nauczyciel jest po to, by wspierać dziecko, ukierunkowywać jego aktywność, pomóc w poszukiwaniach rozwiązania. W takich warunkach zajdzie proces interioryzacji. Zadanie powinno być na tyle trudne, aby dziecko przy pomocy kogoś bardziej kompetentnego (nauczyciela, rodzica, czy kolegi) poradziło sobie z nim.

Czego uczyć dzieci z matematyki, czyli jakie treści powinny znaleźć się w programach wychowania przedszkolnego i nauczania w klasach początkowych? Jakimi kryteriami kierować się dokonując wyboru? Możliwości, potrzeby dzieci z jednej strony, a z drugiej to, co zdaniem dorosłego przyda się dziecku w codziennym funkcjonowaniu i jest potrzebne do dalszej nauki. Przyjrzyjmy się tak zdefiniowanym kryteriom.

Co jest potrzebne do uczenia się matematyki w klasach starszych? Można przeanalizować programy nauczania matematyki, aby się o tym przekonać. Podstawa programowa jest tak konstruowana, aby zapewnić ciągłość nauczania[10]. Treści z wcześniejszych etapów edukacyjnych powinny być podstawą doboru treści na kolejnych etapach. Dobierając więc treści nauczania w klasach początkowych trzeba się przyjrzeć temu, co dzieje się w przedszkolu, a nie na odwrót.

Co się przyda dziecku w codziennym funkcjonowaniu? Można pokusić się o sporządzenie listy takich umiejętności i wiedzy. Ale będą to w dużej mierze spekulacje. Na pewno potrzebna jest umiejętność dokonywania prostych obliczeń pieniężnych, czy zegarowych. Ale rzadko przydaje się dziecku umiejętność posługiwania się wagą szalkową. Dzisiaj waży się przede wszystkim na wadze elektronicznej. Tymczasem wiemy, że doświadczenia z wagą szalkową są potrzebne do tego, żeby dziecko nie tylko przybliżyło sobie pojęcie ciężaru, ale też zrozumiało pojęcie równoważności. Czyli kryterium funkcjonalności, nie może być jedynym branym pod uwagę przy doborze treści nauczania.

Jakie są możliwości i potrzeby dziecka? Możliwości – to, choć wiemy, że wielu może ta teza zbulwersować, to też często tylko spekulacje. Badania prowadzone kilkadziesiąt lat temu[11] jak i dzisiejsze obserwacje wskazują na duże różnice w poziomie rozwoju dzieci. To naturalne, że poziom ten jest różny. W tej różnorodności trzeba upatrywać szanse, a nie zagrożenia. Tymczasem modne stają się hasła typu: wyrównywanie szans rozwojowych, działania naprawcze, wspomaganie rozwoju. Wiemy, że prosto jest prowadzić grupę dzieci „jak po sznurku": wszystkie dzieci uczymy tego samego, tak samo, w tym samym czasie. Żeby tak organizować proces uczenia się trzeba dzieci doprowadzić do tego samego po-

[9] J. Piaget takie sytuacje nazywał **równoważeniem struktur poznawczych**. por. J. Piaget, B. Inhelder: Psychologia dziecka, Siedmiogród, Wrocław 1996, s.112 - 114.

[10] Rozporządzenie Ministra Edukacji Narodowej z dnia 27 sierpnia 2012 roku w sprawie podstawy programowej wychowania przedszkolnego oraz kształcenia ogólnego w poszczególnych typach szkół (Dz.U. z 2012 r., poz.977 z późn. zm.).

[11] L. Wołoszynowa: Problemy szkolnego „startu" dzieci w polskim zreformowanym systemie oświaty, „Psychologia Wychowawcza" 1977, nr 1.

ziomu, czyli „naprawić" – jedne wspomóc w rozwoju, żeby szybciej się rozwijały, a u innych „nie zauważyć", że potrzebują więcej, szybciej, czegoś innego. Dzieci nie są zepsute i nie trzeba ich naprawiać.

Jakie są zainteresowania dzieci? Gdybyśmy dobierali treści nauczania w oparciu o to, co dzieci interesuje w tym momencie, jakie są tu i teraz ich potrzeby, to nie mielibyśmy kłopotów z motywacją do pracy. Dzieci zaspokajałyby swoje potrzeby, odpowiadając na pytania, które same stawiają[12]. Słuchanie pytań dzieci, podążanie za ich zainteresowaniami to dobry trop w doborze treści. Pyta ten kto nie wie i chce się dowiedzieć. Zadanie pytania świadczy o luce w wiedzy czy umiejętnościach, którą można pomóc dziecku zapełnić. Tymczasem w szkole częściej pytania zadają nauczyciele, niż dzieci. W przedszkolu nie obserwujemy jeszcze tak zaburzonej proporcji między liczbą pytań dzieci, a liczbą pytań nauczyciela. Dziecko pyta, dużo pyta. Jest w wieku pytań. Odpowiedź na jedno pytanie, często prowokuje kolejne. Czasami dziecko pyta dla samego zadawania pytań i nie oczekuje, że ktoś mu na te pytania odpowie. Samo sobie odpowiada. Jeżeli zaś oczekuje odpowiedzi, to usilnie to robi, nie „odpuści". W szkole jest inaczej. Pytania zadaje przede wszystkim nauczyciel, podręcznik, rzadko dziecko. Jeżeli nie pozwalamy dziecku pytać, oduczamy je zadawania pytań, to jak mamy poznać jego potrzeby?

Dobierając treści nauczania trzeba przede wszystkim patrzeć na potrzeby dzieci, na ich możliwości, zakładając ogromną różnorodność poziomu rozwoju. To pozwoli uczynić użytecznym to czego dziecko się uczy. Użytecznym tu i teraz, a nie kiedyś (nie wiadomo kiedy). Trudno sześciolatkowi zrozumieć, że ma się uczyć matematyki, bo dzięki temu zostanie dobrym ekonomistą i będzie nieźle zarabiało. Nie można też zapominać o tym, że pewne doświadczenia są ważne z punktu widzenia rozwoju dziecka i budowania gruntu do dalszego uczenia się matematyki. Tak jak w przypadku doświadczeń z wagą szalkową.

To co wcześniej napisaliśmy na temat doboru treści nauczania jest w dużej mierze uniwersalne i dotyczy wszystkich edukacji, nie tylko matematycznej. Dobierając treści z edukacji polonistycznej, czy przyrodniczej też bierzemy pod uwagę potrzeby dzieci i ich możliwości oraz to, że mają być podstawą do budowania kolejnych pojęć na kolejnych szczeblach edukacji. Są jednak też ważne założenia w doborze treści nauczania, które wynikają ze specyfiki edukacji matematycznej i są dla niej bardzo charakterystyczne:

Po pierwsze: matematyka posługuje się swoim językiem, który pozwala reprezentować, wyjaśniać rzeczywistość w rygorystyczny, precyzyjny i jednoznaczny sposób. Stąd potrzeba aby dzieci uczyły się podstawowych narzędzi do odczytywania, interpretacji i tworzenia komunikatów matematycznych, zdobywały zdolność do przechodzenia z jednego języka (werbalnego, graficznego czy symbolicznego) na inny.

Po drugie: matematyka ma wewnętrzną strukturę, szczególnie bogatą i spójną. Wszystkie jej elementy (pojęcia, procedury, graficzne i symboliczne oznaczenia) są wzajemnie powiązane i trudne do zrozumienia w izolacji. Dlatego konstruowanie umiejętności i wiedzy matematycznej powinno koncentrować się na podstawowych pojęciach i procedurach oraz relacjach między nimi.

Po trzecie: istnieją w matematyce pojęcia podstawowe, na których buduje się kolejne (na przykład klasyfikowanie, rytmy, szeregowanie, liczby itp.). Układ treści jest bardziej

---

[12] S. Szuman: Rozwój pytań dziecka: badania nad rozwojem umysłowości dziecka na tle jego pytań, Nasza Księgarnia Sp. Akcyjna Związku Nauczycielstwa Polskiego, Warszawa 1939, s. 65-81.
S. Szuman: Dzieła wybrane, tom.1: Studia nad rozwojem psychicznym dzieci, WSiP, Warszawa 1985, s. 275.

liniowy niż spiralny. Dziecko uczy się liczyć, co jest podstawą do tego, by nauczyło się dodawać i odejmować, a z kolei dodawanie i odejmowanie jest podstawą dla mnożenia i dzielenia, które znów są podstawą dla potęgowania i pierwiastkowania.

Po czwarte: w matematyce większość podejmowanych aktywności wiąże się z sytuacjami rozwiązywania problemów, dlatego niezwykle ważne są umiejętności budowania własnych strategii i procedur radzenia sobie z problemami.

Po piąte: należy wprowadzić jasne rozróżnienie pomiędzy charakterem wiedzy matematycznej (wiedza jest abstrakcyjna, sformalizowana, symboliczna), a procesem nabywania takiej wiedzy (proces ten w przypadku przedszkolaka powinien być konkretny, oparty na własnym działaniu). To szczególnie ważny w przypadku przedszkola wymóg przedstawienia treści matematycznych z punktu widzenia praktycznego doświadczenia dzieci. Pozwoli to na stopniowe przechodzenie w kierunku abstrakcji i symboliki.

1.3. Jak uczyć matematyki? Metody rozwijania pojęć matematycznych

Wprowadzanie nowych treści, uczenie dzieci różnorodnych umiejętności i wiedzy z matematyki wymaga dobrego orientowania się w procedurze uczenia się. Tymczasem bywa, że procedura ta słabo jest przez nauczycieli znana. Nauczyciele znają wiele ciekawych zabaw, zajęć dla dzieci, które rozwijają orientację w przestrzeni, uczą dodawać, czy porównywać liczebności, ale często nie wiedzą w jakim miejscu w procedurze uczenia się daną aktywność można dzieciom zaproponować, tak żeby stała się ważnym ogniwem w procesie budowania kolejnego pojęcia.

Naturalny bieg myśli to: **czynność – słowo – symbol matematyczny** i za tym podążać powinna metoda pracy dziecka:

- każde działanie musi być wyrażone konkretnie – ruchem, manipulowaniem konkretem;
- wykonane działanie musi być opisane słowami;
- opis słowny powinien stopniowo być zastępowany symbolem[13].

Uczenie się przebiega według pewnej procedury. Na procedurę uczenia można też spojrzeć od strony mechanizmów uczenia się.

Proces uczenia się to interakcja między uczniem a mistrzem. Dziecko **naśladuje**[14], ale działają razem mistrz i uczeń. Nie da się wprowadzić podziału na tych którzy robią – pokazują jak robić i tych, którzy patrzą jak robi to kto inny[15]. Uczona umiejętność musi być wielokrotnie **powtórzona**. Dziecko powtarza razem z nauczycielem – zachodzi jednocześnie naśladowanie i powtarzanie. Powtarzać ma to samo, ale nie za każdym razem tak samo. Dlatego tak ważne jest, aby nauczyciel rozumiał, co jest istotą zadania, a nawet nie tyle zadania co pojęcia matematycznego – co jest istotą klasyfikowania, liczenia, dodawania itp. Z naszych obserwacji wynika, że nauczyciele często mają z tym problem. Dlatego tak chętnie trzymają się scenariuszy zajęć i boją się wyjść poza to, co jest w nich opisane. Oprócz naśladowania, powtarzania w procedurze uczenia się musi zaistnieć też **nagroda**. Nagroda może mieć postać pochwały, a wraz z rozwojem emocjonalno – społecznym dziecka powinna nabierać coraz bardziej wewnętrznego charakteru. Z czasem motywacja nabiera wewnętrznego

[13] L. Jeleńska: Metodyka arytmetyki i geometrii w pierwszych latach nauczania, op. cit., s. 20.

[14] W więcej na ten temat piszemy w Za progiem. Jak rozwija się dziecko i jaka jest rola nauczyciela w tym rozwoju, M. Skura, M. Lisicki, ORE, Warszawa 2011, s. 51.

[15] E. Filipiak: Rozwijanie zdolności uczenia się. Z Wygotskim i Brunerem w tle, GWP, op. cit., s. 46.

charakteru, a samo rozwiązanie problemu jest nagrodą. Nagradzanie, to kolejny element procedury uczenia się. Dodamy do niego jeszcze naśladowanie, powtarzanie. Wszystkie te zintegrowane elementy twarzą sytuację uczenia się. Są **presją do uczenia się.** Ważna jest też ocena dziecka, czy to co robi ma sens, zaspakaja jego **ciekawość**. Zadaniem nauczyciela jest wzbudzić tę ciekawość. Zadania o jabłkach, które układa fikcyjna mama na stole, nie zawsze ją wzbudzają. Rozwiązanie problemu czy miś, który mieści się w dużym pudle zmieści się też w małym – taką ciekawość może w naturalny sposób rozbudzić.

Równie ważne jak to czego się uczą dzieci (treści) jest to jak się uczą (procedura). **Organizacja odpowiednich doświadczeń** – to niezwykle ważne zagadnienie, szczególnie istotne przy programowaniu edukacji matematycznej.

Zadania dla dziecka powinny być wyzwaniem, prawdziwą trudnością, problemem do rozwiązania. W odpowiedni sposób przedstawione zainteresują dzieci. Pytanie typu – jak sądzicie, czy więcej dzieci w naszej grupie woli lody waniliowe czy czekoladowe? – wzbudzi zainteresowanie, przedszkolaki chętnie zabiorą się za sprawdzanie, jak z tymi lodami jest. Tego typu zadanie zapewne będzie bardziej z punktu widzenia dziecka warte rozwiązania, niż zagadnienie typu: Na stole są 3 jabłka. Mama przyniosła jeszcze 2. Ile jest razem jabłek? Co przedszkolaka obchodzi jakaś wydumana mama i jej kłopoty z ustaleniem liczby jabłek? Tymczasem sprawdzenie, jakie lody lubią dzieci w naszej grupie, to naprawdę ciekawe zadanie. A już od nauczyciela zależy, w którą stronę i jak daleko podąży z dziećmi z rozwiązaniem takiego problemu. Może poprzestać na ustaleniu, policzeniu i określeniu: więcej, mniej, tyle samo. Może też pójść w stronę ułamków i określić, że na przykład 9 dzieci spośród 22 lubi czekoladowe, a 13 dzieci spośród 22 lubi lody waniliowe. Jeżeli Jaś będzie dostawał wcześnie wiele tego typu doświadczeń, wtedy bez trudu Janek zrozumie w klasie 4 formalnie wprowadzane pojęcie ułamka. Tego typu umiejętności przydadzą się też wtedy, gdy na przykład Jan będzie kupował telefon komórkowy. Czy bardziej opłaca się kupić telefon za 1000 zł i płacić co miesiąc przez 2 lata abonament 90 zł? Czy też lepiej zapłacić za telefon 1 zł, ale przez 2 lata co miesiąc płacić abonament 200 zł? Którą opcję wybrać? Co się bardziej opłaca? Łatwiej jest to obliczyć i skalkulować, gdy dobrze się zna i rozumie podstawowe zależności między wielkościami: sumowanie, odejmowanie, wielokrotność danej wielkości, podział na równe części, część z całości itp.

Na lekcjach matematyki uczniowie rozwiązują zadania na ułamki zwykłe, dziesiętne, czy procenty wykonując podobne czynności umysłowe, co przedszkolak bawiąc się klockami. Robią to tylko na innym poziomie reprezentacji. Przedszkolak na poziomie działania na przedmiotach, a uczeń na poziomie działania na symbolach.

Stawiamy śmiałą tezę – **nie ma w zakresie szkoły podstawowej takich treści matematycznych, których nie można realizować w przedszkolu pod warunkiem, że zrobimy to na odpowiednim poziomie reprezentacji, w odpowiedni sposób stosując mechanizmy uczenia się**. Nie ma treści w edukacji matematycznej, które mogą dziecku zaszkodzić. Ograniczanie się do rytmów, klasyfikowania, orientacji w przestrzeni to tak jakby na kursie gotowania ograniczyć się do wyjaśnienia kursantowi, co to jest mąka, cukier, proszek do pieczenia, a nie pokazać, jak można te składniki połączyć, żeby otrzymać ciasto. Dzieci dostają doświadczenia, z którymi nie wiedzą co mają zrobić, nie wiedzą jak, gdzie i kiedy je zastosować.

Mierzymy się z tradycją, przyzwyczajeniami, opinią o tym, że dziecku nie można dać niczego trudnego, bo zaszkodzi. Panuje niczym nie uzasadniony lęk przed proponowaniem dzieciom trudnych zadań. Pozostaje zadać jeszcze jedno, ważne naszym zdaniem pytanie – po co jest nauczyciel? Ale to już temat na inną książkę.

Matematyka to sztuka myślenia. Dlatego trzeba tak zaprogramować edukację matematyczną w przedszkolu, a potem w szkole, żeby pobudzać, rozwijać myślenie dzieci. Dawać im wiele okazji do eksperymentowania z różnymi strategiami myślenia, które rzadko występują w izolacji. Uczyć dzieci istoty pojęć matematycznych. Nie od razu algorytm zapisu ułamka zwykłego, ale najpierw zrozumienie co to jest ułamek. To część całości. Całością może być tort, czy pizza ale też całość to paczka cukierków. Na takie przejście od zrozumienia istoty pojęcia matematycznego do jego symbolicznego zapisu i posługiwania się algorytmami dziecko potrzebuje czasu. Czasu, którego nie mierzymy w miesiącach, ale w latach. Trzeba więc zacząć wcześnie, wykorzystać to, że dziecko najintensywniej intelektualnie rozwija się w pierwszych latach swojego życia. Szkoda poświęcić te lata wyłącznie na działania, które matematykę tylko przypominają, które są matematyką tylko z nazwy.

1.4. Zasady organizowania edukacji matematycznej

Treści z matematyki mają układ hierarchiczny czyli liniowy. Na jednych budowane są inne. Nie można nauczyć się rachować bez wcześniejszego nauczenia się liczenia. Liczby naturalne dziecko poznaje przed ułamkami – najpierw jest całość, a potem część tej całości. Ważna jest kolejność wprowadzania pojęć matematycznych.

Działania matematyczne projektuj natomiast **cyklicznie i spiralnie**. Ta sama treść będzie pojawiać się kilka razy (cyklicznie) na coraz trudniejszym, bardziej skomplikowanym i rozbudowanym poziomie (spiralnie).

Kiedy utrwalasz znajomość pojęć matematycznych dbaj o to, aby **działania proponowane dzieciom dotyczyły kilku treści.** Trudno wyobrazić sobie poznawanie liczb bez łączenia ich z operacjami arytmetycznymi, które można wykonać w różnych sytuacjach i dzięki którym dziecko zobaczy użyteczność liczb. Nie da się poznać własności figur geometrycznych bez poznawania liczb i miar. Ponadto takie różnorodne podejście budzi w dzieciach ciekawość i zainteresowanie omawianymi tematami.

Ucz dzieci pojęć matematycznych w oparciu o ich **własne doświadczenia** – praktyczne działania. Dziecko powoli przechodzi od myślenia konkretnego do myślenia abstrakcyjnego. Nauczanie matematyki oparte głównie na werbalnym przekazywaniu wiedzy matematycznej nie będzie efektywne.

Pojęcia matematyczne, którymi posługują się przedszkolaki w większości mają jeszcze **charakter intuicyjny.** Intuicje są stopniowo przekształcane w abstrakcyjne pojęcia. Nie można utożsamiać rozumienia przez dziecko matematycznego pojęcia z umiejętnością opowiedzenia „o co chodzi", nie o wyartykułowanie pojęcia chodzi na tym etapie. Najpierw dziecko zaczyna rozumieć, a dopiero potem uczy się o tym mówić, jeszcze później uczy się mówić językiem matematyki i jej symboli.

Uczy się tylko ten, kto jest **aktywny**. Ważne są działanie i refleksja na temat tego, co się robi. Bardzo cenne są sytuacje, w których dzieci mogą zadawać wiele pytań, próbować i popełniać błędy, z których wysnuwają wnioski, jak robić lepiej i skuteczniej.

Proponuj dzieciom sytuacje, w których będą **rozmawiać**, wygłaszać swoje opinie, hipotezy, wyjaśniać i debatować na temat wyników. Chodzi o werbalizowanie tego co robią. Stopniowo, w miarę możliwości i umiejętności dzieci będą korzystały z symboli matematycznych. Daj ciekawe propozycje stosowania kodów matematycznych, aby poznały ich umowność, arbitralność, uniwersalność. Proces rosnącej formalizacji pojęć matematycznych wymaga znajomości i stosowania kodów reprezentujących coraz bardziej abstrakcyjne pojęcia. Kodowanie i dekodowanie prowadzi do generalizacji wiedzy matematycznej.

Uwierz, że **dzieci w przedszkolu dużo już wiedzą i potrafią z matematyki. Nie szkodzi, że czasami ich** wiedza i umiejętności są w dużej mierze błędne, niekompletne. Twoim zadaniem jest pomóc dzieciom „wyprostować" i uzupełnić błędne sądy. Zanim zaproponujesz dzieciom nową wiedzę czy umiejętności, sprawdź **co w tym zakresie już wiedzą, czy potrafią.**

Proponuj dzieciom zadania, które odnoszą się do otaczającej je rzeczywistości, do ich potrzeb i zainteresowań. Szukaj odpowiednich sytuacji w przedszkolu, poza przedszkolem, w pobliżu dziecka. Wykorzystaj sytuacje zakupów, wycieczek, sprzątania, ubierania się w szatni, przygotowywania posiłków itp. Bierz pod uwagę to, że wiedza z innych obszarów lub działań pomaga w edukacji matematycznej. Umiejętności z matematyki stanowią niezbędne narzędzie do badania innych obszarów, na przykład przyrody, techniki. Na zajęciach z matematyki dzieci uczą się komunikować, wyciągać wnioski, interpretować dane, co przydaje się do uczenia pojęć z innych zakresów edukacji.

Zdarza się, że dzieci traktują **zadania jak zagadki**. Nawet po rozwiązaniu zadania dziecko mówi, że odgadło. Tymczasem w matematyce niczego się nie odgaduje tylko rozwiązuje, oblicza, odpowiada na pytania.

Celem urozmaicania zajęć nie jest rozrywka, ale skupienie i utrzymanie uwagi. Zadania proponowane dzieciom powinny **zachęcać je do wglądu w strukturę matematyki i relacje w obrębie matematyki.** Jeżeli zaproponujesz dzieciom wycinanie z gazet zdjęć okrągłych przedmiotów, to większość czasu przedszkolaki poświęcą na wycinanie, co będzie dobrym ćwiczeniem sprawności manualnej. Wymaga to też dość intensywnej koncentracji na czynnościach motorycznych. Myślenia matematycznego przy tym niewiele. Lepiej, żeby dzieci w świecie rzeczywistym badały geometryczne kształty, będąc jak najbardziej skupionymi na myśleniu matematycznym. Można na przykład zapytać dzieci, czy da się rozegrać mecz piłki nożnej nie okrągłą, ale piłką w kształcie kostki do gry? Najpierw przewidują, co by się stanie, gdyby zagrać mecz sześcienną piłką, a potem same sprawdzają różnicę między kopaniem piłki – kuli, a kopaniem piłki – sześcianu.

Szukaj **przyczyn błędów dzieci**. Czy wynikają one z braku wiedzy i umiejętności, czy z zupełnie innych przyczyn, na przykład lęku, zmęczenia, nieuwagi, a może choroby czy kłopotów w domu. Jeżeli powodem błędów jest brak wiedzy lub umiejętności, dąż do precyzyjnego ich wskazania.

Dzieci uczą się matematyki w różny sposób. Dostosuj metody nauczania do ich możliwości i potrzeb. Jeżeli dziecko doznaje niepowodzeń zmień metody na inne, a gdy i to nie przyniesie sukcesu poczekaj. Wróć do tego za jakiś czas.

Nie potrzebujesz wielu pomocy do organizowania zajęć z matematyki. Przedmioty, na których dzieci działają powinny być proste i im znane (klocki, patyczki, kamyki, kasztany). Używaj też specjalnie opracowanych i sprawdzonych w pracy z dziećmi pomocy dydaktycznych, takich jak liczydła, czy klocki logiczne.

Nie wierz w powszechne **mity** na temat edukacji matematycznej. Matematyka nie jest wyjątkowo trudnym przedmiotem. Matematyka nie jest tylko dla wybitnie mądrych ludzi. Matematyka nie jest domeną mężczyzn[16]. Dorośli, a wśród nich nauczyciele, postrzegają matematykę, jako trudny przedmiot i taki pogląd jest społecznie akceptowany. Matematy-

16 C. Lim: Public images of mathematics', "Philosophy of Mathematics Education Journal", 15 (March), 2002.

ka różni się od innych przedmiotów w szkole, gdyż zadania z matematyki są postrzegane jako zamknięte, a język matematyki wydaje się być językiem bardzo technicznym, szczegółowym, z niewielkim odniesieniem do życia codziennego, gdyż rzadko posługujemy się nim w codziennych rozmowach.

Każdą własną myśl dzieci są skłonne uznać za prawdziwą, tylko dlatego że jest ich własna. Obstawiają przy swoich sądach, nie odczuwają potrzeby przekonania się, a nawet nie biorą pod uwagę możliwości obiektywnego sprawdzenia. Jedynie dyscyplina umysłowa wyrabia krytycyzm w stosunku do własnej pracy – wzbudza wątpliwości, dąży do sprawdzania. Im młodsze dziecko, tym mniej jest krytyczne, tym mniej ma wątpliwości. Poprawianie błędów dzieci powinno doprowadzić je do powątpiewania. Wątpliwości powstają przez zetknięcie się z czyjąś myślą, inną niż nasza. Dlatego dzieci powinny słyszeć sądy innych dzieci. Poprawianie błędów powinno wywołać potrzebę sprawdzenia sądów przeciwnych. Nie możesz tego lekceważyć. Ustal w rozmowie z dziećmi, że trzeba przekonać się, jak jest naprawdę. Rozwijaj u dzieci nastawienie na krytykę w stosunku do własnych twierdzeń[17].

Podobny zestaw zasad proponowała już w początkach XX wieku Ludwika Jeleńska. Zadziwiające jak mało straciły na aktualności, dlatego przytaczamy je w oryginalnym brzmieniu[18]:

1. Nauczyciel nie poucza, nie dowodzi, nie wykłada – dzieci samodzielnie zdobywają pojęcia, dążąc od rzeczy do myśli.
2. Nauczyciel kieruje pracą dzieci przez odpowiednio dobrane konkrety i przestrzeganie stopniowania.
3. Nauczyciel przewiduje trudności ucznia i rozbija pracę na kolejne etapy (…): każdą trudność trzeba podzielić na tyle cząstek, na ile jest możliwe i na ile trzeba aby je najlepiej rozwiązać.
4. Nauczyciel nie zadowala się prostowaniem słownym błędów (…) doprowadza do ich poprawienia przy pomocy konkretu, tak aby na miejsce wyobrażenia błędnego utrwaliło się prawidłowe wyobrażenie.
5. Nauczyciel dba, aby zmechanizowanie działania zawsze było poprzedzone zrozumieniem.
6. Nauczyciel nigdy nie żąda od dzieci opanowania przedmiotu w ciągu jednej pracy, nie przedłuża jej, ale stosuje „zasadę nawrotów".
7. W tym celu nauczyciel planuje swą pracę i rozkłada na dłuższy czas ćwiczenia, do których ma powracać.
8. Nade wszystko nauczyciel stara się aby na zajęciach z matematyki panowała atmosfera swobodnej pracy.

1.5. Język matematyki

Język matematyki pozwala opisać wiele sytuacji i przekazać informacje w zwięzły, jasny i zrozumiały dla każdego sposób. Zagadnienia matematyczne powinny być już w przedszkolu opisywane słowami. Język wzbogaca doświadczenie, rozwija dokładność operacji umysłowych, wzbogaca zasób słów.

17 L. Jeleńska: Metodyka arytmetyki i geometrii w pierwszych latach nauczania, op. cit., s.132 - 134.
18 Ibidiem, s. 139-140.

Dzieci od przedszkola uczą się nowego języka – języka matematyki. Na początku stosują ten język w praktycznych, rzeczywistych doświadczeniach: z zabawkami, liczmanami, klockami, monetami, przy liczeniu na palcach. Stosują też ten język w wielu sytuacjach życiowych (rzeczywistych lub specjalnie zaaranżowanych), takich jak zakupy, pomiary, wycieczki, gotowanie, zabawy na placu zabaw. Uczą się stosowania nazw pojęć matematycznych, zarówno formalnych jak i nieformalnych (razem, zabierać, tak wiele jak, taki sam jak itp.). Wraz z rozwijaniem umiejętności kodowania i dekodowania poznają **symbole** wykorzystywane do reprezentowania liczb i operacji na liczbach: cyfry, znaki +, -, =. Posługują się też rysunkami – diagramami, wykresami, piktogramami, osią liczbową itp.

Przedszkolaki uczą się opisywać tą samą sytuację różnymi słowami, na przykład można powiedzieć „cztery i pięć, to dziewięć", „cztery plus pięć daje dziewięć", „dodaję cztery do pięciu i otrzymuję razem dziewięć". Dziecko nabiera przekonania, że można wyrazić to samo pojęcie matematyczne różnymi słowami.

Często formalny język matematyki jest przeszkodą w proponowaniu dzieciom różnych doświadczeń matematycznych. Dziecko nie rozumie problemu opisanego językiem zbyt abstrakcyjnym, na przykład Ustal, czy większy procent dzieci lubi lody malinowe czy waniliowe? Takie zadanie, już na poziomie sformułowania stawia przeszkodę, uniemożliwiającą dziecku zrozumienie. Dziecko jeszcze takim językiem posługiwać się nie potrafi. Nauczyciele boją się też nazywać to co robią z dziećmi językiem formalnej matematyki, uważając że to dla dzieci zbyt trudne. Doskonałym przykładem są ułamki, które dziecko pozna dopiero w starszych klasach, a więc może lepiej w przedszkolu nie używać pojęcia „połowa" czy „ćwiartka"?

Język, którym posługują się przedszkolaki jest językiem konkretów, przedmiotów; językiem który opisuje to co widać, co można wziąć do ręki, przestawić, przesunąć. Formalny język matematyki to język symboli i sformułowań nie pochodzących z potocznego słownika.

Prześledźmy w jaki sposób dziecko buduje swój język matematyki. Pokażemy to na przykładzie dodawania i odejmowania. Kilkumiesięczne dziecko ma cukierki. Dostaje od babci jeszcze kilka cukierków i cieszy się, bo cukierków ma dużo. Dziadek zabrał kilka cukierków i jest już mniej radosne, bo cukierków ma teraz mało. Dziecko jeszcze niczego nie nazywa słowami, tylko po jego minie, gestach widzimy, że zauważa zmianę: dostałem cukierki, jest ich dużo, zabrali mi cukierki, jest ich mało. Potem zaczyna nazywać czynność dodawania – dostałem, dołożyłem, dosypałem – i wynik – mam dużo. Nazywa czynność odejmowania – zabrali mi, oddałem, wyrzuciłem – i wynik – mam mało. Kiedy zaczyna posługiwać się nazwami liczebników próbuje określić liczbą dodawane, czy odejmowane obiekty, bo widzi, że tak robią dorośli. Na początku podawane liczby mają niewiele wspólnego z konkretną sytuacją, dziecko podaje liczby, które najczęściej słyszało i które prosto jest wymówić (jeden, dwa, cztery) oraz liczby duże, atrakcyjne dla niego (sto, tysiąc, milion). Wraz ze wzrostem umiejętności liczenia, próbuje samo policzyć dodawane i odejmowane obiekty. Cały czas dodawanie i odejmowanie, nazywanie tych czynności związane jest z konkretnymi przedmiotami i konkretnymi sytuacjami. To etap posługiwania się **językiem konkretu**, odwołującym się do realnych rzeczy, sytuacji tu i teraz.

Potem dziecko zaczyna posługiwać się opisem, odwołując się do konkretnych sytuacji, ale te sytuacje nie muszą zdarzać się tu i teraz. Mogły się już wydarzyć, albo dziecko przewiduje, że się wydarzą. Mówi na przykład: Miałem piłkę. Piłka wpadła do wody. Nie mam już piłki. Albo: Mam cukierki. Dam babci trochę cukierków a dla dziadka nie będzie już cukierków. W takich opisach dziecko posługuje się też pojęciami z języka matematyki –

mniej, więcej, dodaję, kilka, razem itp. Takie opisy przypominają opis obrazka, czy historyjki obrazkowej. Są powiązane z rozwojem pamięci dziecka, sprawnością posługiwania się myśleniem przyczynowo-skutkowym. Dziecko może się już posługiwać liczbami i opisem działań za ich pomocą. Ten etap to etap **języka opisu**.

W szkole dzieci zaczynają posługiwać się **językiem abstrakcji,** symbolu, sformalizowanych pojęć. Takim językiem posługują się nauczyciele, takim językiem pisane są polecenia do zadań w podręczniku. Do opisu dodawania i odejmowania dziecko używa liczb, pojęć: dodać, odjąć; potem suma i różnica.

Dziecko w swoim rozwoju myślenia matematycznego przechodzi szczególną drogę rozwoju języka. Najpierw jest to język odwołujący się wprost do rzeczywistości: opisujący realne przedmioty i to co się z nimi dzieje. Następnie jest to język odwołujący się do doświadczeń w rzeczywistości, ale rzeczy przeważnie są tylko przywoływane przez dziecko, reprezentowane przez słowa. W końcu pojawia się język abstrakcji, kiedy to nie ma potrzeby bezpośredniego odwoływania się do rzeczy. Na przejście tej drogi potrzeba czasu i doświadczeń. Dlatego dziecko w wieku przedszkolnym raczej nie stosuje języka abstrakcji. Dziecko wie, że wszystko jedno, czy doda 3 do 4, czy 4 do 3, zawsze będzie 7, ale nie wyrecytuje jeszcze prawa przemienności dodawania. Tym bardziej nie zapisze tego prawa za pomocą formuły matematycznej $3 + 4 = 4 + 3$. Obserwując dziecko i jego działania, łatwo stwierdzić, czy rozumie to prawo, czy też jeszcze nie. Na przykład: kładzie na talerzu najpierw 4 jabłka, a potem 3 gruszki. Ustala, że owoców jest 7. Następnie kładzie na talerzu 3 gruszki, a potem 4 jabłka i bez liczenia wie, że owoców jest tyle samo co poprzednio – siedem.

Ważne jest też **osłuchanie się** dziecka z językiem matematyki. Właśnie bardziej osłuchanie, niż sprawne posługiwanie się tym językiem. Nie zaszkodzi przedszkolakom, jeżeli już w sali trzylatków na ścianie będą wisiały kartoniki z cyframi. Dziecko oczywiście nie musi cyfr znać i ani tym bardziej ich odczytywać, wystarczy, że widzi je codziennie, a jeżeli potrzebuje, pyta o nie nauczyciela.

Nauczyciel musi umiejętnie posługiwać się językiem matematyki. Z jednej strony nie powinno się unikać określeń charakterystycznych dla tego języka, a z drugiej nie utrudniać zadania przez stosowanie zbyt abstrakcyjnego języka. Najważniejsze wydaje się – **nie wymagać od małego dziecka nazwania abstrakcyjnym językiem matematyki** tego, co robi. Często takie nazwanie jest przeszkodą w poradzeniu sobie z zadaniem. Na nazwy przyjdzie czas.

1.6. Dokładność w matematyce

Matematyka kojarzy się z dokładnością, precyzją, jednoznacznością. Dwa dodać dwa, to cztery a nie około czterech. Jednak w codziennym życiu wiele problemów matematycznych rozwiązujemy stosując **szacowanie**. Mówimy na przykład: Przyjdę za około godzinę; Na demonstracji było ponad sto osób. Bez rezygnowania z należytej wagi dla dokładności, dobrze jest rozwijać u dzieci już od przedszkola zdolność do szacowania. Szacowanie może być najbardziej skuteczną metodą dotarcia do dokładności, gdy jest ona potrzebna. Jest przydatne przed wykonaniem obliczeń lub pomiarów, jako przybliżone odpowiedzi. Umożliwi sprawdzenie czy wynikiem operacji jest ten rząd wielkości (na przykład $26 + 60$, daje wynik mniej niż 90). Szacowanie jest przydatne aby ocenić, czy wynik wydaje się być rozsądnym (na przykład 3000 nie może być wynikiem 26 x 10). Szacowanie jest także użyteczne do wyboru właściwej jednostki miary (na przykład, w metrach nie podaje się wymiarów książki). Przybliżanie wyniku jest ściśle związane z obliczeniami, rozwiązywaniem problemów, a przede wszystkim z pojęciem miary (długość, powierzchnia, objętość, ciężar). Aby szacować wyniki pomiaru i obliczeń trzeba zdobyć pewne umiejętności w zakresie posługiwania się tymi pojęciami. Ponadto popełniane błędy uprawdopodobniają szacowanie, jeżeli dziecko jest uwrażliwiane na konieczność zastanawiania się. Dziecko określa jak daleko jest od drzwi do okna. Patrzy na dystans i szacuje, że 50 kroków. Mierzy i wychodzi dużo mniej – 24. Kiedy kolejny raz zobaczy podobny dystans, to jego szacunki będą bardziej precyzyjne. **Błąd może pomóc w precyzji**.

1.7. Dobre i złe tradycje (nawyki pedagogiczne)

Jedną z cech współczesnego społeczeństwa są ciągłe, szybko następujące zmiany. Postęp technologiczny i rosnące znaczenie mediów, potęgują uczucie, że żyjemy w nieustannie zmieniającym się środowisku. Przedszkole i szkoła nie są od tego wolne. Sformalizowane nauczanie musi się dostosowywać do zmieniającego się świata. Dzisiaj dzieci potrzebują przede wszystkim nauczyć się odbierać, przetwarzać i wytwarzać różne informacje. Ponadto wiele działań obejmuje aspekty techniczne, które należy zrozumieć, aby aktywnie uczestniczyć w życiu.

Można zadać pytanie o to, jakie umiejętności i pojęcia matematyczne mogą być uznane za potencjalnie przydatne do zaspokajania potrzeb, do dobrego funkcjonowania w społeczeństwie. Kluczową wydaje się być **umiejętność radzenia sobie z problemami**. Nie mniej istotna jest umiejętność analizowania rzeczywistości, rozumienia sytuacji, by dostosowywać się do zmieniających się kontekstów. Ważne jest tworzenie nowych pomysłów i wiedzy.

Mimo że rzeczywistość wokół się zmienia, to w edukacji zbyt często jeszcze ślepo powiela się i kultywuje tradycje. Ślepo odtwarzana tradycja zabija to, co w tradycji najcenniejsze, czyli wiedzę o prawidłach rozwoju i szacunek dla rozwoju. **Tradycja edukacyjna** to mądrość „ludowa" o tym, jak i dlaczego tak a nie inaczej rozwija się człowiek. Nie dzieje się dobrze, kiedy nauczyciel powtarza pewne czynności, nie wiedząc po co, dlaczego tak, a nie inaczej robi. Nie jest dobrze, jeżeli nie rozumie istoty tego, co robi, a koncentruje się tylko na powtarzaniu. Przypomina to tradycje świąteczne. W prawie każdym polskim domu maluje się jajka na Wielkanoc. Większość „malarzy" słabo orientuje się w genezie i symbolice tego zwyczaju.

Wiele z takich niezrozumiałych obrzędów spotykamy w edukacji matematycznej. Jednym z nich jest określanie kierunków na rysunku, na przykład czy drzewo jest po prawej, czy po lewej stronie krowy. Po co tego typu zadania? Jak często korzystamy z umiejętności określania stron w przestrzeni w odniesieniu od krowy? Powie ktoś, że tego typu problemy są potrzebne, bo rozwijają umiejętność orientowania się w przestrzeni na rysunku. To prawda, ale żadnemu przedszkolakowi, a nawet uczniowi klas I - III, taka umiejętność nie jest jeszcze niezbędna. Tym bardziej że jest bardzo trudna, wymaga nie tylko przyjmowania punktu widzenia innej istoty, ale też umiejętności wyobrażania sobie tego. Poza tym mnóstwo tu umów, które stworzyli ludzie. Jeżeli jest to trudne, niezbyt przydatne w życiu, to po co „katować" dzieci (i siebie) tego typu zadaniami? Inny powszechny tradycyjny obrzęd to monografia liczby naturalnej. Co najmniej przez kilka dni dzieci poznają liczbę 1, potem liczbę 2, kolej na liczbę 3 i tak… co najmniej do 20. Po co? Dziecko z liczbami naturalnymi ma do czynienia w zasadzie od zawsze. Po co koncentrować się na omawianiu każdej z nich osobno? Z punktu widzenia dziecka liczby w izolacji nie występują. Istotą liczby jest to, że znajduje się ona w towarzystwie innych liczb. Liczba 3 znajduje się w ciągu liczb przed 4, a po 2. Liczba 5, to 4 + 1, 3 + 2, czy 8 - 3. Kiedy do liczby 4 dodamy 1, to otrzymamy liczbę 5.

Za to nie ma w przedszkolu, a potem w klasach początkowych szkoły podstawowej, propozycji uczenia dzieci podstaw bardzo ważnych pojęć matematycznych. Brakuje na przykład doświadczeń w posługiwaniu się określeniami możliwe, niemożliwe, na pewno tak, na pewno nie, co jest podstawą nauczenia się za kilka lat podstaw rachunku prawdopodobieństwa. Różne są powody „dziur" w programach nauczania. Jednym z nich jest właśnie bardzo mocno zakorzeniona tradycja edukacyjna. Nigdy nie było, to i teraz nie ma. Tak z pokolenia na pokolenie nauczycieli przekazywane są pewne wzorce metodyczne, bez refleksji czy mają one większy, czy mniejszy sens, czy są bardziej czy mniej użyteczne. Analiza podstawy programowej wychowania przedszkolnego i edukacji wczesnoszkolnej oraz powstających do niej programów i podręczników, nasuwa wniosek, że dzieciom nie proponuje tego, co w matematyce najważniejsze. To co można tam znaleźć to taka „specjalna" matematyka. Jest ona bardzo często infantylna i nie stanowi dla wielu większego wyzwania, ani trudności. **Specjalnie przygotowana, spreparowana i podzielona na izolowane od siebie części matematyka niewiele ma wspólnego z rzeczywistością**.

Tradycja edukacyjna niesie z sobą tyle samo dobrego, co złego. Warto sięgać po dobre, sprawdzone rozwiązania. Wiązanie patyczków w wiązki po 10 i rachowanie na nich, to doskonały, znany od lat sposób uczenia dzieci orientowania się w dziesiątkowym systemie pozycyjnym. Podstawowym warunkiem tego, by takie tradycyjne rozwiązanie służyło dobrej sprawie, jest jego celowe i świadome stosowanie.

2. Podstawowe rozumowania matematyczne

2.1. Podstawowe rozumowania matematyczne klasyfikowanie

Jednym ze sposobów porządkowania rzeczywistości jest **klasyfikowanie**. Polega ono na dostrzeżeniu cechy lub cech, a następnie segregowaniu według tej cechy lub cech klasyfikowanych obiektów.

Klasyfikować można według różnych cech. Łatwiej klasyfikować według cechy, którą widać (kolor, kształt, wielkość) niż według cechy, której „nie widać" na pierwszy rzut oka, która nie jest oczywista, takich jak: przynależność, miejsce występowania, czy zastosowanie.

Istotne jest też, w jaki sposób **zakodowana jest cecha**, którą bierze się pod uwagę przy klasyfikowaniu. Jeżeli obiekty klasyfikujemy ze względu na kolor, to łatwiej kiedy są one narysowane lub po prostu leżą przed nami, niż wtedy kiedy klasyfikowane obiekty reprezentują na przykład kartoniki z nazwami tych obiektów. Kiedy zaś klasyfikujemy obiekty ze względu na liczbę sylab, z których składają się ich nazwy, to łatwiej gdy nazwy są zapisane, niż wtedy kiedy na kartonikach są ich rysunki. Sposób kodowania może sprzyjać (ułatwiać) lub utrudniać klasyfikowanie.

	
król, karo, królowa, koń	piłka, parasol, pionek, pik

Nim dziecko przyjdzie do przedszkola podejmuje już próby klasyfikowania. Segreguje przedmioty, na przykład na ładne i brzydkie. Potem na te, które przynależą do poszczególnych osób. Na przykład układa buty: mamy osobno, taty osobno i swoje osobno. Wie, że do szafki z butami raczej nie wkłada się lizaków (chyba, że dla zabawy), a mleko rodzice wkładają do lodówki (klasyfikacja ze względu na przynależność, na miejsce występowania). Zaczyna dostrzegać istotne cechy przedmiotów i potrafi z pomocą dorosłego uporządkować je według cechy, którą widać, czyli koloru, kształtu, czy wielkości. Uczy się też dobierać obiekty w **sensowne pary**: widelec pasuje do talerza, szalik pasuje do rękawiczek, a lalka pasuje do wózka.

Zbieranie kolejnych doświadczeń powoduje, że dziecko zaczyna klasyfikować z **uwzględnieniem więcej niż jednej cechy**. Podaje brązowe misie z kokardkami, zielone piłki w paski, czy duże lalki z kucykami. Potrafi też te same obiekty poklasyfikować **według różnych cech**. Piłki segreguje na małe i duże. Potem te same piłki segreguje według koloru. Potem na ciężkie i lekkie. Każdy obiekt należy bowiem do kilku zbiorów, w zależności jaką cechę bierzemy pod uwagę. Duży brązowy miś z kokardą należy do zbiorów: zabawki; misie; brązowe misie; misie z kokardą; misie Kasi; misie, które są w sali przedszkolnej itd. Trudność zadania wzrasta wraz ze wzrostem liczby cech, które trzeba brać pod uwagę. Łatwiej poklasyfikować klocki według koloru, niż według koloru i kształtu jednocześnie, a jeszcze trudniej jednocześnie według koloru, kształtu i wielkości.

Klasyfikując można brać pod uwagę cechę, którą obiekty posiadają lub brak danej cechy. Trudniej klasyfikować kiedy kryterium uwzględnia **negację.** Na przykład wtedy, gdy dziecko wybiera wszystkie klocki, które nie są czerwone, czy wkłada do pudełka piłki, które nie są duże.

Tworząc kolekcje należy brać pod uwagę **cechy tego samego rodzaju.** Czyli, kiedy dziecko klasyfikuje różne przedmioty, to wyróżnia wśród nich: małe/duże (bierze pod uwagę wielkość) lub zielone/czerwone/niebieskie (ważny jest kolor), czy też te, które są okrągłe, podłużne, trójkątne (ważny jest kształt).

Dzieci mogą klasyfikować tylko obiekty, które **znają**: potrafią nazwać, wiedzą co to jest i do czego służy. Zadania dotyczące klasyfikowania koncentrują uwagę na cechach obiektów, dlatego dziecko powinno umieć nazwać te cechy[19]. Dzieci posługują się **nazwami cech**. Może się zdarzyć, że cechy nazywają „po swojemu", inaczej niż dorosły.

♥	kier, kolor w kartach
♥	serce krwiodawcy
♥	Ja ♥ słodycze

Zawsze trzeba **nazwać obiekty,** które dzieci mają klasyfikować, na przykład: W pudełku są drewniane klocki, one mają różne kolory i kształty. Trzeba też nazwać każdą utworzoną kolekcję, słownie wyjaśnić dlaczego jeden obiekt pasuje do drugiego, czy wyjaśnić dlaczego ten obiekt nie pasuje do pozostałych. Warto pamiętać by klasyfikowane obiekty były **różnorodne**. Dzieci mogą klasyfikować klocki, zabawki, kredki, skrawki materiału, różnego rodzaju papiery, nakrętki, kartoniki o różnych kształtach itp. Im bardziej różnorodny materiał do klasyfikowania, tym lepiej. W zadaniach na klasyfikowanie często stosuje się **karty do klasyfikowania**. Są to specjalnie przygotowane obrazki. Takie obrazki

[19] Przy szukaniu podobieństw i różnic między obiektami w klasyfikowaniu chodzi o skoncentrowanie się na cechach obiektów, a nie na zadaniach typu Znajdź różnice między dwoma obrazkami. Takie zadania rozwijają głównie spostrzeganie, a nie umiejętność klasyfikowania.

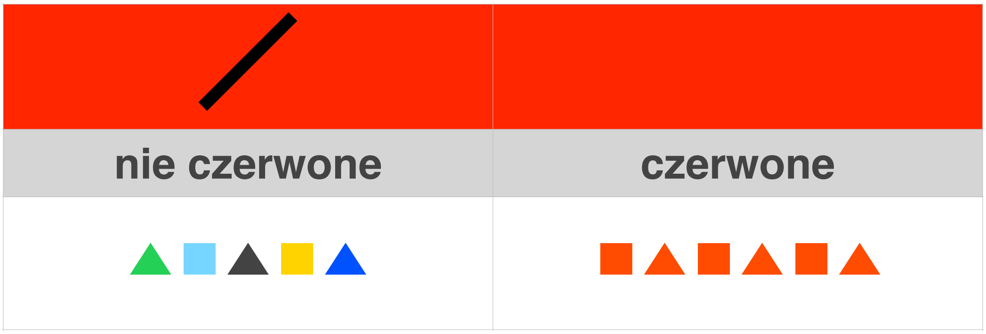
muszą być łatwe do rozpoznania dla dziecka i występować na kartoniku pojedynczo. Czyli na przykład na jednym kartoniku jest banan (i tylko banan), a na innym krowa (i tylko krowa). Wyjątkiem są obiekty, które zazwyczaj występują w parze, czy w większej liczebności. Na przykład na jednym kartoniku jest para butów, na innym para łyżew, para skarpetek, czy kiść winogron.

Dorosły może wskazać dziecku (narzucić) według jakich cech ma posegregować obiekty, ale też dziecko może samo wymyślić sposób porządkowania.Trudniej jest samemu dostrzec cechy i według nich konsekwentnie porządkować obiekty.

Kiedy dziecko nieźle już radzi sobie z klasyfikowaniem według jednej cechy oraz według kilku cech jednocześnie, można zaproponować zadanie, w którym przedszkolak **sam określa według jakich cech** ktoś poklasyfikował obiekty. Na przykład nauczyciel stawia przed dziećmi trzy pudełka: w jednym są drewniane zabawki, w drugim plastikowe, a w trzecim szmaciane. Dzieci określają według jakiej zasady nauczyciel posegregował zabawki.

W PRZEDSZKOLU, W SZKOLE

Przy klasyfikowaniu można korzystać z symboli kodujących cechy obiektów. Nauczyciel kładzie zielony kartonik i mówi, że w tym miejscu będą wszystkie zielone kredki. Kładzie czerwony kartonik i wskazuje, że to miejsce na czerwone kredki. Kładzie żółty kartonik oznaczający miejsce na żółte kredki. Innym razem kładzie kartonik z rysunkiem kota, kartonik z rysunkiem psa i kartonik z rysunkiem królika. Dzieci, w których domach mieszkają psy, koty lub króliki stają w odpowiednich miejscach. Przy okazji powstaną ciekawe problemy: gdzie mają stanąć dzieci, które mieszkają w domu z kotem i psem, czy te które nie mają ani kota, ani psa, ani królika. Można też wprowadzać symbole oznaczające negację. Zielony przekreślony kartonik oznacza „wszystkie kolory tylko nie zielone", przekreślony czerwony – „nie czerwone". Im więcej symboli, im więcej negacji, tym trudniejsze zadanie. Łatwiej jest też dzieciom odczytywać symbole, niż samemu kodować cechy obiektów.



Zadania na klasyfikowanie, w których wprowadza się symbole kodujące cechy uczą też dzieci korzystania z symboli, a to bardzo ważna umiejętność. Jednym z aspektów liczby naturalnej jest **aspekt symboliczny.** Liczbę można zapisać określonym symbolem, czyli cyfrą lub cyframi. Jest to trudny symbol, gdyż swoim wizerunkiem w żadnym stopniu nie odnosi się do tego, co koduje. Zrozumienie istoty symbolu wymaga przejścia pewnej drogi. Najpierw dziecko posługuje się symbolem, który wprost odnosi się do tego, co koduje. Na przykład kartonik zielony oznacza wprost kolor zielony – Tu są przedmioty zielone. Ten etap pozwala zrozumieć co to jest symbol, jednocześnie nie wymaga zapamiętania wielu informacji. Stopniowo dziecko poznaje kolejne symbole, które stają się coraz bardziej abstrakcyjne. Na przykład mała strzałka oznacza wielkość „mały", a duża wielkość "duży". Przekreślone koło oznacza „nie w kształcie koła" – w odczytaniu tego symbolu trzeba złożyć kilka informacji: jakie to jest (w kształcie koła) i zaprzeczenie cechy (nie w kształcie koła). Tego typu doświadczenia pomogą dziecku zrozumieć istotę symbolu, bez którego nie będzie możliwe posługiwanie się symbolami abstrakcyjnymi. Jednym z takich symboli jest cyfra, a następnie całe zestawy cyfr symbolizujące liczbę. W szkole uczeń zaczyna posługiwać się formułami matematycznymi, czyli symbolami czynności, które można opisać słownie lub za pomocą znaków działań matematycznych i cyfr. U podstaw posługiwania się formułami matematycznymi leży zrozumienie danej czynności, wyrażenie jej słowami i dopiero zapisanie symbolami matematycznymi[20].

Klasyfikowane obiekty warto zaznaczać pętlami (ze sznurka, skakanki, obrysować kredą), a każdy zbiór dziecko powinno nazwać.

Nie ma żadnych przeciwwskazań do tego, żeby nauczyciel przy okazji zadań na klasyfikowanie używał określenia zbiór. Chodzi głównie o to, żeby dzieci osłuchały się z tą nazwą. Jeżeli jednak nie rozumieją jeszcze tego pojęcia na tyle, żeby radzić sobie z zadaniami, nauczyciel może się nim nie posługiwać.

Różnorodność stosowanych do zadań na klasyfikowanie obiektów pozwala na **rozwijanie u dzieci także innych ważnych umiejętności**, na przykład:

- posługiwania się nazwami kolorów (kiedy na przykład klasyfikują kredki według koloru);
- rozpoznawania i nazywania różnych kształtów (kiedy na przykład klasyfikują klocki o różnym kształcie);
- nazw zwierząt, pojazdów, roślin (kiedy na przykład klasyfikują karty z obrazkami zwierząt, pojazdów, czy roślin).

[20] Więcej o formułach matematycznych piszemy w rozdziale 3.5 Liczba naturalna. Rachowanie.

Tego typu zadania są też okazją do liczenia. Zgromadzone według jakiejś cechy obiekty warto przeliczać tym bardziej, że liczebność jest jedną z cech zbioru.

Klasyfikowanie prowadzi do uogólnień, a te do **konstruowania przez dziecko pojęć.** Dziecko bawi się piłkami, je lody kulkowe, dokazuje w basenie z kulkami, lepi ze śniegu śnieżki. Dorosły łączy kształt z nazwą: piłka, kulki, śnieżki mają kształt kuli. Na podstawie tych doświadczeń dziecko konstruuje bardziej ogólne pojęcie kula.

Klasyfikowanie to też wyróżnianie cech charakterystycznych dla danego obiektu, takich które opisują jego istotę. Te cechy to **atrybuty obiektu**. To właśnie te cechy decydują do jakiej kategorii należy obiekt. Ich zmiana, powoduje zmianę przynależności. Każdy obiekt ma też cechy, które nie są jego atrybutami. Ich zmiana nie powoduje zmiany jego istoty. Atrybuty pozwalają zaliczyć obiekt do danej kategorii[21]. Czyli klasyfikowanie związane jest z rozumieniem i tworzeniem **definicji pojęć** oraz odróżnianiem jednych pojęć od innych.

Klasyfikację człowiek wykorzystuje do **konstruowania pojęć.** Wyróżnia cechy istotne dla danego pojęcia (analiza), jednocześnie odróżnia je od cech nieistotnych (porównywanie). Odrywa też cechy istotne od zmieniającego się kontekstu (abstrahowanie). Wiąże je, łączy w jedno pojęcie (synteza). To pojęcie nosi wiedzę o całej klasie obiektów (uogólnianie). Jakie cechy musi mieć zwierzę, aby dziecko zaliczyło je do kategorii psów? Musi mieć 4 łapy, ogon, uszy i oczywiście szczekać (analiza). Ale psy są różne: mniejsze i większe, dłuższe i krótsze, różnie ubarwione, mają uszy w różnym kształcie i różne są też ich ogony (porównywanie). Psy mogą chodzić na smyczy, mogą biegać, czasami warczą, na początku są małymi szczeniakami, a potem dorastają (abstrahowanie). Obserwując psy, głaszcząc je, słysząc je, bawiąc się maskotkami w kształcie psa, słuchając opowieści o psach dzieci konstruują pojęcie „pies" (synteza).

Podczas definiowania obiektów dzieci zwracają uwagę na cechy mało istotne, ale takie, które łatwo zauważyć. Opisując różę młodsze dziecko zwraca uwagę na to, że ma listki, jest czerwona i ma jeden kwiat. Starsze rozpoznaje zależności między cechami oraz cechy trudniej dostrzegalne, ale ważne: przy łodydze są spiczaste liście, między nimi są kolce, a płatki kwiatów są zwinięte[22].

Pojęcia można **uporządkować hierarchicznie**: klasa nadrzędna – zwierzęta, klasa podstawowa – psy, klasa podrzędna – jamniki. Dziecku najłatwiej poruszać się po klasie „środkowej", czyli w hierarchii rośliny (klasa nadrzędna) – drzewa (klasa podstawowa) – dęby (klasa podrzędna), najbliższe i zarazem najłatwiejsze będzie pojęcie „drzewo". Na początku każdą płynącą wodę dziecko nazywa rzeką, potem odkrywa, że rzeki mają swoje nazwy, a też, że rzeki są jednym z rodzajów wód (oprócz rzek, są też morza, jeziora, oceany).

Starszy przedszkolak zaczyna już te same przedmioty klasyfikować według różnych cech. Potrafi też klasyfikować te same przedmioty biorąc pod uwagę jednocześnie kilka cech. Im więcej cech jest w stanie uwzględniać, tym możliwości dziecka w klasyfikowaniu są większe. Takie zachowania dziecka świadczą o tym, że dostępne jest już mu **klasyfikowanie na poziomie operacji konkretnych**. Łatwiej poklasyfikować klocki najpierw według koloru, potem według kształtu, a na koniec według wielkości. Trudniej najpierw według koloru i kształtu jednocześnie, potem jednocześnie według wielkości i koloru, a na koniec według kształtu i wielkości.

---

[21] R. R. Nisbett: Geografia myślenia. Dlaczego ludzie Wschodu i Zachodu myślą inaczej, Smak Słowa, Sopot 2011, s. 25.

[22] por. Psychologia uczenia się w nauczaniu początkowym, pod red. J. Lompscher, WSiP, Warszawa 1976, s. 57.

Charakterystycznymi cechami **operacyjnego klasyfikowania** jest:

- giętkość rozumowania, czyli dziecko potrafi segregować te same obiekty na wiele sposobów. Klasyfikując te same obiekty kilka razy, za każdym razem według innej cechy, wymyśla coraz bardziej skomplikowane kryteria;
- konsekwencja, czyli dziecko podejmuje decyzję, jak będzie klasyfikowało i kieruje się nią, aż posegreguje wszystkie obiekty;
- dokładność definiowania, czyli charakteryzując obiekty, dziecko bierze pod uwagę te cechy, które uwzględniło przy segregowaniu[23].

W zadaniach rozwijających zdolność posługiwania się rozumowaniem operacyjnym w zakresie klasyfikowania często używa się **specjalnych kart**. Na takich kartach znajdują się obiekty, które można opisać różnymi cechami. Na przykład komplet kart może składać się z kartoników z figurami o różnym kształcie (koła, kwadraty, trójkąty, gwiazdki), o różnej wielkości (małe i duże), w różnych kolorach (czerwone, zielone, żółte), w różnych deseniach (w kropki, paski, kratkę). Taki zestaw kartoników można na różne sposoby klasyfikować: według kształtu, potem według wielkości, następnie według deseni.

[23] A. Szemińska: Rozwój procesu klasyfikacji, w: Nauczanie początkowe matematyki, t. 1, Z. Semadeni (red.), WSiP, Warszawa 1981.

W PRZEDSZKOLU, W SZKOLE
Dzieci mają misie (zbiór misiów). Do pudełka wkładają misie z kokardą (podzbiór misiów z kokardą).
Mają samochodziki (zbiór samochodzików). Do jednego pudełka wkładają wszystkie wyścigówki (podzbiór wyścigówek), do drugiego wszystkie ciężarówki (podzbiór ciężarówek), do trzeciego wszystkie koparki (podzbiór koparek), a do czwartego wszystkie osobowe (podzbiór samochodów osobowych).
W ten sposób dzieci uporządkowały wszystkie samochodziki.

Zbiory mogą zawierać inne zbiory, czyli **podzbiory**. Taki podzbiór może być jeden i nie należą do niego wszystkie obiekty zbioru. Na przykład w zbiorze kubków jest podzbiór kubków zielonych. Kubki, które nie są zielone nie należą do podzbioru. Można wyróżnić też kilka podzbiorów, aby rozmieścić w nich wszystkie obiekty zbioru. W zbiorze kubków wyróżniamy trzy podzbiory: kubki bez ucha, kubki z jednym uchem, kubki z dwoma uszami. W ten sposób można wszystkie kubki rozdzielić do podzbiorów. Ze zbioru można odjąć podzbiór (lub podzbiory). Na przykład ze zbioru kubków zabieramy podzbiór „kubki bez ucha". Trudność zadania zależy od liczby utworzonych podzbiorów w danym zbiorze. Najłatwiej jest rozdzielać według zasady: pasuje/nie pasuje do wyróżnionego podzbioru. Im więcej podzbiorów powstaje w danym zbiorze, tym zadanie jest trudniejsze.

Tworzone zbiory i podzbiory dzieci powinny oznaczać, na przykład pętlami ze sznurka, szarfami, czy obrysowywać kredą. Pomoże im to zapamiętać, że podzbiór jest wewnątrz zbioru. Łatwiej jest też wtedy wskazać obiekty, które nie należą do podzbioru.

Warto **liczyć obiekty** w zbiorze, podzbiorze i te, które nie należą do podzbioru. Dobrze, żeby dzieci odkryły, że liczba obiektów w podzbiorze jest mniejsza od liczby obiektów w zbiorze, a kiedy doda się obiekty w podzbiorze i te, które nie należą do podzbioru, to będą to wszystkie obiekty, które należą do zbioru.

W PRZEDSZKOLU, W SZKOLE
W jednym koszyku dzieci mają kasztany (zbiór kasztanów), a w drugim kamyki (zbiór kamyków).
Kasztany i kamyki wsypują do jednego większego koszyka.
Czy kasztanów i kamyków jest więcej, czy mniej niż samych kasztanów?

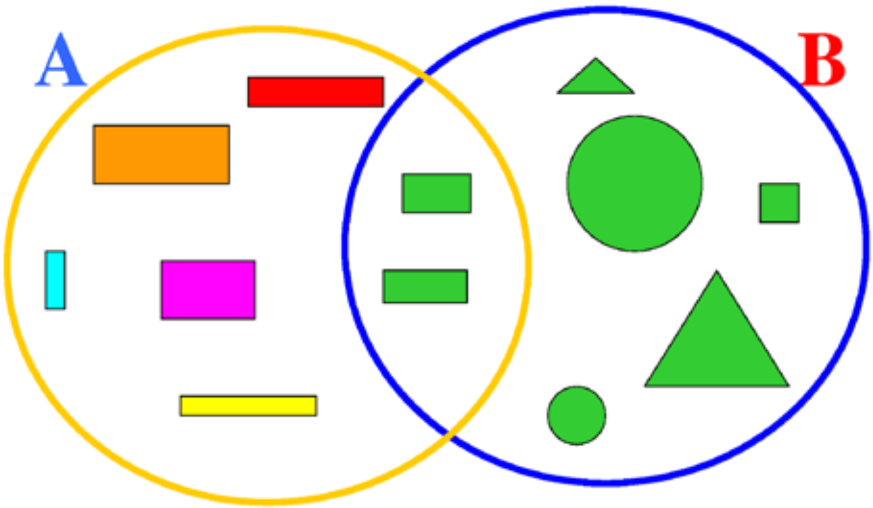
Można dodawać do siebie zbiory (**suma zbiorów**). Taki nowy zbiór będzie zawierał wszystkie obiekty dodawanych zbiorów. Sumujemy zbiór cukierków i zbiór ciastek, otrzymując zbiór cukierków i ciastek (słodyczy)[24].

W PRZEDSZKOLU, W SZKOLE
Do jednej pętli ze sznurka dzieci wkładają wszystkie samochodziki (zbiór samochodzików), a do drugiej wszystkie żółte zabawki (zbiór żółtych zabawek).
Co zrobić z żółtą wyścigówką, która mogłaby być w obu pętlach?
Można połączyć pętle, tak żeby utworzyć część wspólną.
Do części wspólnej dzieci wkładają żółtą wyścigówkę.

[24] T. Sawicki, R. Reclik, J. Nowak: Matematyka, Wyd. NOWIK, Opole 1997, s. 30.

Zbiory mogą mieć **część wspólną.** Zawiera ona wszystkie obiekty, które jednocześnie należą do obu zbiorów. Jest zbiór jabłek i zbiór czerwonych owoców. Czerwone jabłka będą częścią wspólną tych zbiorów.

Dzieciom najłatwiej jest znaleźć część wspólną zbiorów, które zostały utworzone na podstawie cech, które widać (kolor, kształt, wielkość). Przy tworzeniu części wspólnej zbiorów dzieci najpierw wyróżniają dwa zbiory. Na przykład do jednej pętli wkładają zielone zabawki, a do drugiej klocki. Co zrobić z zielonym klockiem, który pasuje do obu zbiorów? Nauczyciel może podpowiedzieć i tak ułożyć pętle dwóch zbiorów, żeby utworzyły część wspólną, do której dzieci włożą zielone klocki. Warto pamiętać o tym, że tworzenie części wspólnej zbiorów to bardzo trudne zadanie dla dzieci i często będzie wymagało pomocy nauczyciela.



Zbiory, które nie mają ani jednego wspólnego obiektu, to **zbiory rozłączne**. W jednym koszyku są jabłka (zbiór jabłek), w drugim gruszki (zbiór gruszek). Te dwa zbiory nie mają ani jednego wspólnego obiektu.

Zbiór może nie zawierać ani jednego obiektu. To **zbiór pusty.** W koszyku były jabłka. Ze wszystkich jabłek mama upiekła szarlotkę. W koszyku nie ma teraz jabłek. Zbiór jabłek jest pusty. Pojęcie zbioru pustego jest podstawą do konstruowania pojęcia liczby zero.

Nie ma żadnych przeciwwskazań do tego, żeby nauczyciel przy okazji zadań na klasyfikowanie używał określeń podzbiór, część wspólna zbiorów. Chodzi głównie o to, żeby dzieci osłuchały się z tymi nazwami. Jeżeli jednak nie rozumieją jeszcze tych pojęć na tyle, żeby radzić sobie z zadaniami, nauczyciel może się nimi nie posługiwać.

W PRZEDSZKOLU, W SZKOLE

Dzieci przyniosły na dywan wszystkie przedmioty, które „mają" koła, takie w których koła można dostrzec. Są wśród nich samochodziki, piłki okrągłe, doniczka, są też kubki (z góry widać koło).
Nauczyciel pyta dzieci, jakie przedmioty by jeszcze tutaj pasowały.
Ktoś powiedział, że ma w domu dywan w kółka, ktoś inny powiedział, że kierownica samochodu ma też kształt koła.

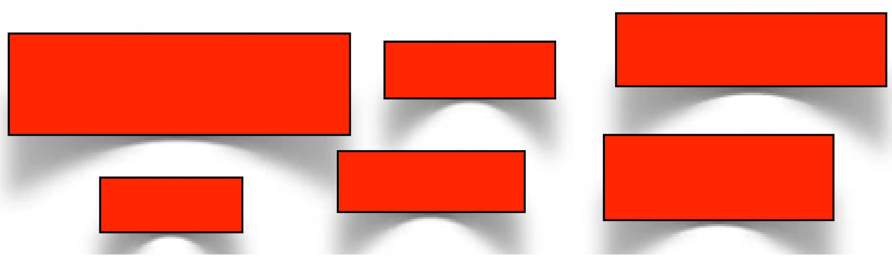
W klasyfikowaniu bardzo ważny jest **proces rozszerzania** – dzieci określają, co jeszcze pasuje do wyróżnionego zbioru, podzbioru, części wspólnej. Nierozsądnym jest ograniczanie procesu klasyfikacji do zbioru o określonej liczbie obiektów, a korzystnym jest zachęcanie dzieci do rozszerzania zbioru o dodatkowe obiekty, które spełniają określone kryteria. Jest to zbiór wszystkich obiektów (nie tylko tych wskazanych przez nauczyciela), które spełniają podane kryteria.

Są też **zbiory o skończonej liczbie obiektów**. Na przykład zbiór składników potrzebnych do przyrządzenia naleśników, czy zestaw klocków potrzebnych do zbudowania zamku. Dzieci w przedszkolu powinny mieć możliwość tworzenia zbiorów zamkniętych, przygotowuje to do zrozumienia ważnej cechy zbioru, jaką jest liczebność. Kiedy wyróżniamy zbiór zielonych przedmiotów, to każdy obiekt z tego zbioru możemy określić cechą „zielony". Można taki zbiór rozszerzać w zasadzie w nieskończoność. Kiedy zaś gromadzimy składniki na naleśniki, to istotne jest zebranie ich wszystkich. Kiedy czegoś brakuje, nie uda się stworzyć pełnego zbioru. Z drugiej strony tego typu zbiór ma skończoną liczbę obiektów. Podobnie jest z cechą liczebność. Kiedy mamy zbiór pięciu przedmiotów, żadnego z nich nie określimy cechą „pięć" (tak jak byśmy mogli to zrobić w wypadku zbioru zielonych przedmiotów – każdy obiekt zbioru jest zielony), ale dopiero połączenie ich wszystkich daje nam cechę pięć – cechę zbioru, ale nie każdego obiektu osobno.

Jedną z najtrudniejszych cech, ale i najistotniejszych cech zbiorów, z którymi mają do czynienia dzieci jest cecha **liczebność**. Liczba to jedno z najbardziej abstrakcyjnych pojęć z jakim ma do czynienia człowiek. Jak w ubiegłym stuleciu napisała L. Jeleńska: „Nie ma przecież trzech stołów, na które patrzymy, jest tylko stół, stół i stół, a my ogarniamy je myślą jako coś zjednoczonego, jako trzy. Liczba jest to unitas mentalis unitatum multiplicjum (jedność myślowa wielu jedności)"[25].

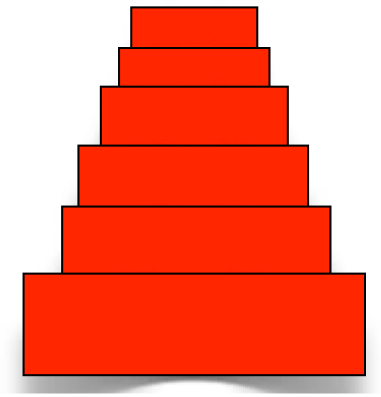
Rozumienie bardzo abstrakcyjnego pojęcia liczby opiera się na sprawnym klasyfikowaniu. Dziecko ma w koszyku jabłka. Wyjmuje je po kolei i za każdym razem jabłko oznacza „jeden". Jeden, jeden, jeden, jeden… im więcej jabłek, tym więcej „jeden". Liczebność staje się jedną z cech zbioru.

Dziecko wyjmuje 6 czerwonych prostokątnych klocków. Przedmioty, które wyjęło można opisać rożnymi cechami: są to klocki, są one czerwone, są duże, są prostokątne.



Te cechy to: czerwone (kolor), duże (wielkość), prostokątne (kształt), klocki (rodzaj zabawek). Zbiór klocków można też opisać tak: są one potrzebne do zbudowania wieży, jest ich sześć. W ten sposób definiujemy zbiór przez wszystkie jego obiekty. Wszystkie klocki są potrzebne do zbudowania wieży, wszystkich klocków jest sześć.

[25] L. Jeleńska: Metodyka arytmetyki i geometrii w pierwszych latach nauczania, op. cit., s. 10.



To wieża z klocków. To wieża ze wszystkich klocków.
To sześć klocków.

Na początku przy klasyfikowaniu dziecko bierze pod uwagę cechy jakościowe (na przykład kolor, wielkość, kształt). Jest to podstawa do tego, by potem dokonywać klasyfikowania ilościowego w oparciu o cechę jaką jest liczebność. Na przykład dziecko potrafi kredki poklasyfikować najpierw ze względu na kolor, potem te same kredki ze względu na długość, czy na kształt obudowy. Ta umiejętność jest podstawą do tego, by potrafiło kredki rozdzielić na różne sposoby na mniejsze liczebności (w tym na takie same liczebności). Jest zbiór 10 kredek. Można rozdzielić go na dwa podzbiory: w jednym jest 6 kredek, w drugim 4 kredki. Potem ten sam zbiór można rozdzielić na inne dwa podzbiory: 3 kredki i 7 kredek, a też na 5 kredek i 5 kredek.

Jest zbiór kredek zielonych oraz zbiór kredek czerwonych. Kiedy zsumujemy te dwa zbiory, to otrzymamy zbiór kredek zielonych i kredek czerwonych, czyli zbiór kredek w różnych kolorach. Analogicznie – jest zbiór 4 kredek i zbiór 6 kredek, kiedy zsumujemy te dwa zbiory, to otrzymamy zbiór będący sumą zbiorów 4 kredek i 6 kredek, czyli zbiór 10 kredek.

Składanie zbioru z podzbiorów i rozkładanie zbioru na podzbiory, to podstawa uczenia się rachowania.

W przedszkolu, potem na początku szkoły podstawowej dzieci intensywnie ćwiczą klasyfikowanie. Zdobyte umiejętności wykorzystają potem na zajęciach z matematyki, kiedy będą:

- zbierać dane, klasyfikować je i reprezentować w różny sposób, po to by łatwiej było je przeanalizować;
- klasyfikować liczby na różne sposoby, na przykład liczby parzyste i nieparzyste; mniejsze od 100 i większe od 100; te które dają się podzielić przez 3 bez reszty i te, które nie dają się podzielić przez 3 bez reszty i tym podobne. W klasach starszych oprócz liczb naturalnych działają też na ułamkach, liczbach całkowitych, wymiernych i niewymiernych;
- korzystać z wiedzy o klasach nadrzędnych, podstawowych i podrzędnych. Jedności można zamienić na dziesiątki, a dziesiątki na setki, te zaś na tysiące itd;
- klasyfikować miesiące i przyporządkowywać je do pór roku i innych wydarzeń;
- nazywać, opisywać, porównywać, klasyfikować według różnych kryteriów kształty trójwymiarowe (sześciany, walce, kule, prostopadłościany, stożki) oraz dwuwymiaro-

we (koła, trójkąty, wielokąty). W klasach starszych uczniowie klasyfikują też kąty, czy łamane;

- klasyfikować jednostki pomiaru (długość można wyrażać w kilometrach, metrach, centymetrach; a wagę w gramach, dekagramach, kilogramach, tonach);
- klasyfikować pieniądze na złote i grosze, na monety i banknoty.

Doświadczenia (zadania) rozwijające

umiejętności klasyfikowania

PRZEDSZKOLE

Nazywanie obiektów i podawanie ich cech, które widać

dzieci nazywają obiekty i opisują ich wygląd, to z czego są zrobione

Dzieci mają różne przedmioty. Nazywają je i opisują ich wygląd. Wymieniają cechy, które widać, które można poczuć dotykając ich.

PRZEDSZKOLE

Nazywanie obiektów i podawanie cech, których nie widać

dzieci nazywają obiekty i opisują je – do czego służą, z czego są zrobione, gdzie się znajdują, czyje są

Dzieci mają różne przedmioty. Nazywają je i opisują, gdzie dany przedmiot można znaleźć, do czego służy, czyj on jest itp. Wymieniają cechy, których nie widać.

PRZEDSZKOLE

Podawanie cech wspólnych różnych obiektów

dzieci szukają cech wspólnych dla danych obiektów

Dzieci opisują, w czym są do siebie podobne dwie zabawki, na przykład lalka i miś.

PRZEDSZKOLE

Podawanie cech wspólnych obiektów należących do tej samej klasy (atrybutów)

dzieci szukają cech wspólnych obiektów, które należą do danej klasy.

Dzieci opisują, w czym są do siebie podobne dwa różne misie.

PRZEDSZKOLE

Wskazywanie takich samych obiektów

dzieci wskazują takie same obiekty. Posługują się określeniem „taki sam jak”.

W pudełku z klockami dzieci znajdują dwa takie same klocki.

PRZEDSZKOLE

Dobieranie obiektów w pary na zasadzie podobieństwa

dzieci dobierają obiekty w pary na zasadzie podobieństwa cech, które widać lub cech, których nie widać. Mogą też dobierać obiekty w pary funkcyjne (łyżka pasuje do kubka, bo łyżką można zamieszać cukier w herbacie)

Dzieci mają różne klocki. Każde z nich szuka koleżanki lub kolegi, który ma klocek w takim samym kolorze (w takim samym kształcie, tej samej wielkości; w tym samym kolorze i w tym samym kształcie)
Dzieci grają w „Piotrusia", układają domina, mozaiki, w których trzeba połączyć obiekty w pary funkcyjne, na przykład garnek i przykrywka, czy wazon i kwiat.

PRZEDSZKOLE

Porządkowanie obiektów w kolekcje według jednej cechy, którą widać, a potem według cechy której nie widać

dzieci uczą się klasyfikować obiekty według jednej cechy, na przykład koloru, jednocześnie ignorując inne cechy (wielkość, kształt)

Dzieci porządkują kredki według koloru (kształtu, wielkości).
Za każdym razem nazywają utworzoną kolekcję.

PRZEDSZKOLE

Wskazywanie obiektów, które pasują do danej kolekcji: obiekty są uporządkowane w kolekcje

dzieci określają, jakie obiekty pasują jeszcze do danej kolekcji

Na dywanie leżą czerwone przedmioty.
Dzieci szukają i przynoszą inne przedmioty, które są czerwone (są okrągłe, mają pokrywkę, można nimi rysować itp.)

PRZEDSZKOLE

Wskazywanie obiektów, które nie pasują do danej kolekcji: obiekty są uporządkowane w kolekcje

dzieci określają, jakie obiekty nie pasują do danej kolekcji i tłumaczą, dlaczego nie pasują

Nauczyciel pokazuje: piłkę, kamień, patyk, liść, kwiatek.
Dzieci wskazują, który obiekt nie pasuje do pozostałych.
Wyjaśniają, dlaczego.
Dzieci wkładają do pudełka 5 obiektów, z których cztery pasują do siebie, a jeden nie pasuje do pozostałych.
Zamieniają się pudełkami i wskazują obiekt, który nie pasuje do pozostałych.
Wyjaśniają, dlaczego.

PRZEDSZKOLE

Tworzenie ciągów obiektów, na zasadzie dwa sąsiednie pasują do siebie

dzieci układają ciąg obiektów na zasadzie, że dwa sąsiednie do siebie pasują. Wyjaśniają, dlaczego do siebie pasują

Dzieci układają obrazki jeden obok drugiego i na ich podstawie budują historyjkę.
Dzieci układają różne domina.

PRZEDSZKOLE I SZKOŁA

Rozpoznawanie obiektu na podstawie jego cech

dzieci uczą się wskazywać obiekty na podstawie ich opisu. W opisie podane są ważne cechy obiektu, które pozwalają na jego rozpoznanie

Dzieci mają obrazki: kwiat, piłka, kot, lody, chmura, jabłko.
Nauczyciel wymienia cechy, a dzieci wskazują obrazek z obiektem, do którego te cechy pasują. Na przykład nauczyciel określa: „To jest lekkie, białe, puszyste, zimne".

PRZEDSZKOLE I SZKOŁA

Rozpoznawanie obiektu na podstawie cech, których nie posiada

dzieci uczą się wskazywać obiekty na podstawie ich opisu, który zawiera negację

Dzieci mają obrazki: kwiat, piłka, kot, lody, chmura, jabłko.
Nauczyciel wymienia cechy, a dzieci wskazują obrazek z obiektem, do którego ten opis pasuje.
Nauczyciel opisuje: „To nie jest kwiatem, ani zwierzęciem.
Nie można tego zobaczyć na niebie. Nie jest zimne. Nie można tym grać w „dwa ognie"".

PRZEDSZKOLE I SZKOŁA

Rozpoznawanie obiektu na podstawie jego definicji

dzieci uczą się rozpoznawać obiekty na podstawie ich opisu, który może zawierać zarówno cechy, które ten obiekt posiada, jak i cechy których nie posiada. Który zawiera opis atrybutów tego obiektu, ale też cech drugorzędnych. Dzieci zbierają doświadczenia, które pozwolą im samym definiować różne pojęcia

Dzieci rozwiązują różne zagadki.

PRZEDSZKOLE I SZKOŁA

Definiowanie obiektu z uwzględnieniem dwóch cech

dzieci dokonują syntezy dwóch cech

Dzieci uzupełniają tabele, skonstruowane podobnie do poniższej

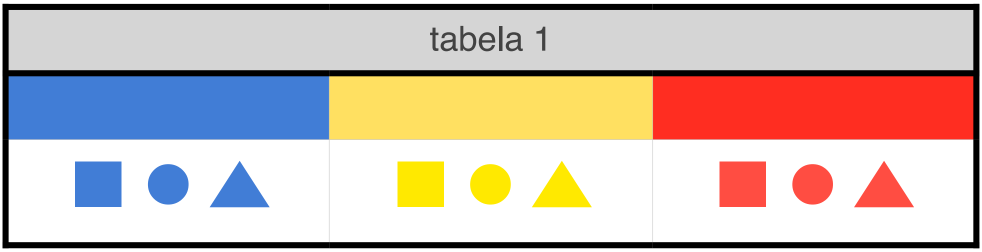


tabela 1

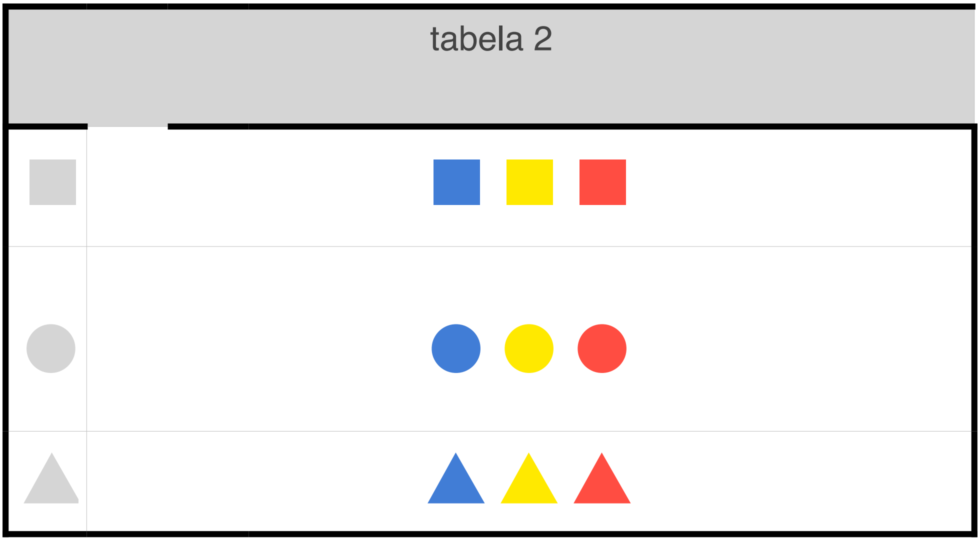
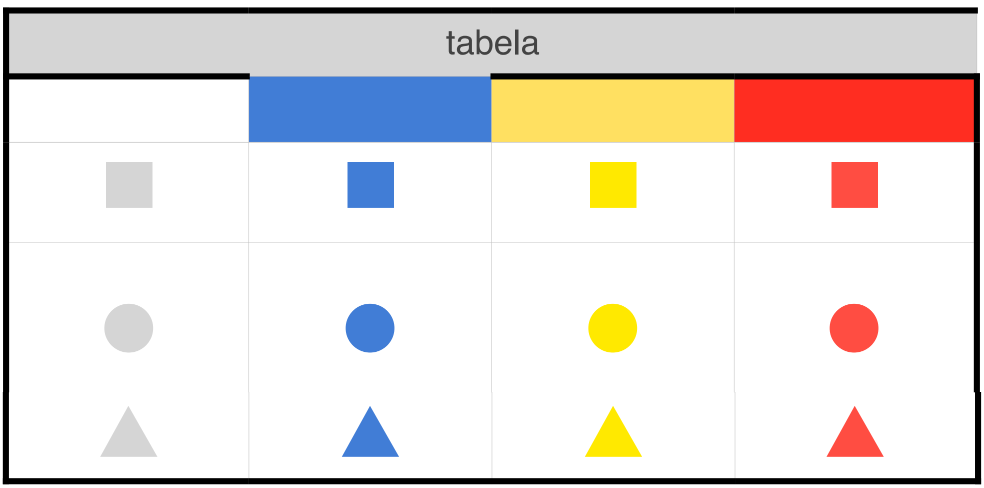


tabela 2



tabela

PRZEDSZKOLE I SZKOŁA

TWORZENIE ZBIORÓW ZAMKNIĘTYCH

dzieci tworzą zbiór obiektów, który jest zdefiniowany przez wszystkie należące do niego obiekty. Tworzą zbiory zamknięte

Dzieci mają zbudować zamek. Nim to zrobią, wkładają do pudełka wszystkie rzeczy, które będą do tego potrzebne.
Wymieniają (nazywają) te rzeczy. Budują zamek.
Nauczyciel wykorzystuje różne okazje do zdefiniowania zbioru obiektów potrzebnych do wykonania konkretnych czynności.

PRZEDSZKOLE I SZKOŁA

OKREŚLANIE ATRYBUTÓW OBIEKTÓW I CECH SPECYFICZNYCH DLA DANEGO OBIEKTU

dzieci uczą się określać cechy stanowiące istotę danego obiektu (atrybuty) i cechy, które ma jakiś konkretny obiekt

Dzieci określają jakie cechy mają wszystkie koty.
A jakie cechy ma konkretny kot, na przykład kot Asi.
Na tablicy dzieci wieszają zdjęcia swoich kotów i określają, czym te koty się od siebie różnią a w czym są podobne.

PRZEDSZKOLE I SZKOŁA

PORZĄDKOWANIE TYCH SAMYCH OBIEKTÓW W KOLEKCJE ZA KAŻDYM RAZEM WEDŁUG INNEJ CECHY

dzieci zbierają doświadczenia w segregowaniu tych samych obiektów według różnych cech. Podstawą jest dostrzeżenie w obiektach wielości cech oraz zauważenie tego, że zgromadzone obiekty są podobne (różnią się) pod względem różnych cech

Dzieci porządkują skrawki materiału według koloru, potem te same skrawki według wielkości, a na koniec jeszcze według tego, co można z danego materiału zrobić.

PRZEDSZKOLE I SZKOŁA

WYRÓŻNIANIE PODZBIORÓW W PODANYM ZBIORZE, W TYM Z ZASTOSOWANIEM NEGACJI

dzieci uczą się wyróżniać w zbiorze podzbiór (podzbiory) według podanej cechy. Nazywają zbiór i podzbiór. Wskazują też obiekty, które nie należą do podzbioru

Dzieci do jednej dużej pętli wkładają wszystkie kredki. To zbiór kredek.
Do mniejszej pętli wkładają wszystkie zielone kredki (mała pętla znajduje się wewnątrz większej).
To podzbiór zielonych kredek.
Dzieci do jednej dużej pętli wkładają wszystkie misie. To zbiór misiów.
Do mniejszej pętli wkładają wszystkie misie, które nie mają kokardy (mała pętla znajduje się wewnątrz większej). To podzbiór misiów bez kokardy.
Dzieci w jednej dużej pętli ustawiają wszystkie kubki. To zbiór kubków.
Teraz te kubki porządkują do trzech mniejszych pętli (które są wewnątrz większej): do jednej kubki bez ucha, do drugiej z jednym uchem, a do trzeciej z dwoma uszami.

PRZEDSZKOLE I SZKOŁA

Wyróżnianie podzbiorów w podanym zbiorze według różnych cech

dzieci wyróżniają w zbiorze podzbiory według podanej cechy. Uczą się, że w danym zbiorze można wyróżnić podzbiory na różne sposoby, czyli według różnych cech

Dzieci wkładają do pętli ze sznurka różne zabawki. W pętli są zabawki.
Najpierw szukają zabawek, które mają koła. Wszystkie je wkładają do jednej mniejszej pętli, a pozostałe do drugiej mniejszej pętli (mniejsze pętle znajdują się wewnątrz większej).
Wskazują zabawki, które mają koła i zabawki, które nie mają kół.
Z powrotem wszystkie zabawki wkładają do jednej dużej pętli.
Teraz szukają zabawek, które są pluszakami i wkładają je do jednej pętli, pozostałe do drugiej pętli. Wskazują pluszaki i nie pluszaki.
Znowu wszystkie zabawki wkładają do jednej pętli. Jeszcze raz segregują zabawki: do jednej mniejszej pętli wkładają zabawki, którymi można bawić się w wodzie, a do drugiej te, którymi raczej w wodzie nie można się bawić.
Kiedy nabierają wprawy same decydują, jak można uporządkować zabawki.

PRZEDSZKOLE I SZKOŁA

Posługiwanie się pojęciami: „wszystkie, nie wszystkie, niektóre"

dzieci nabierają wprawy w rozumieniu i stosowaniu określeń „wszystkie, nie wszystkie, niektóre"

Nauczyciel kładzie przed dziećmi różne przedmioty.
Dzieci oceniają, czy prawdą jest, że: wszystkie te zabawki są żółte; nie wszystkie misie są różowe; nie wszystkie samochody mają koła; niektóre lalki mają czerwone sukienki itp.

PRZEDSZKOLE I SZKOŁA

Określanie według jakich cech poklasyfikowane są obiekty

dzieci uczą się określać według jakich cech poklasyfikowane zostały obiekty

Zgromadzone są różne zabawki.
Nauczyciel do jednego pudełka wkłada metalowy dzwonek, metalowy samochodzik;
do drugiego szmacianą lalkę i szmacianego misia;
do trzeciego drewnianą lalkę, drewniany samochodzik i drewniany dzwonek.
Dzieci określają według jakich cech nauczyciel poklasyfikował zabawki.
Nazywają każdą utworzoną kolekcję.

PRZEDSZKOLE I SZKOŁA

Tworzenie części wspólnej zbiorów

najpierw dzieci tworzą dwa zbiory, a potem szukają obiektów, które należą jednocześnie do obu zbiorów (są częścią wspólną tych zbiorów)

W jednej pętli ze sznurka dzieci gromadzą czerwone zabawki, a w drugiej misie. Okazuje się, że czerwony miś pasuje do jednej, jak i do drugiej kolekcji. Nauczyciel pomaga połączyć obie pętle, tak aby utworzyć część wspólną. W tej wspólnej części umieszczają czerwonego misia.

PRZEDSZKOLE I SZKOŁA

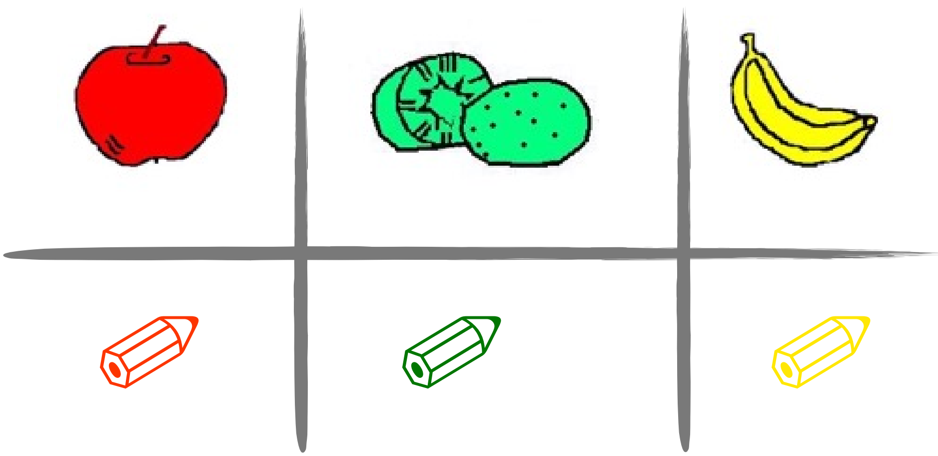
Tworzenie różnych kolekcji i szukanie powiązań między nimi

dzieci tworzą różne kolekcje z tych samych obiektów

Obiekty umieszczają na siatce, tak żeby łączyły się ze sobą danymi cechami w każdym rzędzie i w każdej kolumnie. W klasyfikowaniu obiektów z pomocą siatki stopniowo można zwiększać sieć, w której dzieci będą umieszczały klasyfikowane obiekty (łatwa jest siatka 3 okienka na 3 okienka, im więcej okienek, tym zadanie trudniejsze).

Nim dzieci zaczną klasyfikować warto zapytać, ile potrzebują obrazków, aby zapełnić wszystkie okienka.

Dzieci umieszczają obrazki (banan, żółta kredka, czerwone jabłko, czerwona kredka, zielone winogrona, zielona kredka) na siatce tak, żeby miały wspólną cechę w każdym rzędzie i w każdej kolumnie.
Wyjaśniają, dlaczego tak ułożyły obrazki.
Obrazki można ułożyć na przykład tak: w górnym rzędzie są owoce, w dolnym kredki, w pierwszej kolumnie żółte obiekty, w drugiej czerwone, a w trzeciej zielone[26].



[26] por. M. Hejny, J. Stazakova: Investigating Mathematical Reasoning and Decision Making in: Mathematical Understanding 5-11: A Practical Guide to Creative Communication in Primary Maths, A. Cockburn (red.), SAGE, Londyn 2007.

PRZEDSZKOLE I SZKOŁA

Posługiwanie się przy klasyfikowaniu symbolami kodującymi cechy obiektów

dzieci uczą się odczytywać i zapisywać cechy obiektów za pomocą prostych symboli.

Nauczyciel umawia się z dziećmi jak będą kodować różne cechy. Może zacząć od koloru. Pokazuje symbol, który oznacza kolor zielony ■. Dzieci wyjmują wszystkie zielone klocki. Pokazuje symbol, który oznacza kształt – koła ○, dzieci wyjmują teraz wszystkie klocki w kształcie koła. Pokazuje symbol, który oznacza wielkość – duży ↑, dzieci wyjmują wszystkie duże klocki. Potem zestawia cechy, dzieci wyszukują odpowiednie klocki, na przykład: ■ Δ (czerwone trójkątne),
↑ □ (małe kwadratowe).
Można też kodować inne cechy obiektów, na przykład szerokość, ciężar, smak.
Dzieci za pomocą kartoników z odpowiednimi symbolami same kodują cechy obiektów.
Dzieci posługują się negacjami cech, na przykład symbol $\cancel{■}$ oznacza wszystkie tylko nie zielone.
Symbol $\cancel{\Delta}$ oznacza wszystkie tylko nie trójkątne.
Kiedy dzieci nabiorą wprawy można łączyć ze sobą kilka cech, w tym negację.
Dzieci do pudełka wkładają wszystkie klocki, które są ○ $\cancel{■}$, czyli okrągłe i nie niebieskie.
Jakie klocki pozostały poza pudełkiem?
Oczywiście niebieskie, które nie są okrągłe.

PRZEDSZKOLE I SZKOŁA

Zmienianie cech obiektów według podanych zasad

dzieci uczą się definiować obiekty, które różnią się pewnymi cechami od innych obiektów, przy zachowaniu pozostałych cech

W parach dzieci bawią się w „fabrykę zmian".
Najpierw w fabryce zmienia się tylko kolor klocków.
Jedno dziecko wkłada do pudełka klocek, a drugie zamienia ten klocek na klocek w innym kolorze, zachowując jego kształt i wielkość.
W fabryce można zmieniać kształt klocków (przy zachowaniu koloru i wielkości), albo wielkość (przy zachowaniu koloru i kształtu).
Potem można zmieniać dwie cechy, na przykład wielkość i kolor (przy zachowaniu kształtu).

PRZEDSZKOLE I SZKOŁA

Szukanie relacji między klasami a liczebnościami

dzieci uczą się rozumienia relacji dodawania części i tworzenia całości oraz relacji odejmowania części od całości

Dzieci mają w pudełku drewniane czerwone i zielone klocki.
Jeżeli wyjmą wszystkie czerwone klocki, to czy w pudełku zostaną jakieś klocki? Sprawdzają.
Z powrotem wkładają czerwone klocki do pudełka. Jeżeli wyjmą wszystkie zielone klocki, to czy w pudełku zostaną jakieś klocki? Sprawdzają.
Z powrotem wkładają zielone klocki do pudełka. Jeżeli wyjmą z pudełka wszystkie drewniane klocki, to czy w pudełku zostaną jakieś klocki? Sprawdzają.
Z powrotem wkładają klocki do pudełka. Których klocków jest więcej w pudełku: czerwonych czy zielonych? Sprawdzają.
Których klocków jest więcej: drewnianych czy czerwonych? Sprawdzają[27].

2.2. Podstawowe rozumowania matematyczne rytmy, algorytmy i analogie

Jednym ze sposobów porządkowania rzeczywistości jest **rytm**. To wszelka regularna powtarzalność w czasie lub w przestrzeni. Dostrzeganie rytmu, jego odtwarzanie, kontynuowanie, przekładanie z jednej reprezentacji na drugą jest ważnym typem myślenia.

Rytm pozwala orientować się w czasie, dostrzegać czasowy wymiar wydarzeń, rozwijać progresywne rozumienie czasu, zwłaszcza świadomość, że istnieje seria wydarzeń występujących w porządku czasowym.

Rytmy są ważne w życiu człowieka. Regulują jego codzienne funkcjonowanie. Są to między innymi **rytmy biologiczne.** Najłatwiejszy do dostrzeżenia i dotyczący każdego człowieka jest rytm wyznaczany przez dni i noce oraz związane z nimi okresy snu i czuwania.

Małe dzieci rytmicznie powtarzają głoski i sylaby (ba ba ba ba …) z wyraźną przyjemnością. Taka mowa najczęściej nie służy porozumiewaniu się. Jest to mowa egocentryczna, w przeciwieństwie do mowy uspołecznionej, którą człowiek przekazuje swoje myśli czy informacje, zadaje pytania czy odpowiada na nie[28]. Wraz z rozwojem mowy powtarzanie sylab czy słów zastępują rymowanki, które także mają rytmiczną organizację. Przedszkolaki uwielbiają huśtać się na huśtawce czy bawić rytmicznie uderzając bębenek.

Dobre zrozumienie zasad porządku rytmicznego pomaga dziecku w zrozumieniu pojęć matematycznych, w tym pojęcia liczby naturalnej, operacji na liczbach, dziesiątkowego systemu pozycyjnego, systemu miar. Są one podstawą do zrozumienia w przyszłości tak skomplikowanych reguł jakimi są algorytmy, czy szerzej algebra.

Rytmicznie uporządkowana rzeczywistość pozwala przewidywać, co się wydarzy, co będzie dalej. Przewidywalność którą umożliwia rytmiczna organizacja daje dziecku **poczucie bezpieczeństwa**. Każdym rytmem rządzi zasada, sposób zorganizowania. Powtórzenia są fundamentem procesu uczenia się, im coś częściej i regularniej się powtarza, tym lepiej. Ma to także niebagatelne znaczenie dla procesów zapamiętywania.

Na to, że rytm reguluje też **proces uczenia się** zwraca uwagę Jerome Seymour Bruner. Człowiek w swoim otoczeniu rozpoznaje powtarzające się prawidłowości i reaguje na nie

27 por. J. Piaget: The Child's Conception of Number, W. W. Norton & Company, Nowy Jork 1965, rozdz. VII.
28 M. Karwowska-Struczyk: Rozmowa dzieci w wieku przedszkolnym, WSiP, Warszawa 1982, s. 48.

swoim działaniem[29]. Dostrzeżenie, a następnie zrozumienie tych zasad będzie niezwykle przydatne dla zrozumienia czym jest algorytm.

Algorytm jest schematem postępowania, ciągiem czynności (operacji), którego kolejne kroki są wykonalne i prowadzą do wyniku. Operacje w algorytmie są jednoznaczne. Na przykład algorytm dodawania pisemnego składa się z ciągu jednoznacznych operacji i w każdym przypadku daje taki sam wynik. Algorytmy są ważne, szeroko stosowane w matematyce. Przede wszystkim ułatwiają życie – wszystkie przepisy to algorytmy, zarówno te w kuchni jak i wszelkie inne procedury.

Nie można jednak w uczeniu matematyki ograniczać się do podawania uczniom gotowych algorytmów. Algorytm jest po to, by ułatwiać wykonywanie operacji matematycznych, jego stosowanie ma stać się rutyną. Jednak tylko wtedy ma on sens, gdy rzeczywiście będzie funkcjonował w działaniach ucznia, który będzie rozumiał jego istotę i znał jego zastosowanie. Jeżeli dziecku poda się algorytmy tylko w postaci reguł, to nie będą one funkcjonowały tak jak należy. W takiej sytuacji będzie mieszało różne algorytmy, na przykład będzie próbowało obliczyć pole trapezu stosując wzór na pole trójkąta. Z podobną ale równie nieskuteczną, bo nie opartą na rozumieniu działania algorytmu sytuacją możemy mieć do czynienia, kiedy to początkujący kucharz próbuje zastąpić proszek do pieczenia drożdżami, licząc na to, że otrzyma babkę drożdżową zamiast piaskowej. Niestety zmiana nie jest taka prosta i wymaga wiedzy albo nowego, innego algorytmu postępowania.

Algorytmy są automatyzmami, umożliwiają automatyzowanie czynności. Tak jak w przypadku każdego zautomatyzowania, będzie ono użyteczne jeżeli dziecko samo odkryje mechanizm. Chociaż jest to czasochłonne i pracochłonne, to się opłaca. Jeżeli potraktować algorytmy szerzej, pełnią one niezwykle ważną rolę w życiu człowieka. Począwszy od zasad ruchu drogowego, na rytuałach religijnych skończywszy. Reguły i zasady współżycia między ludźmi pozwalają funkcjonować w mniejszej lub większej społeczności, w jakiej większość ludzi spędza życie.

Analogia jest pewnym rodzajem ustalania podobieństwa. Obiekty podobne zgadzają się ze sobą pod pewnymi względami. Prostokąt jest analogiem prostopadłościanu. Relacje między bokami prostokąta są podobne do relacji między ścianami prostopadłościanu. Każdy bok prostokąta jest równoległy do jednego z boków i prostopadły do pozostałych boków :: każda ściana prostopadłościanu jest równoległa do jednej ze ścian i prostopadła do pozostałych ścian[30].

Współcześnie w logice analogia rozumiana jest jako związek, którego istotą jest podobieństwo relacji zachodzących między elementami obiektów, struktur lub układów. Z podobieństwa pewnych cech dwóch przedmiotów wnioskuje się o podobieństwie ich pozostałych cech. Często traktuje się analogię jako szczególny przypadek rozumowania indukcyjnego, czyli przebiegającego od szczegółu do ogółu[31].

Klasyczne rozumienie pojęcia analogii wiąże się z rozumieniem zasady równości dwóch proporcji a – b :: c – x, gdzie a, b, c to znane wyrazy proporcji, zaś x to wyraz nieznany:

dzień – noc :: biały – x

odpowiednio a będzie dniem, b – nocą, c – białym. Dzięki zastosowaniu analogii można ustalić x.

29 por. J. S. Bruner: Poza dostarczone informacje, PWN, Warszawa 1978.

30 G. Polya: Jak rozwiązać? PWN, Warszawa 1964, s. 61.

31 A. Jurkowski: Rozumowanie przez analogię u dzieci w wieku szkolnym, PWN 1967, s. 5.

Wykorzystując analogię do rozwiązania problemu trzeba dostrzec podobieństwo sytuacji problemowej do innej znanej sytuacji, której rozwiązanie już znamy. Uruchamiany proces myślowy polega na adaptowaniu znanego, stosowanego wcześniej schematu rozwiązania, w nowy, adekwatny do sytuacji sposób. Pierwszym etapem i warunkiem koniecznym pojawienia się wszystkich innych etapów wnioskowania przez analogię jest **dostrzeżenie związku analogii**. Żeby został rozpoznany związek analogii między obiektami lub zjawiskami trzeba przede wszystkim rozpoznać relacje między elementami danych obiektów lub między faktami danych zjawisk. Spostrzegamy dany obiekt lub zjawisko wyodrębniając pewne elementy lub fakty pozostające w pewnych relacjach. Proces identyfikowania relacji w dwu obiektach lub zjawiskach prowadzi do ustalenia podobieństwa – odpowiedniości. Jeśli określona relacja zostanie zidentyfikowana w jednym obiekcie, to powinna też zostać zidentyfikowana odpowiadająca jej podobna relacja w obrębie drugiego obiektu. To droga do tego by zastosować znane (wyuczone) rozwiązanie w nowej sytuacji. W podobny (analogiczny) sposób, dzieci które poznały wzory (algorytmy) na przykład na obliczenie pola powierzchni złożonej figury geometrycznej i zrozumiały go, będą potrafiły obliczyć pole powierzchni dowolnie skomplikowanej figury dzięki zastosowaniu analogii właśnie. To bardzo ważny, ale i bardzo trudny sposób myślenia, a jego początki można już obserwować w rozumowaniach dostępnych przedszkolakom takich jak: klasyfikowanie, rozumienie serii czy rytmów. W szkole, to właśnie zastosowanie algorytmów wymaga w największym stopniu umiejętności posługiwania się myśleniem przez analogię.

Analogią często posługujemy się w życiu codziennym, kiedy na przykład przewidujemy zachowania, czy przebieg zjawisk. Wnioskowanie to występuje w wielu sytuacjach życia zawodowego, społecznego, politycznego. Analogią posługujemy się w codziennej mowie, a też w literaturze, czy rozprawach naukowych[32]. Używamy często mglistych, niepełnych, niezupełnie określonych analogii. Ale analogia może mieć też matematyczną precyzję.

Wnioskowanie przez analogię dostarcza bardziej lub mniej prawdopodobnych przypuszczeń, które doświadczenie i ściślejsze rozumowanie potwierdzi lub nie.

W zadaniach na analogię dziecko uzupełnia brakujący, czwarty element, gdy znane są pozostałe elementy odpowiadających sobie par. W obrębie jednej z par znana jest **relacja**, której rozpoznanie ma zasadnicze znaczenie dla ustalenia tej relacji w drugiej parze a przez to ustalenie brakującego ogniwa.

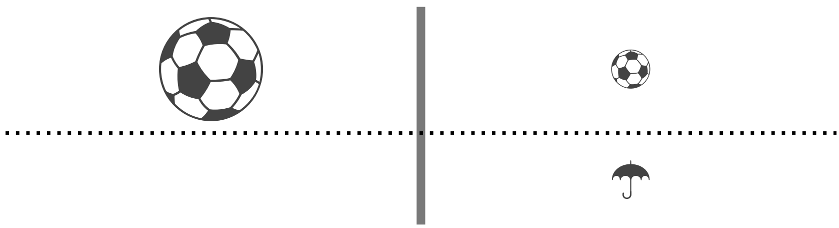
W PRZEDSZKOLU, W SZKOLE

Dzieci mają małą i dużą piłkę. Po jednej stronie linii kładą małą piłkę, a po drugiej dużą. Nauczyciel daje dzieciom: małego misia, dużego misia, mały samochód, dużą lalkę. Wskazuje na dwie strony linii i opisuje: Tutaj leży mała piłka. Tutaj leży duża piłka. Tutaj kładę małego misia (kładzie po tej samej stronie linii, po której leży mała piłka). Co będzie pasowało tutaj (wskazuje miejsce pod dużą piłką). Dlaczego?[33].

---

32 G. Polya: Jak rozwiązać? PWN, Warszawa 1964, s. 61 - 62.

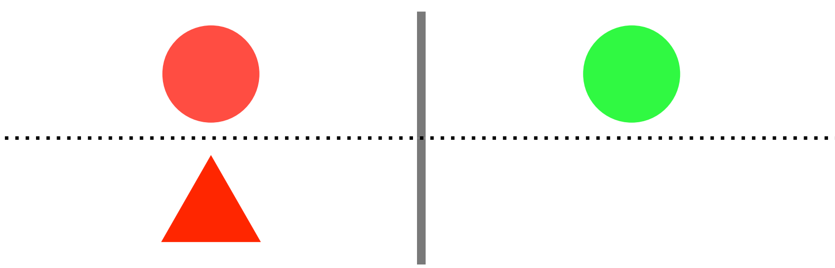
33 por. M. Skura, M. Lisicki (red.): Myślenie matematyczne. Zabawy i zadania dla młodszych przedszkolaków. Liczenie i rachowanie. Cechy wielkościowe i porównywanie wielkości. Myślenie przyczynowo-skutkowe i rozwiązywanie problemów, DR Josef Raabe Spółka Wydawnicza Sp. z o.o., Warszawa 2014, s. 39-40.



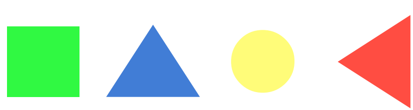
Który rysunek pasuje? Dlaczego?

Często w zadaniach na myślenie przez analogię dzieci mogą ustalić **nie jedną relację między obiektami, ale pewien ich zbiór.** Ustanowienie związku analogii polega na wskazaniu wybranej, jednej relacji, która będzie miała zastosowanie w drugiej parze obiektów.

W PRZEDSZKOLU, W SZKOLE
Dzieci mają czerwone koło i zielone koło.
Zielone kładą po jednej a czerwone po drugiej stronie linii.
Nauczyciel daje dzieciom: czerwony trójkąt, zielony kwadrat, żółte koło, niebieski trójkąt. Pod czerwonym kołem kładzie czerwony trójkąt i pyta się dzieci, co ma położyć pod zielonym kołem (pokazuje gdzie). Dlaczego?
W pierwszej parze elementy są podobne pod względem kształtu (to są koła) i koloru (zielone).
Dziecko po obejrzeniu elementów, które ma do dyspozycji wybiera cechę kolor, ignorując cechę kształt (czerwone koło – zielone koło :: czerwony trójkąt – zielony kwadrat).



Która figura pasuje? Dlaczego?



Uwzględniane relacje mają różny stopień trudności. Łatwą jest relacja przeciwieństwa, na przykład krótki – długi, mały – duży, ciężki – lekki, czy wysoki – niski. Wcześnie też dziecko jest w stanie ustalać relacje obiekt – cecha (na przykład trawa –zielona :: słonko – żółte) albo czynność – obiekt (na przykład zamiatać – szczotka :: prasować – żelazko). Znacznie trudniejsze dla dziecka będą relacje oparte na tożsamości (Polska – Polak :: Hiszpania – Hiszpan), na stopniowaniu (wysoki – wyższy :: niski – niższy), na stosunkach przestrzennych (na pudełku – na stole :: pod pudełkiem – pod stołem), na stosunkach czasowych (godzina – 60 minut :: kwadrans – 15 minut), czy przyczynowości (deszcz – kałuże :: śnieg – zaspy) albo nadrzędności (drzewo – dąb :: kwiat -– tulipan).[34]

Dziecko w wieku przedszkolnym, a także w młodszym wieku szkolnym, może nie być w stanie zrozumieć w pełni relacji w związku analogii. Dlatego nie potrafi precyzyjnie wyjaśnić, dlaczego jeden obiekt pasuje do drugiego. Zależy to w znacznym stopniu od liczby i rodzaju doświadczeń językowych. Sposób określania stosunków relacji i rozumienie zwrotów określających te relacje są u dzieci chwiejne[35]. Dopiero w **stadium operacji formalnych[36]** dziecko w mniejszym stopniu „działa na oślep", stara się odkryć ogólną zasadę danego typu zadania przez stawianie hipotez i ich weryfikację. Gdy zasada zostaje odkryta, dziecko może, poprzez dedukcję, ustalić ogólne warunki, jakim powinno odpowiadać rozwiązanie w danym typie zadań. Każde konkretne zadanie ujmuje jako szczególny przypadek ogólnego typu zadań[37]. **Uogólnienie** zjawia się często nagle, jest nieuchwytne, trudne do wysłowienia (przeżycie „aha!").

Przedszkolak przechodzi od jednej myśli do drugiej na zasadzie intuicyjnie ujmowanych powiązań. Analogia oznacza tu pierwotną formę rozumowania[38]. Najlepiej widać to w wyjaśnianiu przez dzieci w wieku przedszkolnym zjawisk przyrodniczych. Przypisują światu posiadanie „duszy", lalkom i innym przedmiotom żywotność. Nazywamy to **animizmem**. Tak zachowują się dzieci w wieku od 2 do nawet 6 lat. Dla dziecka w tym wieku wszystko na świecie jest przez kogoś wykonane lub wykonywane. Uważają, że ludzie są odpowiedzialni za wszystkie zdarzenia. Jest to **artyficjalizm**. Animizm i artyficjalizm wynikają z przenoszenia znanych stosunków z najbliższego otoczenia dziecka na nieznane stosunki panujące w przyrodzie[39]. Czyli tutaj też dopatrzeć się można analogii.

Rozumowanie przez analogię jest strukturą operacyjną, której występowanie obserwuje się od początku stadium operacji konkretnych. Jest tego samego rodzaju strukturą operacyjną co klasyfikacja i seriacja[40].

Dostrzeganie rytmów, opisywanie ich, kontynuowanie, uzupełnianie luk w rytmach daje podstawę do tego, by przewidywać ciągi pewnych operacji co jest podstawą zrozumienia czym jest **algorytm**.

Ułożenie obok siebie kilkunastu zielonych klocków i zapewnienie, że dalej klocki będą układane tak samo, pozwala przewidzieć jakiego koloru będzie na przykład 89 klocek. Jeżeli zasadą jest, że w każdym pudełku jest 12 czekoladek, to można być pewnym, że w czterdziestym drugim pudełku jest 12 czekoladek.

---

34 A. Jurkowski, Rozumowanie przez analogię u dzieci w wieku szkolnym, op. cit.
35 op. cit., s. 116-117.
36 Czyli według teorii J. Piageta od 12 – 13. roku życia.
37 A. Jurkowski, Rozumowanie przez analogię u dzieci w wieku szkolnym, PWN 1967.
38 op. cit., s. 33.
39 op. cit., s. 34.
40 op. cit., s. 46.

Pojęcia matematyczne mają charakter operatywny. Dzieci uczą się kodować i schematyzować, uczą się wykonywania łańcuchów operacji, które mają doprowadzić je do rozwiązania problemu. W rzędzie stoją kwadratowe stoły. Przy każdym stole siadają 4 osoby. Łatwo obliczyć, ile osób usiądzie przy 8 stołach. Wystarczy pomnożyć 8 razy 4. Wiadomo też, ile osób usiądzie przy 100 takich stołach – 100 razy 4, czyli 400. W tym przypadku działa algorytm a x 4, gdzie a oznacza liczbę stołów, natomiast 4 to liczba osób, które siedzą przy każdym stole.

Kwadratowe stoły są zsunięte. Sprawdzamy teraz, ile osób może usiąść, kiedy stoły ustawimy inaczej – zsuwamy wszystkie stoły „w jeden długi stół". Po dwóch stronach każdego stołu usiądą 2 osoby i na obu końcach są jeszcze dwa miejsca, dwie dodatkowe osoby. Jeżeli jest zsuniętych 8 stołów, to może przy nich usiąść 18 osób. Zgodnie z algorytmem **a x 2 + 2**, gdzie a oznacza liczbę stołów, **a x 2** to liczba osób, które usiądą po przeciwnych stronach stołów, natomiast **+ 2**, to dwie osoby, które usiądą jeszcze na końcach ciągu stołów.

Rytm składa się z ogniw. **Ogniwo** to powtarzająca się sekwencja elementów.
Jeżeli ogniwem rytmu jest układ elementów ☼☁☆,
to rytm prezentuje się następująco: ☼☁☆☼☁☆☼☁☆

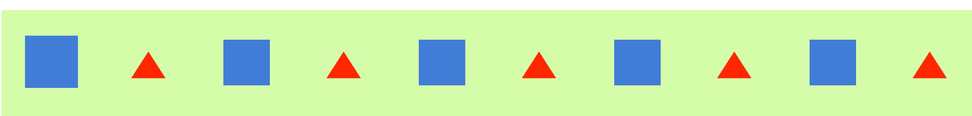
Rytm, który dziecko ma odtwarzać czy kontynuować powinien być ułożony z co najmniej trzech ogniw. Dopiero kilkukrotna prezentacja ogniwa gwarantuje, że dziecko dostrzeże rytmiczną organizację.

W różnych wymiarach można dostrzec regularności geometryczne:

- liniowym, czyli powtarzalność dotyczy sekwencji elementów ustawionych w szeregu (korale, kartoniki o różnych kształtach ustawione jeden obok drugiego);
- powierzchniowym, czyli powtarzalność dotyczy sekwencji elementów ułożonych na płaskiej powierzchni (mozaiki na podłodze, wzory na płytkach łazienkowych, rabatki kwiatów),
- przestrzennym, czyli powtarzalność dotyczy sekwencji elementów ustawionych w przestrzeni trójwymiarowej (rzędy krzeseł na widowni, uformowane żywopłoty)[41].

W PRZEDSZKOLU, W SZKOLE

Każdy rytm dzieci powinny opisać (przeczytać, tak jak widzą).
W różny sposób mogą opisać ten sam rytm, biorąc pod uwagę różne cechy: kolor lub wielkość albo też kształt.
Prezentowany rytm można opisać w taki sposób: niebieski, czerwony, niebieski, czerwony, niebieski, czerwony lub duży, mały, duży, mały, duży, mały lub też kwadrat, trójkąt, kwadrat, trójkąt, kwadrat, trójkąt. Warto pokazywać dzieciom różnorodność opisu tego samego rytmu.



[41] por. E. Swoboda: Przestrzeń, regularności geometryczne i kształty w uczeniu się i nauczaniu dzieci, Wydawnictwo Uniwersytetu Rzeszowskiego, Rzeszów 2006.

Rytmy mogą być **numeryczne** (tworzone przez liczby) i **nienumeryczne** (tworzone przez dźwięki, kolory, kształty, sekwencje ruchów itp.).

W rytmie o trudności stanowi:

- konstrukcja ogniwa: trudność rytmu zależy od tego, z ilu i jakich elementów ułożone jest jego ogniwo. Najłatwiejszy jest rytm o ogniwie A (czyli rytm AAA). Oto inne typy rytmów z uwzględnieniem narastania trudności

OGNIWO	RYTM
AB	AB AB AB AB
ABC	ABC ABC ABC
ABCD	ABCD ABCD ABCD
AAB	AAB AAB AAB
AABB	AABB AABB AABB
AABBCC	AABBCC AABBCC AABBCC

- tworzywo rytmu: rytm można widzieć, słyszeć lub odczuwać przez ruch ciała. Do rytmu który widać można w każdym momencie wrócić, nie trzeba go zapamiętywać. Zaś rytm z dźwięków czy z ruchów ciała jest ulotny, dostępny tylko wtedy, gdy jest podawany. Wynika z tego, że najłatwiejszy do opisywania, kontynuowania, przekładania z jednej reprezentacji na drugą jest rytm, który widać;
- kod w jakim rytm jest pokazany: trzeba znać i rozumieć kod, w którym prezentowany jest rytm. Jeśli osoba ma kłopot z odczytaniem kodu, to niemożliwe jest dostrzeżenie rytmu. Oto pewien rytm: . Żeby rozpoznać i kontynuować ten rytm, trzeba znać kod, czyli wiedzieć jakich krajów są te flagi oraz wiedzieć na jakich kontynentach leżą te kraje. A co to za rytm?

Doświadczenia (zadania) rozwijające

w zakresie dostrzegania, odtwarzania i kontynuowania rytmów

PRZEDSZKOLE
Odwzorowywanie rytmu, który widać
dzieci układają przedmioty tak samo jak nauczyciel, odczytują ułożony rytm

Dzieci odwzorowują rytm, który z pluszaków ułożył nauczyciel.

PRZEDSZKOLE
Kontynuowanie rytmu, który widać
dzieci układają przedmioty tak samo jak nauczyciel, układają dalej, czyli kontynuują rytm

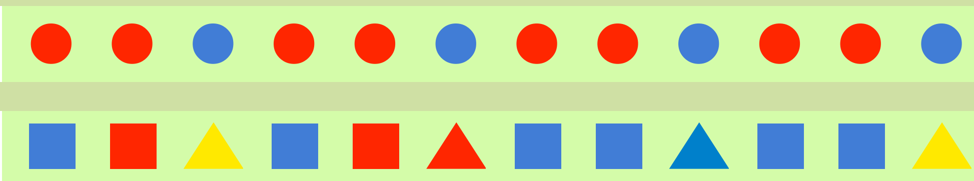
Dzieci odwzorowują, a potem kontynuują rytm, który z lalek i misiów ułożył nauczyciel.

PRZEDSZKOLE
Odtwarzanie i kontynuowanie rytmu, który słychać lub który można pokazać ruchem

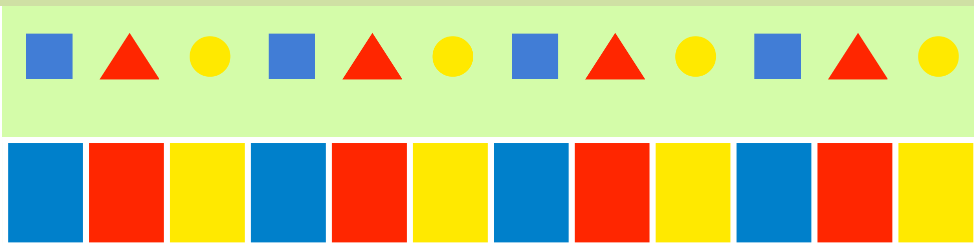
Dzieci odtwarzają i kontynuują rytm, który zagrał na bębenku nauczyciel.
Dzieci odtwarzają i kontynuują układ ruchów, który pokazał nauczyciel.

PRZEDSZKOLE I SZKOŁA
Przekładanie rytmu z jednej reprezentacji na inną
dzieci zamieniają obiekty, z których zbudowany jest rytm, zachowując przy tym jego konstrukcję

Nauczyciel układa rytm z kółek: .
Dzieci układają tak samo kółka, a potem zamieniają każde czerwone kółko na kwadrat, a każde niebieskie kółko na trójkąt



Nauczyciel układa z klocków w różnych kolorach prosty rytm.
Dzieci ten rytm kodują odpowiednimi kolorami na chodniczku[42].

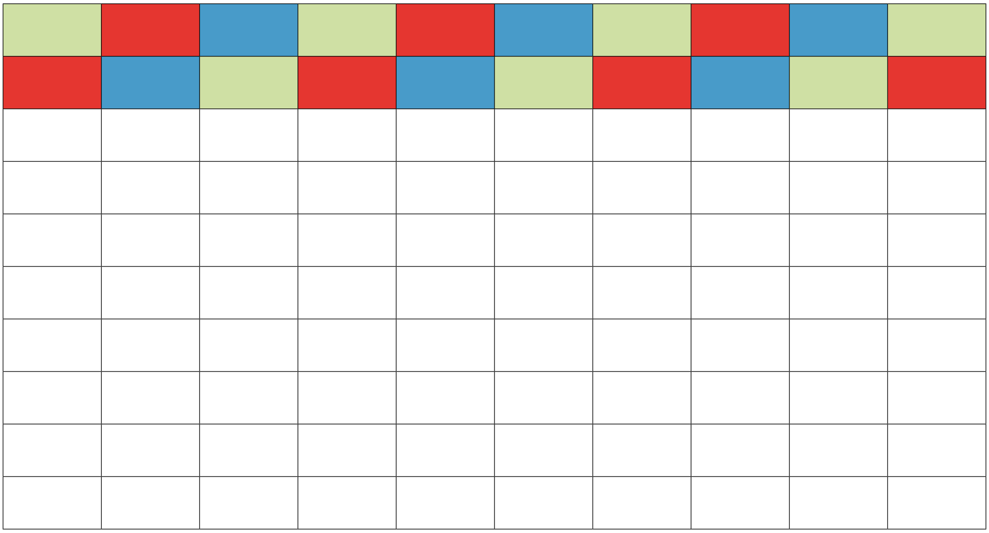


Nauczyciel układa rytm z klocków, dzieci wystukują ten rytm na bębenku.

PRZEDSZKOLE I SZKOŁA
Odtwarzanie i kontynuowanie rytmu na płaszczyźnie
dzieci uczą się dostrzegać regularności geometryczne na powierzchni

[42] por. M. Lisicki, M. Skura: Matematyka w działaniu. Metody wprowadzania pojęć matematycznych – scenariusze zajęć, WSiP, Warszawa 2015, rozdz. I.

Nauczyciel na siatce (na przykład 10x10) koloruje rytmicznie kolejne okienka (na przykład zielony, czerwony, niebieski).
Dzieci kolorują tak samo, a potem w ten sam sposób kolorują pozostałe okienka na siatce.
Nauczyciel może zapytać:
ile jest wszystkich czerwonych kwadratów?
Ile jest czerwonych kwadratów w jednym rzędzie?

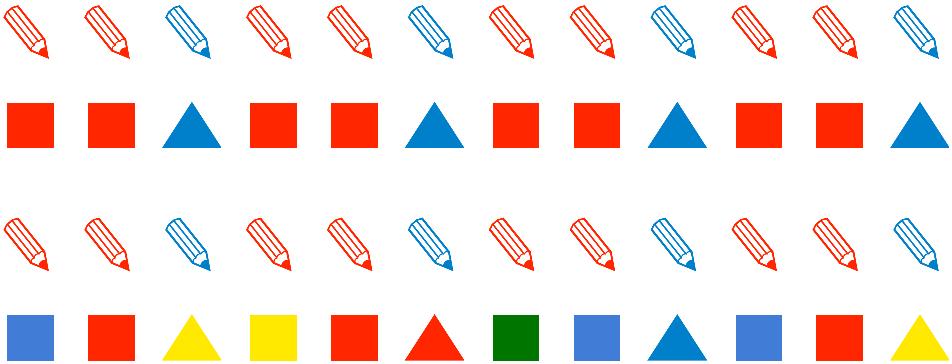


PRZEDSZKOLE I SZKOŁA
Uzupełnianie brakujących elementów rytmu
dzieci uczą się uzupełniać brakujące elementy rytmu. Przy tego typu zadaniach trzeba szczególnie pamiętać o stopniowaniu trudności. Układać rytmy zaczynając od tych najmniej skomplikowanych. Na początku nie należy tworzyć luk w pierwszym ogniwie rytmu

Nauczyciel układa z kasztanów, krążków i liści rytm.
Następnie usuwa z niego kilka elementów, tak żeby dzieci nie widziały, z których miejsc je zabrał.
Dzieci uzupełniają rytm.

PRZEDSZKOLE I SZKOŁA
Układanie rytmów o takiej samej strukturze
dzieci uczą się dostrzegać strukturę rytmu i na tej podstawie tworzyć rytmy analogiczne

Nauczyciel układa z kredek rytm.
Dzieci mają ułożyć podobny rytm z kartoników o różnym kształcie.

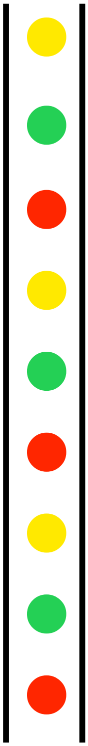


PRZEDSZKOLE I SZKOŁA
Układanie rytmów liniowych w różnych kierunkach
dzieci uczą się układać rytmy nie tylko od strony lewej do prawej (czyli w kierunku, w którym w naszej kulturze czyta się i pisze, a też zapisuje formuły matematyczne), ale też w różnych innych kierunkach. Uczą się, że istotę rytmu tworzy porządek ułożenia elementów, a nie kierunek ułożenia

Nauczyciel układa rytm: od prawej do lewej strony; od lewej do prawej;
z góry na dół; z dołu na górę.
Dzieci odtwarzają i kontynuują rytm.

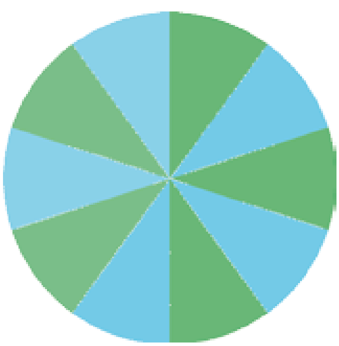
SZKOŁA
Korzystanie z zasad, które rządzą rytmem, po to by przewidywać porządek elementów
dzieci uczą się korzystać z właściwości rytmu

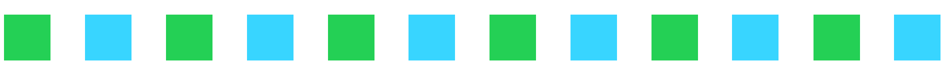
Dzieci mają klocki lub kolorowe kartoniki, a nauczyciel ma kulki i cylinder.
Nauczyciel układa przed sobą kulki w rytmie: czerwona, zielona, żółta, czerwona, zielona, żółta, czerwona, zielona, żółta.
Dzieci układają taki sam rytm ze swoich klocków lub kartoników.
Nauczyciel wrzuca po kolei kulki do cylindra. Pyta dzieci: Jakiego koloru kulka wypadnie pierwsza z cylindra? (pokazuje dno cylindra) Jaka będzie następna? A następna?
Jeżeli dzieci mają z tym kłopot, mogą skorzystać ze swoich klocków: kulki były ułożone kolorami w takiej kolejności, jak klocki.
Kiedy dzieci radzą sobie z tym zadaniem nauczyciel przekręca cylinder o 90 stopni.
Dzieci określają, jakiego koloru kulka wypadnie pierwsza z cylindra?
Jaka będzie następna? A następna?
Potem przekręca cylinder o 180 stopni, o 360 stopni, kilka razy o 360 stopni.



PRZEDSZKOLE I SZKOŁA
Dostrzeganie i kontynuowanie regularności w układzie cyklicznym
dzieci uczą się dostrzegać i korzystać z rytmu, którego elementy ułożone są po okręgu

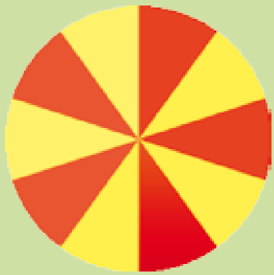
Nauczyciel siedzi z dziećmi w kręgu. Nauczyciel układa po okręgu kartoniki w dwóch kolorach, powstaje prosty rytm (ogniwo dwuelementowe)
Dzieci układają taki sam układ na przykład z kolorowych kartoników.





PRZEDSZKOLE I SZKOŁA
Dostrzeganie i kontynuowanie regularności w układzie cyklicznym
dzieci uczą się dostrzegać i korzystać z rytmu, którego elementy ułożone są po okręgu

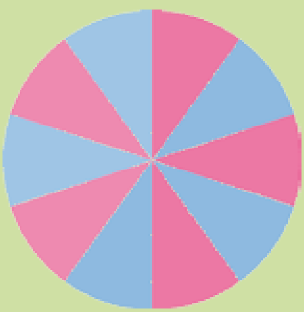
Nauczyciel rysuje na tablicy koło, które dzieli na części
Stopniowo wypełnia kolejne części koła, kolorami ułożonymi rytmicznie

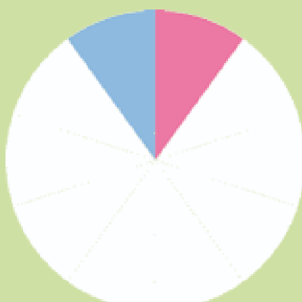


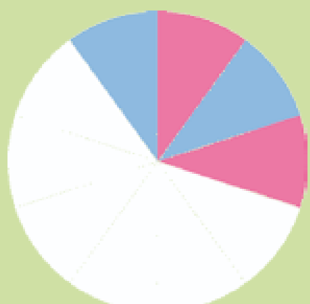
Dzieci mają podobnie przygotowane kartki, na których są podzielone koła; analogicznie je kolorują.

PRZEDSZKOLE I SZKOŁA
Dostrzeganie i kontynuowanie regularności w układzie cyklicznym
dzieci uczą się dostrzegać i korzystać z rytmu, którego elementy ułożone są po okręgu

Na tablicy wisi koło, którego części mają różne kolory ułożone w porządku rytmicznym.







Dzieci mają klocki w tych samych kolorach. Ustawiają klocki w takim samym porządku, jak pola na kole.
Nauczyciel zasłania koło tak, że widać tylko jedno ogniwo. Dzieci przewidują, jakiego koloru pole pokaże się, kiedy nauczyciel będzie odsłaniał kolejne pola.
Pokazują odpowiedni klocek.
Dzieci przewidują jaki kolor będzie następny? A jaki następny? I jeszcze następny?

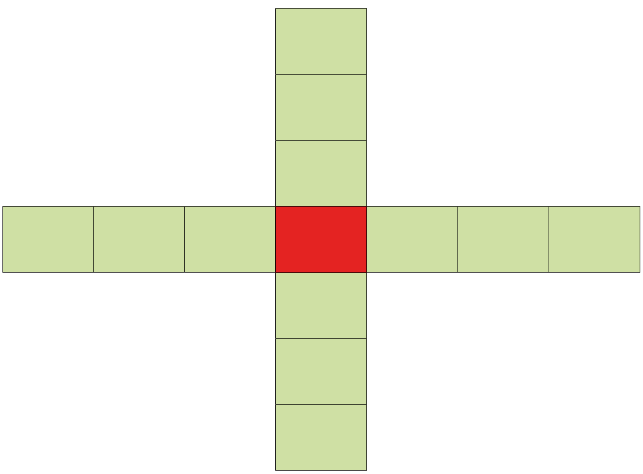
PRZEDSZKOLE I SZKOŁA
Układanie rytmów
dzieci samodzielnie tworzą własne rytmy. Warunkiem jest dobre zrozumienie istoty porządku rytmicznego

Dzieci z różnych przedmiotów układają dowolne rytmy

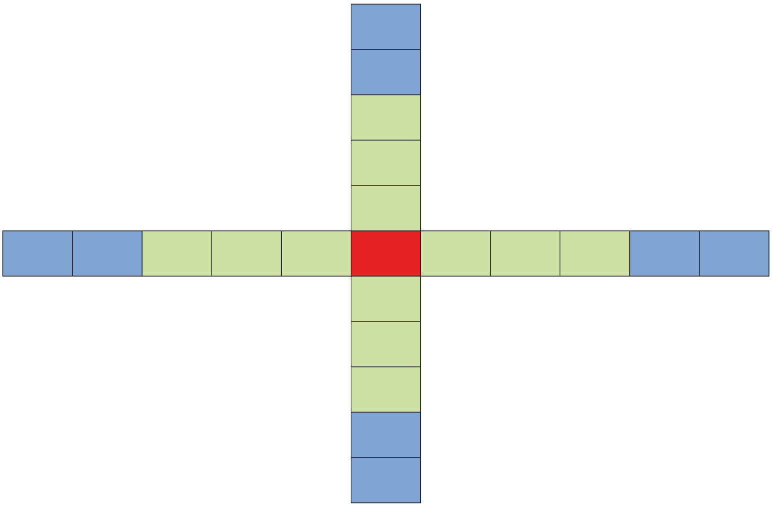
W szkole, gdy dzieci zdobędą doświadczenia i nabiorą pewnej wprawy w stosowaniu liczb naturalnych w różnych aspektach powinny też dostrzegać, rozpoznawać, opisywać, kontynuować, tworzyć i znajdować brakujące elementy w rytmach numerycznych lub symbolicznych. Ważne, żeby wyjaśniały reguły dla danego rytmu numerycznego lub symbolicznego i sprawdzały, czy reguła ta zawsze działa.

Zadania dotyczące rytmów bardzo dobrze obrazują związek pomiędzy tym czego uczą się dzieci w przedszkolu, a tym czego uczą się w dużo starszych klasach. Pokazują jak ważne są pierwsze doświadczenia, które wydają się tak mało matematyczne w porównaniu z „prawdziwą matematyką”. Poniżej kilka takich przykładów.

W przedszkolu
Dzieci układają z zielonych sześciennych klocków skrzyżowanie (znak dodawania). Klocek centralny jest wyróżniony innym kolorem – czerwonym. Obliczają, z ilu klocków zbudowane jest skrzyżowanie. Wydłużają skrzyżowanie z każdej strony i sprawdzają, jak zwiększyła się liczba klocków.



Nauczyciel z dziećmi opisuje sytuację: Z każdej strony skrzyżowania są 3 zielone klocki, a pośrodku jest 1 czerwony klocek. Razem jest 13 klocków. Teraz dokładają z każdej strony po dwa niebieskie klocki i sprawdzają z ilu klocków jest zbudowane skrzyżowanie. Pośrodku jest 1 czerwony klocek, każde ramię ma 5 klocków. Razem jest 21 klocków.



W klasach I - III

Dzieci układają z zielonych sześciennych klocków znak dodawania. Klocek centralny jest wyróżniony innym kolorem – czerwonym. Obliczają, z ilu klocków zbudowane jest znak dodawania. Wydłużają znak z każdej strony i sprawdzają, jak zwiększyła się liczba klocków.

Z każdej strony znaku są 3 zielone klocki, a pośrodku jest 1 czerwony klocek. Razem jest 13 klocków. Uczniowie mogą tę sytuację opisywać w różny sposób formułami matematycznymi. Na przykład:
3 + 3 + 3 + 3 = 12
12 + 1 = 13
co inaczej można zapisać: 4 x 3 = 12; 12 + 1 = 13

Mogą też obliczyć i zapisać inaczej:
3 + 3 = 6 (dwie długości ramienia)
6 + 1 = 7 (dodać centralny klocek)
7 + 3 + 3 = 13 (dodać dwie długości ramion)

Można jeszcze inaczej:
3 + 3 = 6 (dwie długości ramienia)
6 + 1 = 7 (dodać centralny klocek)
7 + 7 = 14 (podwoić długość ramienia)
14 - 1 = 13 (odjąć centralny klocek)

Dzieci z każdej strony znaku dodawania dokładają po 2 klocki i sprawdzają, jak zmieniła się liczba klocków. Mogą opisywać sytuację formułami matematycznymi.

Uczniowie mogą też informacje o długości ramienia i łącznej liczbie klocków zapisywać w tabeli. Na podstawie zależności między liczbami wnioskować o związkach długości ramienia z liczbą klocków.

długość ramienia	2	3	4	5	6	7
liczba klocków	9	13	17	21	25	29

Kiedy dzieci zrozumieją algorytm budowania znaku nauczyciel proponuje dowolną długość ramienia, a dzieci obliczają, ile klocków jest potrzebnych do zbudowania znaku.

W starszych klasach

Uczniowie sytuację „budowanie znaku dodawania“ mogą opisać wzorem:

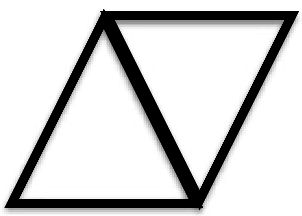
4 x a + 1

gdzie a to liczba klocków w jednym ramieniu znaku, „+ 1“ to klocek centralny.

CIĄG TRÓJKĄTÓW

W przedszkolu

Dzieci budują z patyczków ciągi z trójkątów. Obliczają, ile potrzebują patyczków, żeby zbudować ciąg z 2 trójkątów, z 3 trójkątów, z 4 trójkątów itd.



Nauczyciel z dziećmi opisuje sytuację: Jeden trójkąt zbudowany jest z 3 patyczków.

Dwa połączone trójkąty zbudowane są z 5 patyczków.

Trzy połączone trójkąty zbudowane są z 7 patyczków.

Dzieci dokładają kolejne patyczki i budują ciągi trójkątów.

Dzieci odliczają 17 patyczków i sprawdzają, ile da się z nich zbudować połączonych trójkątów.

Dzieci odliczają 20 patyczków i sprawdzają, ile da się z nich zbudować połączonych trójkątów.

W klasach I - III

Dzieci budują z patyczków ciągi z trójkątów. Obliczają, ile potrzebują patyczków, żeby zbudować ciąg z 2 trójkątów, z 3 trójkątów, z 4 trójkątów itd. Budują kolejne trójkąty i sprawdzają, jak zmienia się liczba patyczków.

Uczniowie mogą obliczać w dowolny sposób jaka liczba patyczków jest potrzebna i dowolnie to zapisywać. Ważne jest, żeby wyjaśniały co obliczają. Poniżej przykładowe obliczenia i ich wyjaśnienia:

- Aby znaleźć liczbę patyczków, trzeba policzyć 2 dla każdego trójkąta, a następnie dodać 1 do zamknięcia ostatniego trójkąta. Jeżeli ciąg zbudowany jest z 5 trójkątów, to można zapisać to tak 2 x 5 = 10 (2 razy liczba trójkątów) 10 + 1 = 11 (zamknięcie ostatniego trójkąta)
- Aby znaleźć liczbę patyczków, trzeba rozpocząć od 1 patyczka, a następnie dodać 2 patyczki dla każdego trójkąta. Jeśli ciąg zbudowany jest z 5 trójkątów, to można zapisać to tak 1 + (rozpocząć od 1 patyczka) 2 x 5, co daje 11 patyczków
- Aby znaleźć liczbę patyczków, trzeba pomnożyć liczbę trójkątów przez trzy, a następnie odjąć o jeden mniej od liczby trójkątów. Jeśli jest zbudowanych 5 trójkątów, można zapisać to tak 3 x 5 = 15 (3 razy liczba trójkątów) 15 – 4 = 11 (odjąć liczbę trójkątów pomniejszoną o 1)
- Aby znaleźć liczbę patyczków, trzeba rozpocząć od 3, a następnie dodać 2 dla każdego z pozostałych trójkątów. Jeśli jest zbudowanych 5 trójkątów, można zapisać to tak 3 + (zacząć od 3) 2 x 4 to razem 11

Uczniowie mogą też zapisywać dane w tabeli i na jej podstawie opisać zależności między liczbą trójkątów a liczbą patyczków.

liczba trójkątów	2	3	4	5	6	7
liczba patyczkow	5	7	9	11	13	15

Kiedy dzieci zrozumieją algorytm budowania ciągu trójkątów nauczyciel mówi dowolną liczbę trójkątów, a dzieci obliczają, ile patyczków jest potrzebnych do ich zbudowania.

W starszych klasach

Uczniowie sytuację – budowanie ciągu z połączonych trójkątów – mogą opisać wzorami:

P = 2 x T + 1
P = 1 + 2 x T
P = 3 x T - (T - 1)
P = 3 + 2 x (T - 1)
gdzie P to liczba patyczków, T to liczba trójkątów.

2.3. Podstawowe rozumowania matematyczne. Seriacje

Do posługiwania się liczbami naturalnymi w aspekcie kardynalnym i porządkowym istotne są dwa typy operacyjnego rozumowania: wnioskowanie o stałości liczby oraz radzenie sobie z układaniem obiektów w serie.

Dzieci uczą się porządkować obiekty według narastającej lub malejącej cechy, czyli układają obiekty w **serie.** Porządkują patyki od najdłuższego do najkrótszego, czy sadzają misie od najmniejszego do największego.

Radzenie sobie z seriami to przejaw **operacyjnego rozumowania** na poziomie konkretnym. Jest podstawą zrozumienia liczby naturalnej w aspekcie porządkowym oraz kardynalnym: każda kolejna liczba w uporządkowanym szeregu jest o 1 większa od liczby poprzedniej i o 1 mniejsza od następnej liczby .[43]

Dziecko bardzo wcześnie zbiera doświadczenia w tworzeniu serii i z tych doświadczeń uczy się korzystać. Małe dziecko nakłada na patyk krążki: najpierw największy, potem nieco mniejszy, i jeszcze mniejszy, a na końcu najmniejszy. Kiedy dziecko próbuje odtworzyć wieżę zbudowaną z coraz to większych klocków – zatrzymuje się, gdy pominąwszy właściwy klocek spostrzega, że w innym miejscu ten klocek nie pasuje. Wieża, którą widziało na początku była inaczej zbudowana. Zdejmuje klocki i próbuje ułożyć je inaczej. Posługuje się **metodą prób i błędów** – próbuje ułożyć tak jak zapamiętało, kiedy jest źle, to próbuje jeszcze raz. Podobnie z układaniem pudełek różnej wielkości jednego w drugim. Wkłada do dużego pudła mniejsze, a do niego jeszcze mniejsze i jeszcze mniejsze. Jak nie udaje mu się za pierwszym razem, próbuje kolejny raz.

W układaniu serii ważna jest **cecha**, według której porządkuje się obiekty. Najwcześniej dziecko porządkuje obiekty w serie w oparciu o długość czy wysokość, co jest o wiele łatwiejsze niż na podstawie powierzchni, objętości, czy wagi. Łatwiej jest też porównać wysokość przedmiotów niż ich długość. Kiedy przedmioty stoją, są stabilne, kiedy leżą można je przypadkiem przesunąć, a to utrudnia ich porównanie. Doświadczenia w porządkowaniu obiektów według długości (szerokości, wysokości) są możliwe dopiero wtedy, kiedy dziecko potrafi bezpośrednio porównać długości dwóch przedmiotów (czyli przez przyłożenie jednego przedmiotu do drugiego).

W PRZEDSZKOLU, W SZKOLE

Warto proponować dzieciom doświadczenia w porządkowaniu obiektów nie tylko według długości ale też według innych cech, na przykład: od najcięższego do najlżejszego, od najgłębszego do najpłytszego, od najjaśniejszego do najciemniejszego, od najładniejszego do najbrzydszego, od tego co się lubi do tego, czego się nie lubi czy od tego, co jest najbliżej do tego, co jest najdalej.

Zawsze trzeba brać pod uwagę umiejętność dziecka w posługiwaniu się miarami, jeżeli one są ważne w tworzeniu serii. Kiedy układa obiekty od najlżejszego do najcięższego, to musi umieć określić ciężar. Jeżeli różnica w ciężarze jest znacząca, to może ważyć w rękach „na oko", ale jeżeli nie można ustalić jej w ten sposób, to musi posłużyć się na przykład wagą szalkową. W sytuacji kiedy dziecko porządkuje obiekty według cech, typu kolor, czy **lubię/nie lubię**, to należy brać pod uwagę jego subiektywną ocenę. Może uporządkować przedmioty zupełnie inaczej, niż my byśmy to zrobili. Tworzenie serii według kryterium lubię/nie lubię jest zupełnie innej kategorii, to cechy nadawane subiektywnie, w przeciwieństwie do cech obiektywnych nie ma ich jak zmierzyć.

[43] A. Szemińska: Czynności kształtujące pojęcie liczby, w: Nauczanie początkowe matematyki, t. 1, Z. Semadeni (red.), WSiP, Warszawa 1981.

W PRZEDSZKOLU, W SZKOLE
Warto proponować dzieciom doświadczenia w porządkowaniu obiektów kiedy podstawowym kryterium są upodobania. Nauczyciel przygotowuje 5 kartek, każda w innym kolorze, różnice między kolorami powinny być wyraźne i jednoznaczne (na przykład: czerwona, zielona, pomarańczowa, niebieska i żółta). Wybrane dziecko tworzy serię: od tej, która jest w kolorze który najbardziej mu się podoba do tej która jest w kolorze, który podoba mu się najmniej. Czy są jeszcze jakieś dzieci, które ułożyłyby kartki podobnie?
Teraz inne dziecko może ułożyć kartki inaczej – zgodnie ze swoimi upodobaniami. Jak bardzo zmienił się układ kartek?

Początkowo dziecko porządkuje obiekty, które znacznie różnią się cechą braną pod uwagę. Wraz ze zdobywaniem doświadczeń trzeba zmniejszać różnice między obiektami, a też zwiększać liczbę porządkowanych obiektów. Łatwiej jest też porządkować obiekty w serie, kiedy cecha zmniejsza się lub zwiększa regularnie (na przykład dziecko porządkuje patyczki od najkrótszego do najdłuższego, a różnica między każdym patyczkiem w szeregu wynosi centymetr). Trudniej jest, kiedy cecha ta zmienia się nieregularnie (czyli różnica w długości porządkowanych patyczków nie zawsze wynosi 1 centymetr).

Łatwiej jest uporządkować obiekty, kiedy **zmienia się tylko cecha, według której dziecko tworzy serię**. Trudniej, gdy zmieniają się też inne cechy. Na przykład łatwiej jest uporządkować drewniane domki od najniższego do najwyższego, kiedy te domki mają tę samą szerokość, niż kiedy zmienia się też szerokość domków. W momencie kiedy dziecko będzie już radziło sobie z prostymi seriami można, a wręcz trzeba, dawać tego typu zadania, aby nauczyło się brać pod uwagę cechę, która teraz jest istotna, ignorując przy tym inne cechy.

Dziecko uczy się też **szukać miejsca obiektu** w uporządkowanej serii, wskazywać obiekt ostatni i pierwszy w serii. Na przykład dziecko układa koła od największego do najmniejszego. Kiedy wszystkie już uporządkuje w szeregu, umieszcza jeszcze jedno koło – musi znaleźć dla niego miejsce. Wskazuje dany obiekt oraz obiekty sąsiednie (przed i za danym obiektem). Koła w różnych kolorach uszeregowane są według wielkości. Dziecko określa w jakim kolorze jest pierwsze i ostatnie koło w szeregu. Wskazuje zielone koło i określa jakiego koloru koło jest tuż za nim w szeregu i tuż przed nim w szeregu. W tego typu zadaniach trudnością mogą być pojęcia z zakresu orientacji w przestrzeni: zapamiętanie kierunku w którym dziecko układało koła, a też posługiwanie się określeniami: za i przed.

Dziecko układa obiekty w serie jeden obok drugiego, a też w górę – jeden na drugim. Chodzi o to, żeby nauczyło się, że szeregowanie może odbywać się w różnych kierunkach – w szkole będzie umieszczało liczby na chodniczkach liczbowych, a potem na osiach liczbowych, które będą miały **różne kierunki**.

W PRZEDSZKOLU, W SZKOLE
Warto proponować dzieciom różnorodne doświadczenia kiedy to będą tworzyć najróżniejsze serie: ustawianie się od tego kto ma najmniej guzików, do tego kto ma ich najwięcej; od tego kto ma najbliżej do domu do tego kto ma najdalej, od tego kto ma najkrótsze włosy, do tego kto ma najdłuższe. Szczególnie ciekawe są doświadczenia, kiedy to miejsce w szeregu zmienia się wraz ze zmianą kryterium według którego seria została utworzona.

Doświadczenia z układaniem obiektów w serie przełożą się na umiejętność posługiwania się **liczbą naturalną w aspekcie porządkowym.** Dziecko ustawia i numeruje obiekty z różnych stron: od prawej do lewej, od lewej do prawej, z góry na dół i z dołu do góry. Określa miejsce obiektu w uporządkowanym szeregu. Wskazuje obiekt o danym numerze oraz obiekty sąsiednie, czyli o numerze o 1 większym i o 1 mniejszym.

Kiedy dzieci sprawnie już porządkują obiekty, a też dostały doświadczenia z seriami utworzonymi według różnych cech, można zaproponować im zadania na **samodzielne określanie według jakiej cechy**, ktoś uporządkował obiekty w serię. W tego typu sytuacjach dziecko musi znaleźć cechę wspólną wszystkich obiektów w serii, taką cechę która narasta lub maleje. Czasami dziecku może być trudno określić słowami, co to za cecha. A może się też zdarzyć, że dziecko zobaczy zupełnie inną cechę niż ta, którą miał na myśli dorosły.

Ważnym typem doświadczeń jest też **układanie tych samych obiektów w różne serie.** Dziecko porządkuje klocki o różnej długości i szerokości. Najpierw porządkuje je według długości – od najkrótszego do najdłuższego. Potem te same klocki porządkuje od najszerszego do najwęższego. Okazuje się, że niektóre klocki po zmianie cechy zmieniły miejsce w serii.

Dzieci układają w serie także zbiory obiektów od tego z najmniejszą do tego z największą liczbą obiektów (lub na odwrót). Na początku dzieci porządkują zbiory, które istotnie różnią się liczebnością (na przykład 1 obiekt, 4 obiekty, 9 obiektów). Im mniej zbiorów porządkują, tym zadanie łatwiejsze. Szczególnie ważne są doświadczenia z porządkowaniem zbiorów, których różnica w liczebności wynosi 1 (na przykład 3 obiekty, 4 obiekty, 5 obiektów). Są one podstawą do konstruowania kolejnych liczb naturalnych w aspekcie kardynalnym.

W PRZEDSZKOLU, W SZKOLE

Dzieci mają kartoniki z kropkami. Układają kartoniki od tego z najmniejszą liczbą kropek po ten z największą liczbą kropek. Dzieci budują z klocków wieże. Pierwszą z 1 klocka. Drugą z 1 klocka i dokładają jeszcze jeden klocek, czyli razem z 2 klocków. Trzecią z dwóch klocków i dokładają jeszcze jeden klocek, czyli razem z 3 kloców itd.

Tego typu doświadczenia są niezbędne do zrozumienia kluczowej zasady, według której tworzone są liczby naturalne. Każda kolejna liczba naturalna jest o 1 większa od poprzedniej: 5 to 4 i 1; 6 to 5 i 1; 7 to 6 i 1 itd.

Tego typu zadania mogą być bardzo trudne dla przedszkolaków. Wymagają dobrej umiejętności liczenia oraz porównywania liczebności zbiorów.

Doświadczenia (zadania) rozwijające

w zakresie tworzenia serii

PRZEDSZKOLE

Odwzorowywanie serii

nauczyciel porządkuje kilka obiektów w serię. Dzieci mają takie same obiekty i układają je w serię, tak jak nauczyciel. Dobrze, kiedy nauczyciel opisze, to co zrobił on i dzieci: Uporządkowaliśmy misie od największego do najmniejszego. Tu jest największy miś, a tutaj najmniejszy

Nauczyciel sadza misie: najpierw największego, potem nieco mniejszego na końcu najmniejszego. Dzieci sadzają swoje misie tak samo.

PRZEDSZKOLE
Porządkowanie obiektów w serie
dzieci porządkują obiekty w serie według cechy wskazanej przez nauczyciela

Dzieci bawią się zabawkami typu piramidki czy matrioszki.
Dzieci porządkują klocki od najdłuższego do najkrótszego.

PRZEDSZKOLE
Porządkowanie obiektów w serie według różnych cech
dzieci porządkują obiekty w serie według cechy wskazanej przez nauczyciela. Cechą tą nie jest długość czy wielkość

Porządkują: pluszowego misia, pomarańczę, kilogramowe opakowanie cukru od przedmiotu najcięższego do najlżejszego.
Porządkują kredki od najjaśniejszej do najciemniejszej.
Porządkują owoce od tego, który najbardziej lubią do tego, który najmniej lubią.
Porządkują obrazki pojazdów (rower, autobus, wyścigówka) od tego, który najszybciej jeździ do tego pojazdu który jeździ najwolniej.
Przed dziećmi stoją kręgle w różnych kolorach: najbliżej niebieski, dalej zielony, najdalej czerwony. Dzieci wymieniają kolory kręgli od tego, który stoi najbliżej nich do tego, który stoi najdalej od nich.

PRZEDSZKOLE
Porządkowanie obiektów w serie. Wskazywanie miejsca obiektu w serii
dzieci porządkują obiekty według cechy podanej przez nauczyciela, a potem szukają miejsca w serii dla dodatkowego obiektu

Dzieci ustawiają klocki od najniższego do najwyższego.
Potem dostają dodatkowy klocek i szukają miejsc dla niego w już uporządkowanej serii.

PRZEDSZKOLE
Porządkowanie obiektów w serie. Wskazywanie pierwszego i ostatniego obiektu w serii

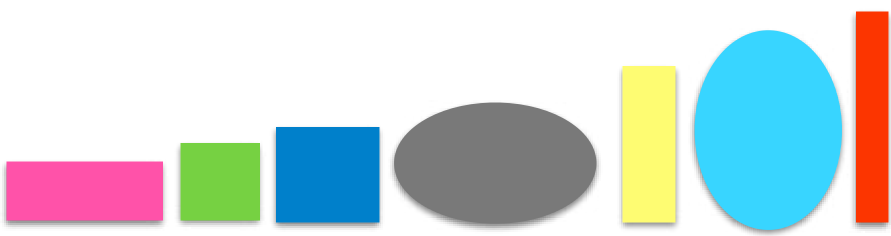
Dzieci ustawiają samochody jeden za drugim od najmniejszego do największego.
Wskazują pierwszy i ostatni samochód w serii.

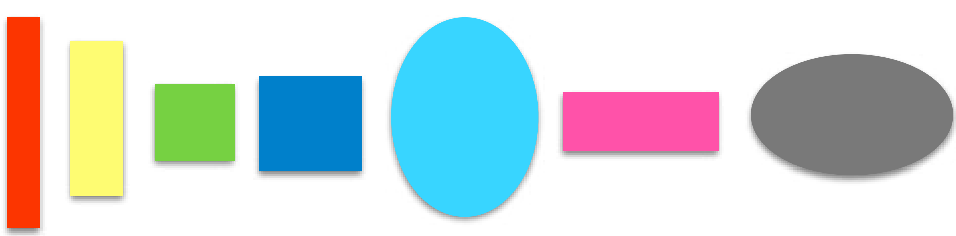
PRZEDSZKOLE
Porządkowanie obiektów w serie z uwzględnieniem różnych kierunków układania obiektów

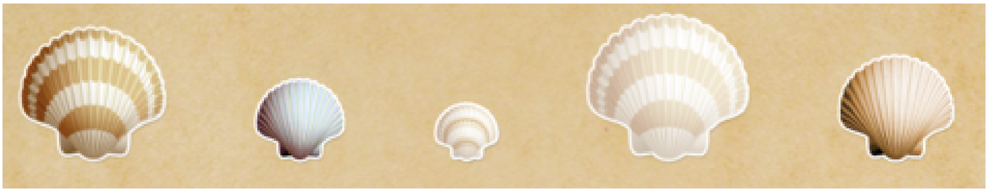
Dzieci sadzają misie od najmniejszego do największego od strony lewej do prawej.
Układają szaliki od najkrótszego do najdłuższego od prawej do lewej strony.
Ustawiają samochody jeden za drugim od najmniejszego do największego.
Ustawiają pudełka jedno na drugim – od największego do najmniejszego.
Układają koła różnej wielkości i w różnych kolorach od największego do najmniejszego.
W jakim kolorze koło położyły jako pierwsze? Jakie potem? A jakie na samym końcu?

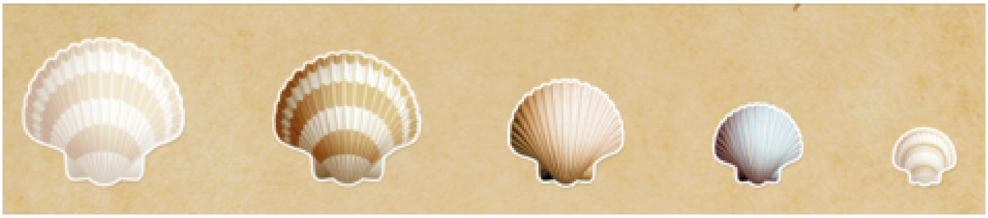
PRZEDSZKOLE I SZKOŁA
Porządkowanie tych samych obiektów w różne serie
dzieci uczą się porządkować obiekty według różnych narastających czy malejących cech. Uczą się dostrzegać wiele cech obiektów. Nabierają wprawy w porządkowaniu według wybranej cechy, z jednoczesnym ignorowaniem innych cech

Dzieci porządkują klocki od najkrótszego do najdłuższego, a potem te same klocki od najwęższego do najszerszego.









PRZEDSZKOLE I SZKOŁA
Tworzenie szeregu zbiorów
dzieci uczą się porządkować zbiory od tego z najmniejszą liczbą obiektów do tego z największą liczbą obiektów (lub odwrotnie)

Dzieci ustawiają z klocków wieżę: pierwszą z 1 klocka, drugą z 2 kloców, trzecią z 3 klocków itd. Wskazują wieżę zbudowaną z najmniejszej liczby klocków i z największej liczby klocków. Liczą, ile jest wież.

Dzieci porządkują pociągi od tego z najmniejszą liczbą wagoników do tego z największą liczbą wagoników. Wskazują pociąg z największą i najmniejszą liczbą wagoników.
Liczą pociągi.

Dzieci mają po 3 kubeczki, w których są kamyki (na przykład 1 kamyk, 4 kamyki, 9 kamyków). Dzieci porządkują kubeczki od tego z najmniejszą liczbą kamyków do tego z największą liczbą kamyków.
Ile kamyków jest w pierwszym kubeczku? Ile kamyków jest w ostatnim kubeczku?

Dzieci ustawiają 4 pudełka. Do pierwszego wkładają klocek. Do drugiego dwa klocki.
Do kolejnego trzy, a do ostatniego cztery.

Dzieci ustawiają 4 kartoniki. Na pierwszym układają 1 klocek.
Na drugim też układają 1 klocek i dokładają jeszcze jeden klocek. Ile jest klocków na tym kartoniku?
Na kolejnym układają 2 i dokładają jeszcze 1 klocek. Ile jest klocków?
Na ostatnim układają 3 i dokładają jeszcze 1. Ile jest klocków na ostatnim kartoniku?
Określają, ile jest klocków na kolejnych kartonikach.

2.4. Podstawowe rozumowania matematyczne. Stałość liczby, równoważność i transformacja

Dla zrozumienia **stałości liczby** czy **stałości miary** kluczowe jest powiązanie równoważności i transformacji**.** 9 słoni i 9 ślimaków, to tyle samo, bo można każdemu jednemu słoniowi przyporządkować jednego ślimaka. Chociaż słoń jest znacznie większy od ślimaka, to słoni i ślimaków jest po tyle samo. Dziecko uznaje, że liczba obiektów jest taka sama. Rozsuwamy ślimaki. Liczba obiektów nie zmienia się – można policzyć, żeby to sprawdzić. Zachodzi równoważność, bo chociaż zmieniono ustawienie obiektów, to jest ich po tyle samo. Uznać też trzeba transformację – można wrócić do wcześniejszego ułożenia rozsuniętych obiektów.

Dziecko ma dwa sznurki o tej samej długości – jeden jest czerwony, a drugi niebieski. Czerwony sznurek zawiązuje w kokardkę. Wydaje się, że jest on teraz krótszy od niebieskiego, ale uznając stałość długości wnioskuje, że zmienił się tylko kształt sznurka, a nie jego długość. Nadal oba sznurki są tej samej długości. To uznanie równoważności. Dziecko też jest przekonane o tym, że można kokardę rozwiązać i sznurek będzie wyglądał dokładnie tak samo jak na początku – to uznanie transformacji.

Zdaniem J. Piageta[44] małe dziecko, do 2. roku życia, poznaje świat głównie przez ruch i zmysły. Charakteryzuje się egocentryzmem poznawczym, co oznacza, że postrzega świat tylko z własnego punktu widzenia, nie potrafi spojrzeć z punktu widzenia innego człowieka. Pomiędzy 8 a 12 miesiącem życia zaczyna rozumieć **stałość obiektów** – obiekty nadal istnieją, nawet jeśli nie można ich zobaczyć. Kiedy dorosły przykrywa kocykiem misia, dziecko dobrze wie, że miś się schował i wystarczy podnieść kocyk, żeby znowu się pojawił. To bardzo duże osiągnięcie rozwojowe. W kolejnych miesiącach życia odkrywa nowe możliwości obiektów, eksperymentuje z różnymi przedmiotami. Sprawdza, co się dzieje, kiedy zabawkę daleko się rzuci, jak można najwyżej wejść po meblach, czy da się utopić klocek, jak głośno trzaskają drzwi itd.

Dzieciom w przedszkolu trzeba dawać wiele okazji do obserwowania i doświadczania zarówno zmian odwracalnych, jak i nieodwracalnych, czy częściowo odwracalnych.

Na czas przedszkola przypada okres **myślenia przedoperacyjnego**. Wtedy to intensywnie rozwija się mowa dziecka, zaczyna też powoli korzystać z różnych symboli. Poznaje świat głównie za pomocą swojego działania, a czynności konkretnych nie cechuje jeszcze odwracalność. Przedszkolak nabiera do żółtego wiaderka piasek. Potem cały piasek przesypuje do większego czerwonego wiaderka. Zapytane o to, czy teraz piasku jest więcej czy mniej, a może tyle samo co w żółtym wiaderku, pewnie odpowiada, że mniej. Dlaczego mniej? Bo widać. Nie potrafi wnioskować o odwracalności – przecież z czerwonego wiaderka można przesypać piasek z powrotem do żółtego.

W okresie wczesnoszkolnym dziecko zaczyna rozumieć sens przekształceń. W rozumowaniach kieruje się zasadą niezmienności (stałości), a czynności zaczyna cechować odwracalność. Nadal jednak jego rozumowania oparte są na czynnościach fizycznych wykonywanych na przedmiotach. To okres kształtowania się **myślenia operacyjnego na poziomie konkretnym**. Dziecko działa na przedmiotach. Dostrzega relacje, rozumie je i wyjaśnia. Porządkuje obiekty na różne sposoby – według jakieś cechy (lub cech), według

[44] J. Piaget, B. Inhelder: Psychologia dziecka, op. cit., s. 26-30; J. Piaget: Studia z psychologii dziecka, PWN, Warszawa 1966, s. 14-43.

porządku rytmicznego, czy układając w serie, czyli według narastania lub zmniejszania się jakieś cechy. Jest w stanie zwrócić uwagę na przyczyny i skutki konkretnych działań. Poprzez powtarzanie takich działań, ze zmianami lub w różnych kontekstach i na różnego rodzaju obiektach, dziecko uczy się uogólniać.

Początkowo każde działanie matematyczne wykonywane przez dziecko dokonuje się w świecie fizycznym. Później nie musi już działać w oparciu o realne przedmioty, może wykonywać czynności w swoim umyśle.

Zinterioryzowane (uwewnętrznione) czynności to **operacje umysłowe**. W przedszkolu dziecko dodaje na przedmiotach. Po wielu ćwiczeniach tego typu konstruuje pewien schemat postępowania, który obowiązuje podczas dodawania liczb. Schemat ten stopniowo doskonali, utrwala, poszerza o nowe spostrzeżenia. Łączy różne schematy i tworzy strukturę poznawczą. Początkowo schematy są widoczne w czynnościach dziecka wykonywanych na realnych przedmiotach, po pewnym czasie dziecko odtwarza schemat postępowania w umyśle – wtedy to umiejętność dodawania zostaje zinterioryzowana. Na polecenie obliczenia wyniku dodawania uczeń odwołuje się do posiadanego schematu (asymilacja[45]) i podaje wynik obliczeń. Tak się dzieje aż do nowej dla siebie sytuacji, na przykład do zajęć, na których po raz pierwszy pojawią się tak zwane „działania z okienkiem"[46]. Posiadany przez dziecko schemat dodawania liczb nie pasuje do nowej sytuacji. Następuje zaburzenie równowagi między tym, czego się od niego oczekuje a tym, co posiada. Musi zmodyfikować swój system działania, aby dopasować do nowej sytuacji (akomodacja[47]). Kiedy to nastąpi, to dochodzi do zrównoważenia struktur poznawczych, ale jest to możliwe tylko wówczas, gdy operacje umysłowe są odwracalne.

Kompetencje małych dzieci w zakresie rozumowania są większe, niż powszechnie się o tym sądzi.

Na podstawie wielu różnych badań prowadzonych w nurcie postpiagetowskim, wydaje się, że kompetencje małych dzieci w zakresie rozumowania są większe, niż zakładał to Piaget[48]. Znacznie wcześniej, niż myślał Piaget, dzieci rozumieją pojęcie stałości przedmiotów, fizyczne właściwości przedmiotów znajdujących się poza zasięgiem ich wzroku, znaczenie symboli, potrafią także przyjjmować punkt widzenia innych i są zdolne do empatii[49].

Na badania J. Piageta można też spojrzeć w kontekście badań prowadzonych przez Stanislas'a Dehaene'a.[50] Zdaniem tego badacza dzieci rodzą się ze **zmysłem liczby**[51]. Brak

[45] **Asymilacja** zdaniem Piageta to dopasowanie istniejących obiektów świata zewnętrznego do istniejących już schematów. Nie zmienia schematu, ale rozbudowuje. W zetknięciu z nowym bodźcem dziecko stara się go zasymilować do istniejących schematów. J. Piaget: Studia z psychologii dziecka, op. cit., s.103.

[46] Są to równania jednodziałaniowe o niewiadomej w postaci okienka, na przykład 3 + … = 5.

[47] **Akomodacja** zdaniem Piageta to taka modyfikacja posiadanych schematów, która dopasowuje je do świata zewnętrznego. Jeżeli bodźca nie można zasymilować do istniejącego schematu (nie ma schematu do którego pasuje), dziecko tworzy nowy schemat, w którym nowy bodziec znajdzie miejsce lub też modyfikuje istniejący schemat. J. Piaget: Studia z psychologii dziecka, op. cit., s. 103.

[48] Piaget badał rozumowania dzieci używając do tego zadań diagnostycznych. Zdaniem S. Thornton nie były to zbyt trafne narzędzia diagnostyczne. Na przykład Piaget nie używał w zadaniach sytuacji znanych dzieciom, gdyż chciał uniknąć wpływu uczenia się z doświadczenia. To mogło znacznie utrudniać rozwiązywanie problemów. por. S. Thornton: Growing Minds, Palgrave Macmillan, Basingstoke, 2002.

[49] por. C. Tarvis, C. Wade: Psychologia. Podejścia oraz koncepcje, Zysk i S-ka, Poznań 1999.

[50] por. S. Dehaene: The Number Sense: How the Mind Creates Mathematics, Revised and Updated Edition, Oxford University Press, Nowy Jork 2011.

[51] Więcej o tym w rozdziale 3.1 Liczba naturalna – wynalezienie liczb.

tego zmysłu może spowodować w przyszłości trudności w uczeniu się arytmetyki. Ludzie, a także szczury, gołębie, szopy i szympansy mają wrodzone wyczucie liczebności. Ten kierunek badań stoi w poprzek myślom Piageta, który uważał, że niemowlęta nie mają żadnych możliwości posługiwania się liczbami. Jego zdaniem dzieci najpierw muszą skonstruować podstawowe pojęcie liczby, co osiągają w ciągu kilku lat manipulowania klockami, kasztanami czy innymi obiektami. W końcu zaczynają rozumieć, że zmiana położenia klocków na stole, nie zmienia ich liczby (stałość liczby). Jak widać J. Piaget w wielu miejscach mylił się w swoich koncepcjach. Budowanie rozumienia liczb rozpoczyna się dużo wcześniej niż zakładał. Między innymi z tego powodu proponujemy by liczby pojawiały się w przedszkolu tak szybko. Nie chodzi o to by oczekiwać od dzieci biegłości w posługiwaniu się nimi. Trudność postrzegamy w zrozumieniu jej abstrakcyjnego charakteru. Jeżeli od początku liczby będą reprezentowane w realnym świecie, który otacza dziecko, będzie ono mogło zbierać doświadczenia niezbędne do tego by pojęcie liczby wyabstrahować[52].

Nim dziecko uogólni zasadę wnioskowania o stałości liczby, będzie stosowało ją do obiektów dobrze sobie znanych, które zaspakajają jakieś jego potrzeby[53].

Piaget badał rozumowania dzieci korzystając z eksperymentów diagnostycznych. Były to specjalnie zaaranżowane sytuacje, w których obserwował dziecko. W zależności jak dziecko zachowało się w danej sytuacji, Piaget wnioskował o jego poziomie rozwoju operacyjnego. Pojawia się coraz więcej zarzutów kierowanych pod adresem takiego sposobu badania. Na przykład do badań operacyjnego rozumowania w zakresie wnioskowania o stałości liczby Piaget używał krążków małych i dużych. Francuscy badacze Jacques Mehlera i Emmanuel Dupoux[54] zamienili krążki na łakocie, co znacząco wpłynęło na wyniki eksperymentu. W ich zadaniach pojawiły się czekoladki. Zaproponowali dzieciom zjedzenie wszystkich czekoladek znajdujących się w jednym z dowolnie wybranych rzędów. Okazało się, że z reguły dzieci wybierały rząd krótszy, lecz zawierający większą liczbę czekoladek. Mając do czynienia z czekoladkami dziecko chciało po prostu uzyskać jak największą korzyść dla siebie. Dlatego też odpowiadając na pytania nie popełniało błędów. Francuscy badacze uważają, że w eksperymentach Piageta dzieci udzielały takich odpowiedzi, jakich od nich oczekiwał dorosły.

Dorosły gestem, zdziwieniem lub pytaniem może zwrócić uwagę dziecka na to, co w zmianie jest ważne.

Na problem zadań diagnostycznych zwracała uwagę też Margaret Donaldson – czasami wystarczy zmienić stosowane w zadaniach sformułowania aby wywołać zmiany w myśleniu dziecka i doprowadzić do poprawnego rozwiązania[55]. Kiedy dziecko interpretuje to, co do niego mówimy, pozostaje pod wpływem co najmniej trzech czynników i różnych zachodzących między nimi interakcji:

- swojej wiedzy, zasobu posiadanego słownika;
- swojej oceny tego, jakie są intencje dorosłego, sygnalizowane przez niewerbalne zachowania;
- sposobu, w jaki rozwiązałoby problem, gdyby dorosłego tam nie było[56].

[52] Więcej o zagadnieniach związanych z pojęciem liczby naturalnej w części 3.

[53] Porównaj z eksperymentem opisanym poniżej.

[54] J. Mehler, E. Dupoux: What Infants Know. The new cognitive science of early development., Wiley-Blackwell, Cambridge 1994, rozdz. III i IV.

[55] M. Donaldson: Myślenie dzieci, Wiedza Powszechna, Warszawa 1986, s. 54-55.

[56] op. cit. s. 88.

Z tej analizy wynika, że przebudowie powinno ulec myślenie na temat **intencji przyświecających proponowanym dzieciom zadaniom**. Na przykład zadania mające na celu konstruowanie pojęcia stałości liczby powinny dążyć do uogólnienia tego pojęcia. Dokona się to na gruncie wielu różnorodnych powtórzeń.

Przez wiele jednakowych jakościowo, choć różnorodnych pod względem formy doświadczeń, powinno się dążyć do uogólnienia i nabrania przez dziecko przekonania, że konstruowana zasada jest uniwersalna. Dziecko uczy się też, co w tej zasadzie jest istotne, a co zależy od okoliczności. Stałość liczby dotyczy zarówno krążków, czekoladek jak i słoni, czy ciężarówek. Dziecko będzie przekonane, że liczebność nie zmienia się, jeżeli obiekty są tylko przestawiane. Nawet wtedy kiedy wydaje się, że jest inaczej, gdy ktoś będzie je przekonywał, że jest inaczej lub będzie w to wątpił.

W PRZEDSZKOLU, W SZKOLE

Nie warto przekonywać dziecka, że obiektów po zmianie jest tyle samo.
Ma samo to wywnioskować na podstawie własnych doświadczeń.
Dobrze, żeby dziecko uzasadniało swoje sądy na temat liczebności zbioru, czyli trzeba zadawać pytanie: Dlaczego tak myślisz?
Dziecko powinno samo sprawdzać, czy ma rację. Powinno samo liczyć i sprawdzać, ile jest.
Jeżeli przy wprowadzaniu zmian w układzie obiektów w jednym z dwóch równolicznych zbiorów i ponownym wnioskowaniu o równoliczności tych zbiorów, dziecko nie potrafi wnioskować o stałości liczby, może powrócić do sytuacji wyjściowej[57].
W zadaniach na stałość liczby trzeba stosować taką liczbę obiektów, żeby dziecko nie mogło policzyć wzrokiem – chodzi bowiem o to, żeby po każdej zmianie wnioskowało o liczbie obiektów, a nie po prostu wzrokiem je policzyło.
Przy wnioskowaniu o stałości liczby obiektów w zbiorze po dodaniu i odjęciu takiej samej liczby obiektów, najpierw dziecko dodaje i zabiera (lub zabiera a potem dodaje) te same obiekty, a potem mogą być to inne obiekty (obiekty wprawdzie zmieniły się, ale ich liczba nie zmieniła się).

Uznawanie stałość liczby oznacza, że dziecko jest w stanie wnioskować o tym, że liczebność zbioru nie zmieniła się, pomimo zmiany ułożenia obiektów. Czyli myślenie dziecka nie jest już zdominowane przez właściwości percepcyjne i nie jest go łatwo zwieść poprzez zmiany wyglądu. Ten etap Piaget nazywa operacyjnym myśleniem na poziomie konkretnym. W okresie kiedy dziecko przechodzi na kolejny etap wielokrotnie przelicza obiekty, żeby ustalić, ile ich jest, bo nie jest pewne swoich sądów. Nawet w sytuacji, gdy widzi, że niczego nie dodano, nie ujęto, tylko zmieniono ułożenie[58]. Wcześniej jeszcze wysnuwa wniosek, że tego jest więcej, co „wygląda” na więcej (zajmuje większą powierzch-

[57] W opisie zadania z pieskami i miseczkami (Doświadczenia /zadania) rozwijające w zakresie uznawania stałości liczby) – dziecko układa miseczki jedną na drugiej, jeżeli ma wątpliwości o równoliczności piesków i miseczek może z powrotem postawić miseczkę przed każdym pieskiem.
[58] Ten poziom Piaget nazywa **poziomem przejściowym.**

nię)[59]. Dziecko będzie wnioskowało o stałości liczby, jeżeli ocenę wzrokową zajmie operacja umysłowa (nie dodano, nie odjęto, musi być tyle samo)[60].

W zakresie wnioskowania o stałości liczby dziecko niekoniecznie musi określać ile jest obiektów, wystarczy, że nabierze pewności, że obiektów jest po zmianie tyle samo.

Wnioskowanie o stałości liczby jest podstawą do posługiwania się **aspektem kardynalnym** liczby naturalnej. Może być siedem różnych obiektów: 7 krów, 7 kotów, 7 samochodów, 7 koralików, czy 7 kropek. Wszystkich obiektów jest po tyle samo, po siedem, mimo że zajmują więcej lub mniej miejsca, inaczej wyglądają. Jest tyle samo krów i kropek, mimo że ocena wzrokowa może sugerować inaczej. Dziecko odlicza 15 klocków. Wie, ile ich ma. Rozrzuca je po stole, a potem wszystkie klocki chowa do pustego pudełka. Bez liczenia wie, ile w pudełku jest klocków – piętnaście. Mimo że zajmują w pudełku mniej miejsca niż na stole.

Ustalanie **podobieństw i różnic to** podstawowe procesy poznawcze szczególnie ważne w rozwijaniu myślenia matematycznego. Znalezienie takich samych cech (podobieństwo) prowadzi do ustalenia **równoważności**: to i to jest takie samo. Zaś znalezienie różnic prowadzi do ustalenia **transformacji**: w jaki sposób trzeba to zmienić, żeby było takie samo. Równoważność zachodzi wtedy, gdy da się rozpoznać w jakiś matematyczny sposób takie same liczby, kształty. Transformacja zachodzi zaś wtedy, gdy określa się różnice pomiędzy liczbami czy kształtami i to, co należy zrobić, aby jedną liczbę zamienić w drugą czy z jednego kształtu zrobić inny. Mamy liczbę 2 i liczbę 6. Te liczby nie są takie same, liczba 2 jest mniejsza od liczby 6. Żeby liczby były równoważne (takie same) trzeba: do 2 dodać 4 lub 2 pomnożyć przez 3, albo też od 6 odjąć 4 lub też 6 podzielić przez 3 – wszystkie te działania są transformacjami. W ten sposób uzyskamy liczby równoważne (liczby 2 lub 6)[61].

Powszechnym procesem w uczeniu się przez dzieci matematyki jest szukanie podobieństw i ustalanie równoważności. To ważna część procesu konstruowania pojęć matematycznych i narzędzie do posługiwania się tymi pojęciami. We wczesnych etapach poznawania liczb dzieci uczą się rozpoznawać, że czegoś jest po tyle samo, na przykład 5 dzieci i 5 misiów. Te dwa zbiory różnią się od siebie, bo misie różnią się od dzieci, ale coś jest takiego samego między nimi – do każdego misia można dopasować dziecko (zasada jeden do jednego). Oba zbiory można opisać liczebnikiem „pięć". Tworząc taką równoważność dzieci poznają pojęcie liczby naturalnej.

Jeszcze jeden przykład. Poznając pojęcie „kwadrat", dzieci segregują kartoniki o różnych kształtach na różne sposoby. Wszystkie kwadraty umieszczają razem, bo wszystkie one mają ten sam kształt. Kształty te nie są jednak takie same pod względem innych cech – mogą się różnić kolorem, grubością czy wielkością. Jednak mają wszystkie właściwości (atrybuty), które czynią je kwadratami. Są one równoważne[62].

Dziecko uczy się uznawać, że pojęcia są takie same pod względem pewnych cech, a jednocześnie różne pod względem innych cech. Szukając podobieństw między pojęciami często trzeba zignorować, że mają one też cechy różniące je. Biorąc zaś pod uwagę różnice między pojęciami koncentrujemy się na procesie transformacji. Określamy, co trzeba zrobić, aby jedno pojęcie zamienić na inne. Poznając pojęcia matematyczne czasami sku-

59 Ten poziom Piaget nazywa **poziomem przedoperacyjnym**.

60 J. Piaget: Studia z psychologii dziecka, op. cit., s. 58-59.

61 D.Haylock: Mathematics Explained for Primary Teachers, op. cit., s. 25.

62 op. cit. s. 26.

piamy się na równoważności, a czasami na transformacji. Na przykład dwaj przedszkolacy mają takie same czekolady. Jeden z nich dzieli swoją czekoladę na połowy i zjada połowę (zjada 1/2 czekolady). Drugi dzieli czekoladę na 8 równych części i zjada 4 z nich (zjada 4/8 czekolady). Części zjedzonej czekolady nie były identyczne – inaczej wygląda czekolada podzielona na dwie części, a inaczej podzielona na 8 części. Ale jest w tej sytuacji coś takiego samego – przedszkolaki zjadły po tyle samo czekolady. Kiedy patrzymy na ilość zjedzonej czekolady, to stawiamy na równoważność. Ale kiedy patrzymy na zamianę 1/2 w 4/8, uzyskaną przez pomnożenie licznika i mianownika przez 2, to widzimy przemianę – transformację. Za kilka lat te dzieci nauczą się, że ułamki 1/2 i 4/8 są równoważne.[63]

W PRZEDSZKOLU, W SZKOLE
W pudełku są sześcienne klocki w czterech kolorach – czerwone, zielone, niebieskie i żółte. Każde z dzieci bierze, ile chce klocków w jednym z kolorów.
Ustalają:
Kto ma takie same klocki jak ja (czyli w tym samym kolorze)?
Kto ma tyle samo klocków co ja?
Kto ma takie same i tyle samo klocków co ja?
Odpowiedzi na te pytania wymagają rozpoznania równoważności.
Kasia ma 5 żółtych klocków, Staś 7 niebieskich. Co Kasia ma zrobić, żeby mieć takie same klocki jak Staś? Wymienić 5 żółtych klocków na 5 niebieskich.
Co ma zrobić, żeby mieć tyle samo klocków, co Staś? Wziąć jeszcze 2 żółte klocki.
A co ma zrobić, żeby mieć takie same i tyle samo klocków co Staś? Wymienić 5 żółtych klocków na 5 niebieskich i dołożyć jeszcze 2 niebieskie klocki.
Wszystkie te działania są transformacjami.

Doświadczenia (zadania) rozwijające

w zakresie uznawania stałości liczby

PRZEDSZKOLE
porównywanie liczebności dwóch zbiorów i ustalanie, że jest w nich tyle samo obiektów
dzieci uczą się konstruować zbiory o takiej samej liczbie obiektów. Mogą to robić na dwa sposoby – przez policzenie obiektów lub przez połączenie w pary obiektów z obu zbiorów. Ten drugi sposób jest prostszy dla dzieci. Opiera się na zasadzie jeden do jednego, której znajomość jest niezbędna do tego, by dzieci zrozumiały pojęcie liczby naturalnej w różnych aspektach

Dzieci mają pieski – zabawki. Każdy piesek musi mieć swoją miseczkę.
Piesków i miseczek jest po tyle samo.
Dziecko wyjmuje garść klocków.
Układa je w rzędzie. Obok każdego klocka kładzie patyczek.
Klocków i patyczków jest po tyle samo.

[63] op. cit. s. 27.

PRZEDSZKOLE
ustalanie liczby obiektów w zbiorze, wprowadzanie zmian w ich położeniu i wnioskowanie o liczbie obiektów po takiej zmianie
dzieci wnioskują o tym, że liczba obiektów nie zmienia się, jeżeli zmieni się tylko położenie obiektów, bez ich dodania czy odjęcia

Dzieci ustawiają przed sobą wszystkie pieski – zabawki. Mogą policzyć, ile ich jest. Teraz pieski rozbiegają się po stole. Czy piesków jest tyle samo? A może jest mniej lub więcej? Dlaczego tak myślą?
Pieski wchodzą do domu (puste pudełko). Ile piesków jest w domu? Czy dzieci wiedzą to bez liczenia, czy muszą policzyć?

Dzieci wyjmują garść kredek. Liczą je. Wszystkie kredki wkładają do pustego pudełka.
Ile kredek jest w pudełku? Muszą liczyć, czy wiedzą to bez liczenia?
Teraz kredki układają na stole, jedną obok drugiej. Ile jest kredek?
Czy wiedzą to bez liczenia?

PRZEDSZKOLE
ustalanie liczby obiektów w dwóch równolicznych zbiorach, wprowadzanie zmian w układzie obiektów w jednym z tych zbiorów i ponowne wnioskowanie o równoliczności tych zbiorów
dzieci łączą dwa poprzednie rodzaje doświadczeń, czyli w dwóch zbiorach jest po tyle samo obiektów i na liczbę obiektów nie wpływa zmiana ich położenia

Dzieci mają pieski – zabawki. Każdy piesek musi mieć swoją miseczkę. Piesków i miseczek jest po tyle samo.
Dzieci zbierają miseczki i układają je jedną na drugą.
Czy teraz piesków i miseczek jest po tyle samo?
Wiedzą to bez liczenia, czy muszą policzyć?

Dzieci wyjmują garść kredek, a potem tyle samo klocków, czyli obok każdej kredki kładą klocek. Kredek i klocków jest po tyle samo.
Wszystkie kredki wkładają do pustego pojemnika.
Czy teraz kredek i klocków jest po tyle samo?
Muszą liczyć, czy wiedzą to bez liczenia?

PRZEDSZKOLE I SZKOŁA
wnioskowanie o stałości liczby obiektów w zbiorze po dodaniu i odjęciu takiej samej liczby obiektów
dzieci uczą się wnioskować o tym, że po dołożeniu (zabraniu), a potem zabraniu (dołożeniu) takiej samej liczby obiektów liczebność zbioru nie zmienia się. Czyli do określonej liczby przedmiotów dokładają kilka kolejnych przedmiotów, a potem zabierają tyle samo i określają, czy przedmiotów jest teraz tyle samo, co na początku (mogą też najpierw zabrać, a potem tyle samo przedmiotów dołożyć)

Dzieci wyjmują garść czerwonych klocków. Liczą je.
Ze wszystkich tych klocków budują dom.
Dokładają 3 zielone klocki. Potem zabierają te klocki.
Czy wiedzą bez liczenia, z ilu klocków zbudowany jest dom?

Dzieci wyjmują garść kredek w różnych kolorach. Liczą je.
Ze wszystkich kredek ustawiają płotek.
Dokładają do płotka w dowolnym miejscu 4 kolejne kredki.
Teraz zabierają 4 dowolne kredki.
Z ilu kredek zbudowany jest płot. Muszą liczyć, czy wiedzą to bez liczenia?

Dzieci wyjmują garść kasztanów. Liczą je. Zabierają 3 kasztany.
Wkładają pozostałe do pustego pudełka.
I do tych kasztanów dokładają jeszcze 3 kasztany.
Czy kasztanów jest tyle samo co na początku?
Muszą liczyć, czy to wiedzą bez liczenia?

Dzieci wyjmują garść kamyków. Liczą je. Zabierają 3 kamyki.
Wkładają pozostałe do pustego pudełka. I do kamyków dokładają jeszcze 3 klocki.
Czy przedmiotów jest tyle samo co na początku kamyków?
Muszą liczyć, czy to wiedzą bez liczenia?

PRZEDSZKOLE I SZKOŁA
wnioskowanie o liczebności jednego z dwóch równolicznych zbiorów na podstawie wiedzy o liczebności tylko jednego z nich
dzieci wiedzą, że w obu zbiorach jest po tyle samo obiektów. Liczą, ile jest obiektów w jednym zbiorze i wnioskują o liczbie obiektów w drugim zbiorze

Dzieci wyjmują garść kredek. Nie liczą ich. Układają w rzędzie.
Pod każdą kredką kładą klocek. Ustalają, że kredek i klocków jest po tyle samo.
Liczą klocki. Ile jest kredek?

Dzieci wyjmują garść klocków. Nie liczą ich. Układają w rzędzie na kartce.
Pod każdym klockiem rysują kreskę. Ustalają, że klocków i kresek jest po tyle samo.
Liczą kreski. Ile jest klocków?

Dzieci na kartce obrysowują szablony różnych kół.
Kół ma być tak dużo, jak dużo zmieści się na kartce.
Nie liczą kół. Na każdym kole rysują kreskę i jednocześnie głośno je liczą.
Ile jest kół?

PRZEDSZKOLE I SZKOŁA
wnioskowanie o liczebności jednego z trzech równolicznych zbiorów na podstawie wiedzy o liczebnościach pozostałych zbiorów
dzieci uczą się stosować **zasadę przechodniości**: jeżeli w zbiorze A jest tyle samo obiektów, co w zbiorze B, a w zbiorze B jest tyle samo obiektów, co w zbiorze C, to w zbiorze C jest tyle samo obiektów co w zbiorze A. Jeżeli ciastek jest tyle samo co cukierków, a cukierków jest tyle samo co jabłek, to jabłek jest tyle samo co ciastek[64].

Dzieci mają klocki i papierowe talerzyki. Ustawiają talerzyki jeden obok drugiego.
Na każdym talerzyku kładą po jednym czerwonym klocku.
Czy więcej jest czerwonych klocków, czy talerzyków? Czy może jest ich po tyle samo? Zdejmują klocki z talerzyków.
A czy teraz więcej jest czerwonych klocków czy talerzyków?
A może jest ich po tyle samo? Dlaczego tak sądzą?

Dzieci kładą po jednym zielonym klocku na każdym talerzyku.
Czy więcej jest zielonych klocków, czy talerzyków?
Czy może jest ich po tyle samo?
Zdejmują zielone klocki z talerzyków.
A czy teraz więcej jest zielonych klocków czy talerzyków?
A może jest ich po tyle samo? Dlaczego tak sądzą?
Czy więcej jest czerwonych czy zielonych klocków, a może jest ich po tyle samo?
Czy wiedzą to bez liczenia? Dlaczego tak sądzą?
Dzieci sprawdzają czy czerwonych i zielonych klocków jest po tyle samo:
w jednym szeregu ustawiają czerwone, a w drugim szeregu zielone klocki.

Dzieci ustawia na stole kilka talerzyków. Na każdym talerzyku ustawiają kubeczek. Talerzyków i kubeczków jest po tyle samo. Do każdego kubeczka wkładają łyżeczkę. Kubeczków i łyżeczek jest tyle samo. Liczą łyżeczki. Ile jest talerzy?
Muszą liczyć, czy wiedzą to bez liczenia?

Dzieci wyjmują garść kredek. Nie liczą ich.
Układają w rzędzie. Pod każdą kredką kładą klocek.
Ustalają, że kredek i klocków jest po tyle samo.
Obok każdego klocka kładą kamyk.
Kamyków jest tyle samo co klocków. Liczą kamyki.
Ile jest kredek?
Muszą liczyć, czy wiedzą to bez liczenia?

[64] Przed doświadczeniami ze stosowaniem zasady przechodniości, należy dać dzieciom wiele doświadczeń w porównywaniu liczebności trzech zbiorów. Jest to bardzo trudne i dziecko powinno posługiwać się metodą ustawiania obiektów w trójki: jeden ze zbioru A, obok ze zbioru B, obok ze zbioru C. Jeżeli dzieci na radzą sobie z tym, trzeba odłożyć w czasie zadania na wnioskowanie o zasadzie przechodniości.

3. Liczby naturalne

3.1. Liczby naturalne. Wynalezienie liczb

Dzieci na długo jeszcze przed pójściem do przedszkola posługują się liczbami. Doskonale wiedzą, jak użyć pilota do telewizora, żeby obejrzeć ulubiony program: trzeba na pilocie nacisnąć 555. Dziecko może rozpoznawać usytuowanie klawisza na pilocie lub pamiętać symbol 5. Niezależnie od tego, czy poznaje symbol, czy klawisz wie, że bajka pojawi się, kiedy naciśnie trzy razy, potrafi skorzystać ze schematu „jeden, jeden i jeszcze raz jeden". Źródło tego zachowania tkwi we wrodzonym mechanizmie (zmyśle) liczby.

Wynalezienie liczby i operacji na liczbach miało niewątpliwie wyjątkowe znaczenie dla rozwoju ludzkości. Każdy z nas codziennie korzysta z tego wynalazku. Opiera się na nim rozwój nauki i techniki. Ludzie wynaleźli liczby (podobnie jak wiele innych rewolucyjnych usprawnień) z potrzeby – chcieli policzyć członków swoich społeczności, swój stan posiadania, swoje straty, jeńców, liczyć czas od założenia swoich miast, liczbę dni od swoich zwycięstw. Tak **narodziły się liczby**. Historia powstania liczb, to historia zupełnie anonimowa. Stworzona przez ludzi i dla ludzi. Liczby, mimo że są jednym z największych wynalazków człowieka, nie zostały opatentowane. Znamy nazwiska niektórych z tych, którzy je przekazywali, stosowali, czy objaśniali. Ale imiona wynalazców nie są znane. To produkt zbiorowej myśli – rachmistrzów, księży, astronomów, astrologów, a na końcu dopiero matematyków[65].

Można dostrzec pewne podobieństwa pomiędzy tym, jak ludzkość wynalazła liczby, a tym jak dziecko w swoim umyśle konstruuje pojęcie liczby. Początkowo są to liczby naturalne, które stają się bazą dla wynalezienia/skonstruowania liczb całkowitych i ułamków oraz innych liczb wymiernych, a dalej liczb niewymiernych.

Pojęcia liczbowe zajmują kluczowe miejsce w programach nauczania matematyki, zaczynając już od przedszkola. Liczby są kluczowe dla właściwego rozumienia matematyki, a także w rozwoju zdolności poznawczych człowieka. Liczby i podstawowe operacje na liczbach są fundamentem dla konstruowania dalszych pojęć matematycznych. Są one również ważnym narzędziem, które umożliwia i ułatwia dostęp do wiedzy z innych dziedzin. Dzieci w wieku przedszkolnym i młodszym wieku szkolnym bardzo interesują się liczbami. Czy to zainteresowanie będzie się rozwijać i owocować biegłością w matematyce w ogromnym stopniu zależy od jakości pierwszych matematycznych doświadczeń. Rola nauczyciela w tym procesie jest ogromna.

Trudno uwierzyć, że jeszcze dzisiaj funkcjonują społeczności, które nie posługują się abstrakcyjnymi liczbami. Są to plemiona Zulusów i Pigmejów w Afryce, szczepy Aranda i Kamilarai w Australii. Posługują się oni dwiema liczbami: jeden oznacza pojedynczy obiekt i dwa, który oznacza parę. Dalej w liczeniu brakuje już im dokładności. Nie pojmują liczby w sensie abstrakcyjnym, ale „odczuwają" ją jak inne cechy – zapach, smak, barwę, dźwięk, jako coś, czego nie można oddzielić od natury obiektów, których dotyczy.

[65] G. Ifrah: Dzieje liczby czyli historia wielkiego wynalazku, Zakład Narodowy im. Ossolińskich, Wrocław - Warszawa - Kraków - Gdańsk - Łódź 1990, s.10.

Potrafimy ocenić liczebności od 1 do 4 za pomocą szybkiego oglądu**.** Badania wskazują, że rodzimy się z tą zdolnością. Zmysł liczby umożliwia określenie bez liczenia, który zbiór jest większy. Zbiory muszą być porównywane równocześnie i różnić się w istotny sposób liczbą elementów. Porównywanie zbiorów odbywa się podświadomie i automatycznie[66].

W drugim półroczu życia dziecko osiąga zdolność globalnej oceny przestrzeni wypełnionej rzeczami i osobami w jego otoczeniu. Potrafi łączyć w jedno kilka analogicznych przedmiotów, które z początku widzi oddzielnie, a jeśli czegoś w tej całości brakuje, od razu to spostrzega. W pierwszej połowie drugiego roku życia dziecko uczy się rozróżniać jeden, dwa i wiele przedmiotów, oceniać jednym spojrzeniem, który z dwóch niedużych zbiorów ludzi lub przedmiotów jest większy. Kilka miesięcy później, w trzecim roku życia, posługuje się nazwami liczb, zna początkowe liczby, rzadziej posługuje się liczbami, które trudno wymówić[67]. 2-3-letnie dziecko często sądzi, że kilka pierwszych liczebników to jedno długie słowo[68].

Bardzo ważnym etapem w konstruowaniu pojęcia liczby jest wyabstrahowanie liczby – niejako oddzielenie cechy liczebność, od tego co opisuje.

Zupełnie czym innym jest: **trzy klocki**, a zupełnie czym innym **trzy**.

Trzy klocki – trzy, jest tu liczebnością klocków, wyłącznie do klocków się odnosi, funkcjonuje, ma sens z punktu widzenia dziecka wyłącznie w zestawieniu z klockami.

Trzy – może być liczebnością klocków, ale też liczebnością domów czy wagonów. Ale też liczbą godzin (3 h), zasobnością portfela (3 PLN) czy numerem linii tramwajowej („trójka"). W pewnym sensie zawsze, kiedy posługujemy się liczbami w codziennym życiu mianujemy je. **Miano** określa, czy liczba odnosi się do metrów czy złotych – mianami są tu odpowiednio metry (trzy metry) i złote (trzy złote). Początkowo dziecko doświadcza wyłącznie „liczb mianowanych", czyli takich które zawsze odnoszą się do rzeczy lub innych obiektów. Nie są to oczywiście miana w rozumieniu jakim posługujemy się w matematyce. Miana, które znamy z matematyki w przeciwieństwie do tych pierwotnych „mian" są już bardziej abstrakcyjne, umowne czy symboliczne, takie jak decymetry, hektary, czy stopnie Celsjusza. „Mianami pierwotnymi" będą w takim ujęciu klocki, kamyki czy patyki.

Społeczność Aborygenów Walpiri posługuje się tylko trzema liczebnikami: 1, 2 i wiele. Społeczność Anindilyakwa z Wyspy Groote Eylandt u północnych wybrzeży Australii, oznacza liczby słowami 1, 2, 3 i wiele. W jednym z badań grupa dzieci z obu społeczności słuchała, jak ktoś stukał od 1 do 7 razy i wykładał tyle żetonów, ile razy stuknął. Czasami eksperymentator „mylił się" z wykładaniem żetonów. Dzieci doskonale potrafiły wskazać, w którym momencie pomylił się. Świadczy to o tym, że dzieci potrafiły utworzył umysłową reprezentację liczby, odnieść ją zarówno do liczenia słuchem jak i wzrokiem. Nie znały jednak liczebników do określania liczebności 4, 5, 6 czy 7. Wynikać z tego może, że słowa określające liczby – liczebniki, są potrzebne dla precyzji liczenia, dla komunikowania się ludzi między sobą, ale nie są konieczne dla tworzenia abstrakcyjnej reprezentacji liczby[69].

---

66 B. Brożek, M. Hohol: Umysł matematyczny, Copernicus Center Press, Kraków 2014, s. 22.

67 G. Ifrah: Dzieje liczby czyli historia wielkiego wynalazku, op. cit., s. 15-16.

68 K. Fuson: Relationship between counting and cardinality from age 2 to 8: w: J. Bideaud, C. Meljac, J. Fischer (red.) Pathways to number, children's developing numerical abilities, Hillsdale, LEA: Nowy Jork 1992.

69 por. B. Butterworth: The Mathematical Brain, Macmillan, Londyn 1999.

Możliwość posługiwania się liczbami u tych ludów nie wykracza poza percepcję bezpośrednią liczby, czyli zdolność, z którą rodzi się każdy człowiek. Nie jest to jednak to samo, co abstrakcyjne posługiwanie się liczbami[70].

Ludzie wynaleźli liczby, bo były im one potrzebne do zaspokajania konkretnych potrzeb. W dokonaniu tego imponującego wynalazku pomogły człowiekowi pewne własności jego rozumowania. Ludzie i niektóre gatunki zwierząt są zdolni do bezpośredniego postrzegania liczebności, dzięki posiadanemu **zmysłowi liczby**. Ta naturalna zdolność pozwala rozpoznać, że pewien (nieliczny) zbiór, widziany po raz drugi, zmienił się przez odjęcie lub dodanie jakiegoś elementu. Bez błędu wzrokiem rozróżniamy 1, 2, 3, 4 elementy. Na tym się kończy zdolność identyfikowania liczebności. Powyżej 4 oko przestaje być dokładnym przyrządem pomiarowym[71]. Zmysł liczby posiadają już niemowlęta. Osoby, które rodzą się bez niego, pozbawione są intuicji dotyczącej liczb, mają duże kłopoty z posługiwaniem się liczbami. Zmysł liczby odkrył francuski neurobiolog i matematyk Stanislas Dehaene. Jego zdaniem ewolucja wyposażyła mózg w intuicję liczb. Ocena liczebności niewielkiej grupy obiektów (1-4) następuje za pomocą szybkiego oglądu, czyli **szacowania** (subitizing). Zmysł ten rozwija się jeszcze przed urodzeniem i pełni rolę mechanizmu startowego dla umiejętności liczenia. Trzy do pięciu dni po urodzeniu dzieci potrafią odróżnić zbiory dwuelementowe od czteroelementowych. Czteromiesięczne niemowlęta rozumieją, że gdy do jednego przedmiotu dodany zostanie drugi, to w sumie są dwa przedmioty. Dzieci zdają się też rozumieć odwrotną operację, czyli odejmowanie. Niewiele później zdolności te rozszerzają się, obejmując 3 przedmioty. Kilkumiesięczne dzieci potrafią porównać informacje pochodzące z różnych zmysłów – są w stanie ustalić, że liczba uderzeń w bębenek jest taka sama jak liczba klocków, które widzą[72].

Liczenie w porównaniu z szacowaniem jest procesem bardziej czasochłonnym i angażującym dodatkowe zdolności poznawcze. Pozwala określić liczebności zbiorów z większą precyzją niż szacowanie i może dotyczyć zbiorów o dużej liczbie elementów[73].

Małe dziecko potrafi porównać liczebności dwóch zbiorów bez posługiwania się abstrakcyjnym liczeniem. Stosuje parowanie, czyli obiekty z porównywanych zbiorów ustawia w pary. Między zbiorami zachodzi **odpowiedniość wzajemnie jednoznaczna**. Własne nogi, ręce stanowią dla dziecka pierwszy **wzorzec pary**. Para nie jest uświadomiona jako liczba, ale jako komplet. Metoda jeden – jeden pozwala pojąć pewne liczebności, bez liczenia, bez nazywania, bez uruchamiania wyobraźni. Metodę odpowiedniości jeden do jednego używa też dziecko, gdy posługuje się wyliczanką: jedno słowo wyliczanki – jedna liczona osoba.

---

70 G. Ifrah: Dzieje liczby czyli historia wielkiego wynalazku, Zakład op. cit., s.13-14.

71 W Rzymie męskim potomkom (dziewczynki nie miały w tamtych czasach imion) do czwartego z kolei syna nadawano imiona własne. Począwszy od piątego syna nadawano dzieciom numery. Tylko 4 pierwsze miesiące pierwotnego roku rzymskiego miały swoje nazwy (Martius, Aprilis, Maius, Iunius). Nazwy pozostałych miesięcy były numerami. Więzień, gdy liczył czas swojego przebywania w więzieniu, to na ścianie celi żłobił tyle kresek, ile dni przesiedział. Każde 4 kreski skreślał. To mogą być dowody na to, że u człowieka zdolność bezpośredniego spostrzegania liczb nie przekracza 4. Nierównomierne rozmieszczenie palców ręki respektuje granicę zdolności człowieka do natychmiastowego wzrokowego rozpoznania liczby. Kciuk jest wyraźnie oddalony od palca wskazującego. por. G. Ifrah: Dzieje liczby czyli historia wielkiego wynalazku, op. cit., s.16 - 17.

72 B. Brożek, M. Hohol: Umysł matematyczny, Copernicus Center Press, Kraków 2014, s. 50.

73 Ibidiem, s. 30-31.

Wynalezienie liczby zaczęło się od metody **odpowiedniości jeden – jeden.** Daje ona możliwość łatwego porównania dwóch zbiorów obiektów tej samej lub różnej natury bez odwoływania się do liczenia.

Pasterz, który miał owce, nie wiedział, ile ich jest, ale wiedział, że dużo. Każdego wieczoru owce wracały z pastwiska do jaskini, ale pasterz nie wiedział, czy wszystkie wróciły, bo było ich tak dużo, że nie dało się każdej z nich zapamiętać. Wpadł na pomysł – usiadł z kawałkiem kości i krzemieniem u wejścia do jaskini i nacinał kość za każdym razem, gdy do jaskini wchodziła owca. Kiedy wszystkie owce były już w jaskini, pasterz miał dokładnie tyle nacięć, ile było zwierząt. Dalej nie mając pojęcia, ile tych owiec jest. Odtąd łatwo mógł sprawdzić, czy całe stado wróciło – wpuszczał owce pojedynczo i przesuwał palec po nacięciach, za każdym razem gdy weszła owca. Kiedy narodziło się jagnię, żłobił nowe nacięcie. Dzięki metodzie jeden – jeden można określać równoliczność zbiorów, nie umiejąc jeszcze posługiwać się liczebnikami.

Uważa się, że po raz pierwszy liczb zaczęto używać ok. 30 000 lat p.n.e. Z tego okresu pochodzą kości, na których znaleziono ślady nacięć, uważane za próby liczenia. Nie wiadomo, czy zliczano wtedy dobra, dni, czy może ludzi. Najstarszy znany przykład malowidła z kreskami, sugerującymi liczenie, pochodzi z jaskini w południowej Afryce.

Pierwszymi pojęciami liczbowymi, jakie poznaje dziecko są **liczby naturalne**. Pojęcie liczby naturalnej jest podstawą do konstruowania pojęcia liczb całkowitych[74], a to staje się podstawą konstruowania pojęcia liczb wymiernych[75] i niewymiernych[76]. Określone abstrakcyjne pojęcia stanowią punkt wyjścia do tworzenia nowych, również abstrakcyjnych pojęć. W ten sposób tworzy się **piętra abstrakcji.**

Stworzenie ścisłej definicji zbioru liczb naturalnych, choć proste, zajęło matematykom wiele czasu. Jeszcze do końca XIX wieku uważali, że pojęcie liczby należy do pierwotnych, niewymagających zdefiniowania. Włoski matematyk i logik Giuseppe Peano zaproponował warunki (tzw. postulaty lub **aksjomaty Peano**), które muszą spełniać liczby naturalne. Najmniejszą liczbą naturalną jest 0. Istnieje nieskończenie wiele liczb naturalnych. Każda liczba naturalna ma swój następnik, czyli liczbę o 1 większą. A jednocześnie każda liczba, z wyjątkiem zera, ma liczbę ją poprzedzającą, która jest o 1 mniejsza. Zero nie jest następnikiem żadnej liczby naturalnej, bo jest najmniejszą liczbą ze zbioru liczb naturalnych[77].

Na początku dziecko ma nabrać przekonania, że liczba oznacza zbiór jedności i zależnie od tego zbioru może być większa lub mniejsza. Nie może liczyć tylko słownie, bo wtedy wypowiada tylko słowa – liczebniki. W ten sposób nie powiąże określeń (liczebników) z pojęciem liczby. Powinno zawsze przeliczać coś rzeczywistego – konkretne przedmioty, osoby.

Pojęcie liczby naturalnej jest pojęciem abstrakcyjnym. Liczba jako taka w rzeczywistości nie istnieje. Na parkingu stoi 5 samochodów. Nie liczba pięć stoi na parkingu, ale samochody: samochód, samochód, samochód, samochód i jeszcze jeden samochód. Dziecko nie może liczby zobaczyć, dotknąć, przełożyć, powąchać. Proces konstruowania

[74] **Liczby całkowite** to liczby naturalne (dodatnie) oraz przeciwne do nich, czyli liczby ujemne.

[75] **Liczby wymierne** to liczby, które można przedstawić w postaci ułamka, który powstaje przez podzielenie liczby całkowitej (licznik) przez liczbę całkowitą różną od zera (mianownik).

[76] **Liczby niewymierne** to liczby, które nie da się przedstawić w postaci ułamka, na przykład $\sqrt{2}$.

[77] J. Słupecki, K. Piróg-Rzepecka, K. Hałkowska: Elementy arytmetyki teoretycznej, WSiP, Warszawa 1979, s. 6-7.

pojęcia liczby naturalnej jest długi, wymaga oderwania się myśli dziecka od rozmaitych modeli i sytuacji. Chaotyczne i naturalne sytuacje pochodzące z doświadczeń przedszkolnych dziecka w szkole porządkuje się tak, aby uwzględnić aspekt kardynalny, porządkowy, arytmetyczny i miarowy, by doprowadzić do **syntezy, jaką ma być pojęcie liczby naturalnej**. Chodzi o to, aby dziecko zdobyło przekonanie, że liczba oznacza zbiór jedności i zależnie od tego zbioru może być większa lub mniejsza[78]. Posługujemy się tu **zasadą rekurencji** – każdy wyraz ciągu liczb naturalnych otrzymuje się przez dodanie 1 do liczby poprzedniej. Każda liczba naturalna (z wyjątkiem liczby zero) ma więc przyczynę swego istnienia we wszystkich poprzednich liczbach.

Kiedy dziecko otrzymuje kartoniki z liczbami i jeden kartonik ma położyć po prawej stronie, a drugi po lewej, okazuje się, że zazwyczaj kartonik z mniejszą liczbą układa po lewej stronie, a z większą po prawej. Działa efekt SNARC[79] (spatialnumerical association of response codes, co można przetłumaczyć jako: przestrzenne skojarzenie kodów liczbowych), który odnosi się do związku między umysłowymi reprezentacjami liczb i przestrzenią. To tak jakby liczby rozmieszczone były na odcinku w ten sposób, że każde miejsce odpowiada pewnej wielkości. Zbliżone do siebie liczby reprezentowane są w sąsiednich miejscach, zero znajduje się skrajnie z lewej strony, większe liczby znajdują się coraz bardziej na prawo. Kolejne liczby wyobrażamy sobie jako rozmieszczone na linii – im większa liczba, tym bardziej preferowana jest prawa strona, im mniejsza liczba – strona lewa.[80] Myśląc o liczbach szeregujemy je w umyśle. Tworzymy ciąg rosnący. W naszej kulturze od lewej strony do prawej. Liczba bardziej na prawo jest większa od tej na lewo. Dodając, posuwamy się w ciągu w prawo, a odejmując – w lewo. Wyobrażenie sobie ciągu liczbowego wymaga dobrego rozumienia relacji przestrzennych. Pierwszy chodniczek liczbowy jaki poznaje dziecko, powinien być skonstruowany tak, aby liczby rosły od lewej strony do prawej i składać się przynajmniej z liczb pierwszej dziesiątki.

Ważną liczbą, jaką poznaje i posługuje się dziecko jest liczba 10. Jest ona ważna co najmniej z dwóch powodów. To podstawa systemu liczenia, którym się posługujemy. Dziesiątka odgrywa też istotną rolę w rachowaniu, dlatego już w przedszkolu ważne są doświadczenia w doliczaniu i odliczaniu od 10, a też w grupowaniu przy liczeniu obiektów po 10.

Ważną rolę w rozwoju cywilizacji odegrało **wynalezienie bazy** w posługiwaniu się liczbami. Trzeba było wynaleźć sposób na oznaczanie (materialnie, słowne, na piśmie) dużych liczb za pomocą jak najmniejszej liczby symboli. Ucząc się grupować dowolne elementy według przyjętej bazy, człowiek nauczył się oceniać, obliczać i mierzyć różne wielkości: ciężar, długość, pole powierzchni, objętość, pojemność. Nauczył się też sięgać do coraz większych liczb i pojmować je zanim jeszcze był zdolny opanować pojęcie nieskończoności. Mógł w ten sposób opracować kilka technik obliczeniowych i stworzyć początki arytmetyki, która najpierw była czysto praktyczna, zanim stała się abstrakcyjna i dopro-

[78] Więcej na temat zależności między klasyfikowaniem a rozumieniem pojęcia liczby naturalnej piszemy w rozdziale 2.1 Rozumowania matematyczne – klasyfikacja.

[79] B. Brożek, M. Hohol: Umysł matematyczny, op. cit., s. 62-66.

[80] W. Fias, J. Ph. van Dijck, W.Geveras: How is Number Associated with Space? The Role of Working Memory, in: Space, Time and Number in the Brain, Searching for the Foundation of Mathematical Thought, S. Dehaene, E. Brannon (red.), Elsevier, Londyn 2011, s. 13.

wadziła do algebry. Otworzyła się przed człowiekiem droga do kalendarza, do astronomii, do geometrii**. Baza 10** była i jest najbardziej rozpowszechniona. Ma zalety, gdyż wielkością odpowiada zdolnościom pamięciowym człowieka: niewiele nazw liczb, niewiele symboli[81]. **Dziesiątkowy system pozycyjny** oznacza, że dziesięć jednostek niższego rzędu tworzy jedną jednostkę rzędu bezpośrednio wyższego. Czyli 10 jedności to 1 dziesiątka, a 10 dziesiątek, to 1 setka. Numeracja jaką się posługujemy, oparta na 10 cyfrach, pozwala w prosty i racjonalny sposób przedstawić dowolną liczbę niezależnie od jej wielkości oraz wykonać wszystkie działania arytmetyczne. Cyfra w zapisie liczby wskazuje różną wartość, w zależności od położenia, czyli miejsce cyfry w liczbie ma szczególne znaczenie. Może znajdować się na pierwszym, drugim, trzecim miejscu od końca (licząc od prawej strony). Odnosi się wtedy do różnych rzędów numeracji. W liczbie 123 cyfra 3 oznacza 3 jedności, w liczbie 132 oznacza 3 dziesiątki, a w liczbie 321 oznacza 3 setki.

Dziesiątkowy system pozycyjny opiera się na **pewnych zasadach**:
- zasadzie łączenia po 10: 10 jedności, to jedna dziesiątka; 10 setek, to jeden tysiąc;
- te same symbole stosuje się wielokrotnie, czyli za pomocą 10 cyfr można przedstawić nieskończenie wiele liczb;
- miejsce cyfry względem innych cyfr w liczbie określa jej wartość, z tym, że coraz większe liczby są na lewo;
- aby określić wielkość liczby trzeba poznać wartość wskazywaną przez każdą z cyfr, a następnie dodać je, na przykład w liczbie 358 – 3 oznacza 300, 5 oznacza 50, a 8 oznacza 8. Całkowita wartość liczby jest sumą tych wartości, czyli 300 + 50 + 8 = 358.

3.2. Liczby naturalne. Liczenie

Dzieci w wieku przedszkolnym bardzo lubią liczyć. Liczą zabawki, płyty chodnikowe, ale i drzewa w lesie czy ile razy „kuka" kukułka. Przyjemność sprawia spontaniczne liczenie, jak najdalej się da. To doskonale obrazuje nieskończoność zbioru liczb, najważniejsze jest właśnie jej doświadczanie. Dziecko samo wyznacza kres dostępnej mu przestrzeni liczbowej. Nie należy ograniczać zakresu liczenia. Wysokie liczby mają dla dziecka silną, pozytywną wartość uczuciową. Wzbudzają zaciekawienie, zdziwienie, przyjemność z obcowania z nimi. Dziecko posługuje się tym większymi liczbami, im mniej jest w zabawie czy zadaniach odniesień do rzeczywistości.

[81] G. Ifrah: Dzieje liczby czyli historia wielkiego wynalazku, Zakład Narodowy im. Ossolińskich, Wrocław - Warszawa - Kraków - Gdańsk - Łódź 1990, s. 50.

W PRZEDSZKOLU, W SZKOLE

jeden	dwa	trzy	cztery	**pięć**
				ten jest **piąty**
				wszystkich jest **pięć**

Policzyć obiekty pewnego zbioru, to znaczy przypisać każdemu z nich symbol (słowo, gest lub znak graficzny) odpowiadający pewnej liczbie z naturalnego ciągu liczb całkowitych, od jednego zaczynając, przez kolejne liczby aż do wyczerpania wszystkich liczonych obiektów. W ten sposób zbiór przekształca się w ciąg symboli, z których każdy będzie numerem porządkowym, który został przypisany danemu obiektowi. Ostatni z tych numerów będzie wyrażał liczbę wszystkich obiektów, a więc liczbę obiektów liczonego zbioru[82].
W przeliczaniu obiektów dziecku pomaga dotykanie, przesuwanie każdego z nich. Trudniej jest liczyć tylko „wzrokiem".

Pojawienie się w zachowaniu małego dziecka **gestu wskazywania** to początek kształtowania się czynności składających się na umiejętność liczenia. To czas, gdy dziecko intensywnie uczy się komunikować ze światem zarówno językiem werbalnym jak i pozawerbalnym. W tym samym czasie dziecko poznaje rzeczywistość wokół siebie i uczy się ją porządkować. Gestem wskazywania dziecko komunikuje dorosłemu, że skupiło uwagę na danym obiekcie i dopomina się, aby on uczynił to również i oznaczył słowem – nazwą wskazaną rzecz. Gest wskazywania ma podstawowe znaczenie dla kształtowania się umiejętności liczenia.

Dziecko w wieku przedszkolnym poznaje zasady obowiązujące przy liczeniu. **Nie należy dziecku objaśniać słownie tych zasad** (podawać definicji). W ten sposób i tak ich nie zrozumie, a co najwyżej nauczy się na pamięć. Wystarczy „podpowiadać" jak liczyć, liczyć razem z nim.

W PRZEDSZKOLU, W SZKOLE
Dzieci w ciągu pierwszych lat swojego życia uczą się **zasad poprawnego liczenia:**

- zasady kardynalności: ostatni wypowiedziany liczebnik jest liczbą kardynalną zbioru. Liczy klocki: jeden, dwa, trzy, cztery, pięć, sześć. Jest sześć klocków;
- zasady jeden do jednego: licząc wskazuje się każdy liczony obiekt i określa się go nazwą; początkowo każda liczba to zbiór jedności;
- zasady ustalonego porządku: wybiera porządek w zbiorze obiektów i zgodnie z nim przelicza je; na przykład liczy od lewej do prawej, z dołu do góry;

[82] Ibidiem, s. 34-35.

- zasady abstrakcji: można policzyć razem niejednorodne obiekty. Można policzyć razem misie, jabłka i klocki;
- zasady niezależności porządkowej: porządek liczenia w ustalonym zbiorze jest bez znaczenia. Można liczyć od prawej strony do lewej, od lewej do prawej, z góry na dół, z dołu do góry, czy w każdym innym kierunku. Ważne, żeby policzyć każdy obiekt, żadnego nie pominąć i żadnego nie policzyć kilka razy[83].

Dziecko powinno liczyć różnego rodzaju obiekty, ale początkowo najlepiej kiedy zbiór liczonych obiektów jest jednorodny. Przeliczanie zbiorów różnorodnych; czy to licząc wszystkie, czy tylko wyodrębnione jest trudniejsze. Na początku ma przed sobą tylko te obiekty, które ma policzyć. Potem oprócz nich są też inne, których liczyć nie trzeba.

W PRZEDSZKOLU, W SZKOLE

❁	★	❁	★	❁	❁
jeden		dwa		trzy	**cztery**
					są **cztery** kwiaty

Przy liczeniu wybranych obiektów, kiedy inne trzeba pominąć, dziecko na początku wybiera (odkłada) te, które ma policzyć. Następnie dziecko nie rozdziela przedmiotów, na te które należy policzyć i na te, które mają być ignorowane. Licząc, ze wszystkich przedmiotów, wyodrębnia tylko te, które są w tej chwili istotne.

Przedmioty, które dziecko ma policzyć najlepiej układać w rzędzie lub w szeregu. Z czasem można je grupować, rozpraszać, a nawet układać po okręgu. W sytuacjach, w których dziecko ma kłopoty z liczeniem, trzeba ponownie przedmioty ustawić w szeregu lub w rzędzie.

Bardzo trudne jest liczenie wstecz. Wymaga ono już dobrego poruszania się w regułach liczenia, a też dobrego pamiętania nazw kolejnych liczebników.

★	★	★	★	★
pięć	cztery	trzy	dwa	jeden

ten jest **piąty**

wszystkich jest **pięć**

Wszystkie te zasady dotyczą wyłącznie liczb naturalnych. W potocznym rozumieniu wyczerpują one definicję liczby. Na kolejnych etapach edukacji zakres poznawanych liczb znacznie się rozszerza, a poznane wcześniej zasady stają się niewystarczające, czy wręcz

[83] R. Gelman, C. R. Gallistel: The Child's Understanding of Number, Harvard University Press, Cambridge 1986.

czasami sprzeczne z rozbudowywanym pojęciem liczby. Przytoczone zasady liczenia mogą prowadzić do wniosku, że liczby są słowami i symbolami używanymi do liczenia. Tak jakby istniały wyłącznie liczby naturalne. A tak nie jest. Często dorośli zapytani, ile jest liczb w przedziale od 2 do 12, odpowiadają że jest ich dziesięć. Pomimo tego, że od wielu lat znają ułamki zwykłe i dziesiętne. Tymczasem istnieje nieskończenie wiele liczb pomiędzy dwiema dowolnie wskazanymi liczbami. Wielu szkolnych przez nas nauczycieli zapytanych o to, czy istnieje taka para liczb, których suma wynosi 4, a różnica 9, odpowiada, że nie ma takiej pary liczb. Para liczb, o którą pytamy to… zagadka dla czytelnika[84].

W PRZEDSZKOLU, W SZKOLE
Przy przeliczaniu obiektów dorosły powinien dziecku podpowiadać kolejne liczebniki. Trudne do zapamiętania są zwłaszcza liczebniki drugiej dziesiątki, bo ich nazwy są inaczej zbudowane niż liczebniki pierwszej, trzeciej i kolejnych dziesiątek. Zdarzyć się może, że dziecko zamiast piętnaście będzie mówiło „dziesięć pięć" (podobnie jak mówi się dwadzieścia pięć).

W stosowaniu zasady **jeden liczebnik – jeden liczony obiekt**, dziecko początkowo będzie wiązało przeliczanie ze wskazywaniem kolejnych obiektów i nazywaniem ich jako: jeden, dwa, trzy, cztery ... Wypowiadając liczebniki dziecko odnosi je do kolejnych obiektów. **Początkowo liczebniki są wyłącznie nazwami rzeczy,** z czasem stają się nazwami z innego niż rzeczy porządku, by w końcu stać się nazwami liczb. Dziecko nie rozumie, że liczebniki to „specjalne" słowa określające liczby: dwa: to jeden i jeszcze jeden, a trzy: to dwa i jeszcze jeden. Przy liczeniu każde ze słów jest powiązane z odpowiednim miejscem liczby w szeregu, ale też z działaniem polegającym na doliczaniu (dodawaniu) kolejnych obiektów.

Dziecko uczy się podstawowej właściwości konstruowania liczb naturalnych: **kolejna liczba powstaje przez dodanie 1 do poprzedniej liczby i każdy wypowiadany liczebnik wyraża wynik takiego dodawania**. Takie podejście jest dobrą podstawą budowania dalszych umiejętności z arytmetyki.

W PRZEDSZKOLU, W SZKOLE
Najlepiej poznawać kolejne liczby na zasadzie dodawania jeden (jedności, jednego obiektu) do poprzedniej liczby.
Dziecko liczy obiekty – ustala ile ich jest.
Dokłada jeszcze jeden obiekt.
Liczy ponownie, ile jest.

★ jeden	★ dwa	★ trzy	są trzy	
★ jeden	★ dwa	★ trzy	★ i jeszcze jeden	są cztery

[84] D. Haylock, A. Cockburn: Understanding Mathematics for Young Children. Fully Revised and Expanded Edition, SAGE, London 2008, s. 27.

Badania[85] pokazały, że kiedy dzieci przez długi czas uczą się liczenia bez dobrego zrozumienia pierwszych 3-4 liczb, to uczą się mechanicznego liczenia. Starają się robić to, co każe im dorosły, bez zrozumienia, że działanie to zmierza do określenia liczebności zbioru. Dziecko, które posługuje się liczeniem mechanicznie, nie rozumiejąc dobrze co robi, bez problemu obliczy, że jabłek jest 8. Nie będzie jednak potrafiło podać 5 jabłek, gdy zostanie o to poproszone. Z powodzeniem wykona zadanie „Ile jest?", ponieważ jest bardzo dobrze „wyszkolone", ale wyraźnie widać że pojęcie liczby jest jeszcze „mgliste", na pewno liczba nie jest traktowana jak suma innych liczb.

W PRZEDSZKOLU, W SZKOLE

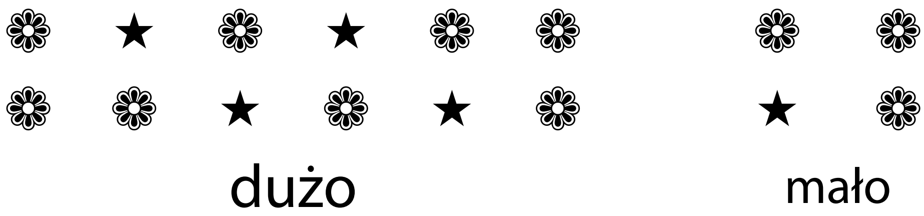
★	★	★	★	
★	★	★	★	★
dwa	cztery	sześć	**osiem**	i jeszcze jeden, razem jest **dziewięć**

Najpierw dziecko uczy się liczyć po 1 do przodu i do tyłu. Potem zaczyna liczyć też po 2, czy po 3. Warto pokazać, że w ten sposób liczy się szybciej. Na początku dziecko ma tyle obiektów, że da się je bez reszty policzyć, na przykład po 3 (czyli 6, 12, czy 21). Potem można próbować dawać dzieciom liczebności, których nie da się bez reszty policzyć po ileś. Dziecko uczy się doliczać, na przykład liczy kamyki: Trzy, sześć, siedem i osiem. Jest osiem kamyków. To są już bardzo trudne zadania. Wokół siebie dziecko znajduje wiele sytuacji występowania relacji typu jeden do wielu. Psy mają po 4 łapy, a rowery po 2 koła. Bardzo ważna jest umiejętność liczenia po 10, gdyż jest to podstawa do posługiwania się dziesiątkowym systemem pozycyjnym. Oczywiście po ileś łatwiej jest liczyć do przodu niż do tyłu. Ważną rolę odgrywa dorosły, który pokazuje jak można liczyć po ileś. Dziecko na początku na pewno będzie liczyć z pomocą dorosłego.

Często poprzestajemy na liczeniu wzrokiem – wystarcza nam jeden rzut oka by ocenić ile osób jest w grupie, ile książek na półce a ile samochodów na parkingu. Oceny dokonujemy nie według liczby sztuk, ale szacując ile miejsca obiekty zajmują. Takie liczenie nazywa się **liczeniem geometrycznym**.[86] Przedszkolaki wolą dostać tę samą ilość soku w dwóch szklankach niż w jednej, bo dwie szklanki zajmują więcej miejsca na stole, niż jedna szklanka i przedszkolakom wydaje się, że dostaną więcej soku. Świadczy to o bardzo wczesnym dysponowaniu przez człowieka umiejętnością liczenia geometrycznego. Warto zachęcać dzieci do szacowania czy jest dużo czy mało, gdzie jest więcej a gdzie mniej. Takie doświadczenia także przyczyniają się do budowania pojęcia liczby.

[85] B. W. Sarnecka, S. Carey: How Counting Represents Number: What Children Must Learn and When They Learn it, "Cognition" 108, 2008, s. 662-674.

[86] M. Szurek: O nauczaniu matematyki. Wykłady dla nauczycieli i studentów, tom 2, GWO, Gdańsk 2005, s. 49.



Warto szacować z dziećmi, intuicyjnie określając liczebności. Zabawy doskonalące umiejętność szacowania ułatwiają dziecku zrozumienie i ugruntowanie pojęcia liczby oraz pomagają rozwijać strategie arytmetyczne.

Zgodnie z teorią o **liczbach jako następstwie czasowym**, liczby powstają nie w przestrzeni, lecz w czasie, nie przez ustawianie przedmiotów obok siebie, lecz przez doznawanie pewnych wrażeń po sobie występujących. Dziecku wydaje się, że im dłużej liczy, tym więcej jest liczonych obiektów[87].

Między liczeniem i postrzeganiem przestrzeni, a także czasu, istnieją zapewne silne związki. Jednak ich natura i kulturowe zakorzenienie wymagają dalszych badań[88].

W PRZEDSZKOLU, W SZKOLE

Dzieci z łatwością uczą się liczyć na palcach. Ważną rzeczą jest rozwijanie wzrokowego rozpoznawania liczebności zbiorów. Zapamiętują wzrokowo poszczególne układy palców oraz automatyzują czynności związane z pokazywaniem i odczytywaniem liczb. Zazwyczaj palce lewej ręki tworzą układy dla liczb od 1 do 5, a prawej od 6 do 10. Dzieci leworęczne mogą liczyć odwrotnie. Liczbę 0 pokazuje zaciśnięta pięść, a 1 to wysunięty kciuk. Liczbę 4 można pokazać na dwa sposoby. Trudniej jest pokazać, gdy dziecko liczy od kciuka kolejne palce. Podobna sytuacja występuje przy liczbie 9.

Palce początkowo pełnią rolę konkretnych przedmiotów do liczenia – podobnie jak klocki, czy kasztany. Z czasem zaczynają pełnić rolę zbiorów zastępujących liczone obiekty. Dziecko pokazuje 3 palce (palce występują tutaj w roli liczonych obiektów). Dziecko pokazuje na palcach, ile w domu ma kotów – Kiciuś, Mruczek i Kajtek – palce pełnią rolę obiektów zastępujących liczone koty. Liczenie na palcach opiera się na kilku zdolnościach poznawczych: grupowaniu obiektów (w myśli lub fizycznie), porządkowaniu i łączeniu ich w pary (powiązać przedmiot z kolejnym palcem), zapamiętywaniu wyników przeprowadzonych operacji, rozumieniu, że uzyskany wynik jest niezależny od kolejności manipulacji obiektami.[89]

87 Ibidiem, s. 51-52.

88 B. Brożek, M. Hohol: Umysł matematyczny, op. cit., s. 70.

89 G. Lakoff, R. E. Nunez: Where Mathematics Comes From, Basic Books, New York 2000, s. 51-52.

W PRZEDSZKOLU, W SZKOLE

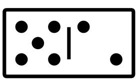
Dzieci powinny móc liczyć na palcach tyle ile chcą i tak długo jak tego potrzebują. Obawy, z którymi można się czasem spotkać, że dziecko powinno już przestać liczyć na palcach są zupełnie niepotrzebne. Kiedy tylko przestaną potrzebować liczyć na palcach, na pewno nie będą się nimi posługiwać. Wielu dorosłym zdarza się wracać do liczenia na palcach w różnych sytuacjach, co wcale nie znaczy, że nie potrafią liczyć w pamięci, posługując się abstrakcyjnymi liczbami. Kiedy na przykład chcemy ustalić jaka dokładnie będzie godzina po upływie czterech i pół godziny, licząc od 17.18 – bardzo wielu dorosłych liczy właśnie „na palcach". Tak jest nam najwygodniej.

Szacowanie to zdolność określania liczby obiektów bez liczenia, „na oko", z małą precyzją. Na przykład szacujemy, że około 50 samochodów stoi na parkingu. Szacowanie nie wymaga przeliczania. Ma charaktery przybliżenia, bez potrzeby angażowania dokładnych reprezentacji liczbowych. Proces ten powszechnie występuje u ludzi, niezależnie od ich wieku, języka, kultury, poziomu wykształcenia[90].

Typy szacowania

Percepcyjne – leży u podstaw uczenia się liczenia. Umożliwia podzielenie występujących w grupie przedmiotów na poszczególne obiekty, czy grupy obiektów, co stanowi warunek wstępny do ich policzenia;

Pojęciowe – pozwala ocenić liczebność zbioru bez liczenia, dzięki rozpoznaniu znanego wzorca. Może mieć charakter **przestrzenny** jak na przykład charakterystyczny układ kropek na kostce do gry, **kinestetyczny** na przykład 5 palców na jednej dłoni i 2 na drugiej – bez liczenia wiemy ile ich jest**.**



Rytmiczne – wyklaskując rytm utworu muzycznego, bez liczenia wiemy, ile gestów wykonać w określonym czasie.

W PRZEDSZKOLU, W SZKOLE

Dzieci **szacując**, „na oko", mogą też porównywać wielkości zbiorów, szczególnie gdy różnica liczebności jest łatwo uchwytna wzrokiem. Ale gdy zbiory mają podobną liczbę obiektów, dzieci będą musiały ustawić przedmioty w pary, aby dowiedzieć się, gdzie jest więcej/mniej obiektów.

[90] B. Brożek, M. Hohol: Umysł matematyczny, op. cit., s. 49.

Doświadczenia (zadania) rozwijające

umiejętności liczenia

PRZEDSZKOLE
Liczenie obiektów i **ustalanie ile** ich **jest**
dzieci liczą obiekty, posługując się liczebnikami kardynalnymi
koncentrują się na całkowitej liczbie obiektów.

Dzieci przenoszą w wiaderku zabawki. Liczą, ile zabawek zmieściło się w wiaderku.

PRZEDSZKOLE
LICZENIE WYBRANYCH OBIEKTÓW Z POMINIĘCIEM INNYCH
dzieci mają wiele różnych obiektów, liczą wskazane, a inne pomijają

Dzieci mają pudełko z kolorowymi klockami. Liczą tylko klocki niebieskie; tylko duże; tylko długie; tylko cienkie itp.

Dzieci mają kartkę, na której narysowane są doniczki: małe i duże; żółte, czerwone, zielone. Liczą czerwone doniczki. Liczą zielone doniczki. Liczą duże doniczki, potem małe. Liczą małe żółte doniczki. Liczą duże zielone. Liczą czerwone i zielone razem.

PRZEDSZKOLE
ODLICZANIE OKREŚLONEJ LICZBY OBIEKTÓW
dzieci mają wiele przedmiotów, podają tyle o ile zostaną poproszone

Dzieci wyjmują do pudełka tyle przedmiotów, ile powie nauczyciel.

PRZEDSZKOLE
KORZYSTANIE W LICZENIU Z ZASADY JEDEN DO JEDNEGO
dzieci liczą obiekty w jednym zbiorze; każdemu obiektowi ze zbioru przyporządkowują obiekty z drugiego zbioru i na tej zasadzie wnioskują, ile obiektów jest w drugim zbiorze

Są 3 misie. Każdy z nich potrzebuje 1 miskę. Przed każdym misiem dzieci mają postawić jedną miskę. Ile misek potrzebują?

Jest 6 szczotek. Ile potrzeba szufelek, żeby każda szczotka miała parę?
Jest 5 samochodów. Ile garaży trzeba zbudować z klocków, żeby każdy samochód miał swój garaż?

PRZEDSZKOLE / SZKOŁA

OKREŚLANIE WZROKIEM LICZBY OBIEKTÓW W ZBIORZE

dzieci liczą wzrokiem, dlatego liczebności obiektów nie mogą być zbyt duże. Takie liczenie ułatwia ułożenie obiektów tak, jak układ kropek na tradycyjnej kostce do gry.

Gry z wykorzystaniem kostki. Tradycyjne domino z kropkami.

PRZEDSZKOLE / SZKOŁA

LICZENIE NA PALCACH

dzieci na palcach pokazują liczebność zbioru, posługując się regułą 1 palec – 1 obiekt

Praca w parach. Patyczki w różnych kolorach. Jedno dziecko pokazuje na palcach liczbę patyczków i podaje ich kolor, drugie dziecko układa tyle, ile trzeba patyczków w odpowiednim kolorze.

PRZEDSZKOLE / SZKOŁA

LICZENIE W RÓŻNYCH KIERUNKACH

dzieci przeliczają obiekty od lewej strony do prawej, od prawej do lewej, z góry na dół i z dołu do góry. Sprawdzają, czy wynik liczenia zależy od kierunku liczenia.

Dzieci ustawiają w szeregu figurki zwierząt (jedna obok drugiej).
Liczą zwierzęta od lewej strony do prawej, a potem od prawej do lewej.
Dzieci liczą kółka na piramidce: z dołu do góry i z góry do dołu.

PRZEDSZKOLE / SZKOŁA

PODWÓJNA ROLA OSTATNIEGO WYPOWIEDZIANEGO W LICZENIU LICZEBNIKA

dzieci liczą obiekty nietrwałe (znikające – klocki wrzucane do kosza z innymi klockami, przemijające – klaśnięcia), w ten sposób koncentrują się na ostatnim wypowiedzianym w liczeniu liczebniku – wskazuje on na dany obiekt, ale też liczbę wszystkich liczonych obiektów.

Dzieci liczą, ile razy nauczyciel uderzy w bębenek.
Dzieci mają pudełka z klockami. Wrzucają do nich kolejne klocki, głośno je licząc.
Ile klocków wrzuciły do pudełka?

PRZEDSZKOLE / SZKOŁA

szacowanie

dzieci ustalają liczebność zbioru „na oko", szacują ile jest

Nauczyciel pokazuje duży słoik do połowy wypełniony klockami.
Dokłada klocki, tak żeby zapełnić słoik.
Nie liczy klocków, które wrzuca i zastanawia się, jak wiele klocków w nim jest.
Dzieci szacują, ile jest klocków w słoiku.
Mogą na kartce narysować tyle kresek, ile uważają, że jest klocków w słoiku.
Potem sprawdzają, czy miały rację.
Na każdej kresce kładą klocek ze słoika.

PRZEDSZKOLE / SZKOŁA

KODOWANIE I DEKODOWANIE LICZEBNOŚCI ZBIORU

dzieci kodują liczebność zbioru za pomocą kresek: 1 liczony obiekt – 1 kreska. Korzystają z zasady jeden do jednego
dzieci dekodują – odczytują liczbę obiektów zakodowaną kreskami

Nauczyciel stawia pudełko z zabawkami.
Dzieci mają policzyć i zakodować, ile jest zabawek każdego rodzaju.
Na kartce z rysunkiem misia rysują tyle kresek, ile misiów jest w pudełku.
Wyjmują misie i za każdym razem, rysują kreskę.
Podobnie postępują z innymi rodzajami zabawek.
Na koniec korzystając z zapisów liczebności (kartek z kreskami) odpowiadają na pytania:
Jakie zabawki były w pudełku? Ile było misiów? Ile było lalek?
Czy były w pudełku były jakieś piłki?
Dzieci wrzucają do pudełka tyle klocków, ile kropek narysowanych jest na kartoniku.

PRZEDSZKOLE / SZKOŁA

LICZENIE DO PRZODU I DO TYŁU OD DANEJ LICZBY

dzieci uczą się liczyć do przodu, a potem wstecz

Dorosły liczy cicho. Dzieci mówią STOP. Nauczyciel wskazuje na której liczbie skończył liczyć i od tej liczby wybrane dziecko liczy dalej do przodu, albo wstecz. Dzieci potrafią już odczytywać liczby zapisane cyframi. Liczą do przodu, do tyłu od danej liczby, wskazując kolejne liczby na przykład na chodniczku liczbowym.

SZKOŁA

LICZENIE PO 1, PO 2, PO 3, PO 10

dzieci uczy się liczyć po ileś

Dzieci mają kilkanaście kamyków (początkowo powinna to być liczba parzysta).
Liczą, ile jest kamyków wrzucając po 2 do woreczka.
Dzieci liczą obiekty, które naturalnie występują parami, na przykład buty, rękawice.

Dzieci mają dużo patyczków. Muszą je policzyć. Grupują po 3 i próbuje liczyć trójkami.

Dzieci liczą obiekty na rysunku, które są narysowane w sposób ułatwiający liczenie po 2, po 3 (zgrupowane).

Dzieci mają bardzo dużo patyczków.
Grupują po 10, a każdą dziesiątkę patyczków łączą gumką recepturką.
Liczą, ile jest dziesiątek.
Liczą patyczki z dziesiątkami, oczywiście z dużą pomocą dorosłego.

3.3. Liczby naturalne. porównywanie liczebności

Początkowo dzieci „na oko” określają gdzie jest więcej a gdzie mniej obiektów. Więcej jest tu, gdzie obiekty zajmują większą przestrzeń, są większe. Zresztą bardzo podobnie oceny dokonują dorośli, szczególnie wtedy kiedy chcą się tylko zorientować, bez potrzeby precyzyjnego ustalania liczebności i dokładnego ich porównywania.

Kiedy ludzie nie wynaleźli jeszcze liczb musieli bez nich oszacować różnice wielkości, na przykład czy oddział atakujących ich wrogów jest większy czy mniejszy od ich oddziału. Decydujące znaczenie miała zdolność do szacowania ważnych liczebności i porównywanie ich, czyli określanie przybliżeń i ocena ich proporcji. Wraz z doskonaleniem wynalazku liczby, podobnie jak z postępującą u dziecka umiejętnością posługiwania się abstrakcyjną liczbą – liczenie wypiera określanie „na oko”, gdzie jest więcej, a gdzie mniej obiektów. Ale nie do końca. Często posługujemy się **szacunkowym porównywaniem liczebności**. W supermarkecie, gdy wybieramy kasę, do której staniemy, to raczej „na oko” określamy, gdzie stoi najmniej klientów. Nie liczymy, ile dokładnie osób stoi w każdej kolejce, a potem nie porównujemy, gdzie jest ich najmniej. Szacunkami posługujemy się też przy obliczeniach czasowych. Zapytani, ile czasu zajął nam dojazd do pracy, odpowiadamy, że około 20 minut, a nie 22 minuty i 33 sekundy.

Liczby naturalne na osi liczbowej rozmieszczone są równomiernie, linearnie: na przykład zaznaczamy kolejne liczby na osi co 1 cm. Jednak nie od początku dziecko tak spostrzega rozmieszczenie liczb. Im większa liczba, tym wydaje się dziecku, że odległości między liczbami są mniejsze. Jest to **logarytmiczne pojmowanie liczebności**. Małe dzieci uważają, że większe liczby znajdują się bliżej siebie niż mniejsze liczby. Oczywiste dla nich jest, że odległość między 1 a 5 jest o wiele większa niż między 11 a 15. Dzieci, które nie potrafią posługiwać się jeszcze abstrakcyjną liczbą, nie mają innego wyboru niż szacowanie proporcji. Najpierw posługują się przybliżeniami i proporcjami „na oko“, a potem dopiero precyzyjnymi liczbami i proporcjami między tymi liczbami. Rozwój umiejętności liczenia, poznawanie nazw liczb i ich symboli powoduje, że dziecko zaczyna spostrzegać liczby coraz bardziej linearnie[91]. Głęboko zakorzenione logarytmiczne postrzeganie liczb ujawnia się i u dorosłych, gdy posługują się na przykład czasem, czy bardzo dużymi liczbami. Często wydaje nam się, że im starsi jesteśmy tym czas biegnie szybciej, ale wczorajszy dzień wydaje nam się dłuższy niż cały ubiegły tydzień. Dobrze rozumiemy różnicę między 1 a 10, ale słabiej między 1 miliardem a 10 miliardami. Różnica jest ogromna, a my postrzegamy obie te wielkości bardzo podobnie. Często zamiennie używa się określenia milioner i miliarder, tymczasem miliarder jest 1000 razy bogatszy od milionera[92].

[91] Badania na ten temat przeprowadzili w 2004 roku Robert Siegler i Julie Booth z Carnegie Mellon University w Pittsburghu. A. Bellos: Przygody Alexa w krainie liczb. Podróże po cudownym świecie matematyki, Wyd. Albatros S.Kuryłowicz, Warszawa 2013, s. 32-33.

[92] Ibidiem, s. 23-25.

W PRZEDSZKOLU, W SZKOLE
Kiedy metoda „na oko" nie wystarcza do porównania liczebności zbiorów, dziecko stara się to robić bardziej precyzyjnie. Najłatwiej jest połączyć w pary obiekty z dwóch porównywanych zbiorów. Ten zbiór jest mniejszy, którego obiekty przy łączeniu w pary skończą się wcześniej.

Kiedy nie chodzi o to, żeby dziecko ustaliło liczebność porównywanych zbiorów wzrokiem (bez konieczności liczenia czy sparowania obiektów), liczba obiektów w zbiorze powinna być co najmniej większa od 5.

Kiedy dziecko doświadcza abstrahowania cechy liczebności od innych cech porównywanych obiektów, to warto mu dać wiele doświadczeń, w których na przykład obiektów mniejszych jest więcej, a większych mniej.
W przypadku posługiwania się metodą parowania najłatwiej jest manipulować przedmiotami, trudniej jest łączyć linią obiekty na rysunku a jeszcze trudniej „wykonywać" takie łączenie tylko w umyśle.

Porównywanie liczebności zbiorów przez łączenie obiektów w pary nazywa się **metodą parowania (sparowania)**. Taki sposób porównywania dostępny jest dziecku, nim nauczy się sprawnie liczyć i pozna nazwy kolejnych liczebników. Posługuje się tutaj zasadą jeden do jednego, która jest niezbędna do zrozumienia pojęcia liczby naturalnej, zwłaszcza w aspekcie kardynalnym.

W PRZEDSZKOLU, W SZKOLE
Kiedy dziecko sprawnie zaczyna liczyć, to przy porównywaniu liczebności zbiorów korzysta też z liczenia.
O wiele łatwiej jest dziecku porównać liczebności dwóch zbiorów, niż trzech. Dotyczy to zarówno metody sparowania, jak i przeliczania.
Dziecko opisuje słowami sytuację porównywania liczebności, na przykład 5 misiów to więcej niż 2 misie; 2 lalki to mniej niż 5 lalek; tu i tu tyle samo, po 6 piłek.

Stosowanie liczenia do porównywania liczebności zbiorów wymaga zastosowania bardziej skomplikowanych operacji niż w przypadku sparowania. Trzeba policzyć obiekty jednego zbioru i zapamiętać. Policzyć obiekty drugiego zbioru i zapamiętać. Przypomnieć sobie liczebności obu zbiorów i ustalić, która z liczb jest większa/mniejsza.

Najpierw dziecko porównuje liczebności obiektów należących do jednej klasy (tego samego rodzaju), na przykład porównuje liczebności klocków i klocków, misiów i misiów, czy lalek i lalek. Potem może porównywać liczebności obiektów należących do różnych klas, czyli na przykład liczbę lalek z liczbą misiów. To pierwsze kroki w abstrahowaniu cechy liczebność od innych cech.

Doświadczenia w porównywaniu liczebności zbiorów mają doprowadzić dziecko do umiejętności abstrahowania cechy[93] liczebność od innych cech. Ważna jest teraz liczebność, a nie kolor, wielkość, czy gatunek obiektów. Mieszanie klas (rodzajów porównywanych zbiorów, czy nawet przedmiotów w zbiorach) może być dla dziecka dużym utrudnieniem. Łatwiej porównywać liczebności obiektów jednorodnych, należących do tej samej klasy, najlepiej klasy podstawowej[94]. Łatwiej porównywać liczebności kubków czerwonych i kubków niebieskich, niż liczebności kubków i jabłek. Dla nie jednego dziecka kubki i jabłka to kategorie nieporównywalne. Dzieje się tak, dopóki liczebność jest jeszcze traktowana podobnie jak inne cechy jakościowe, dopiero „przeniesienie" **pojęcia liczba** do innej niż cechy jakościowe kategorii sprawia, że porównywanie liczebności nabiera sensu – także z punktu widzenia dziecka.

Kiedy dziecko opanuje już sposób porównywania liczebności zbiorów, zadania należy utrudniać tak, aby zwracało uwagę na liczbę obiektów, a nie na ich cechy. To bardzo trudne zadania. Są 4 duże czekolady i 6 malutkich czekoladowych cukierków. Czego jest więcej? Nie jednemu wydaje się, że oczywiście czekolady – więcej się jej zje niż cukierków. Tymczasem biorąc pod uwagę liczebności, więcej jest oczywiście cukierków, mimo że są małe.

W wielu miejscach w edukacji matematycznej można zaobserwować drogę: **od działania na liczbach opisujących rzeczywistość znaną dziecku, przez działania na samych liczbach, następnie działania na liczbach mianowanych związanych z opisem różnych miar po wyrażenia algebraiczne**. Dziecko w przedszkolu porównuje liczebności tego co dla niego jest konkretne: liczbę misiów z liczbą misiów, liczbę lalek z liczbą mi-

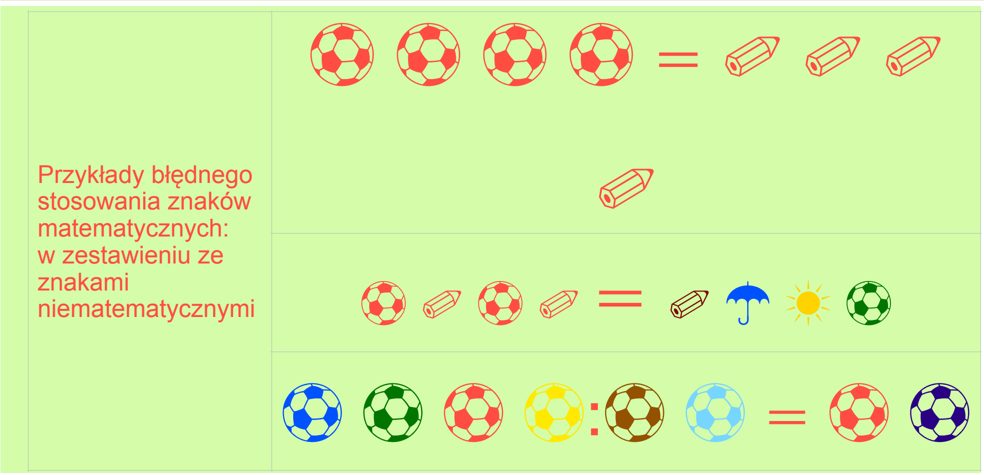
[93] Początkowo liczebność jest traktowana przez dziecko jak inne cechy jakościowe, więcej na ten temat piszemy w części poświęconej klasyfikacji, rozdział 2.1.

[94] Więcej o hierarchii w klasyfikowaniu piszemy w rozdziale 2.1.

siów, liczbę dużych klocków z liczbą małych klocków. Potem w porównywaniu liczebności abstrahuje samą liczbę: 4 to więcej niż 3, 4 > 3. Kiedy poznaje jednostki pomiaru, wraca do porównywania liczb opisujących rzeczywistość, teraz opisaną różnymi mianami – długości, ciężaru, pojemności, powierzchni, czy czasu. To są już bardzo trudne zadania, gdyż wymagają nie tylko biegłości w posługiwaniu się liczbami, ale też biegłości w posługiwaniu się mianami i hierarchii tych mian (1 cm to 10 mm, 1 m to 100 cm, 1 km to 1000 m itd.). 35 litrów jagód to nie jest tyle samo co 35 kg jagód: 35 litrów jagód nie waży 35 kilogramów. Można zapisać 35=35, ale kiedy dodamy miana to 35 litrów jagód nie równa się 35 kg jagód. Tego typu doświadczenia są podstawą do zrozumienia zawiłości algebry 4 a = 4 b, tylko kiedy a = b. Ale może być też tak 4 a > 4 b, z tego wniosek, że a > b.

W PRZEDSZKOLU, W SZKOLE

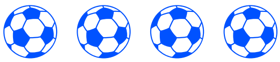
Jeżeli dziecko radzi sobie ze stosowaniem prostych symboli, można pokazać mu zapis znaku „=", pamiętając, żeby dziecko umieszczało kartonik z tym znakiem między kartonikami z cyframi lub z figurami liczbowymi[95]. Nie jest właściwym umieszczanie znaku = (podobnie jak innych symboli matematycznych: +, -, <, >) między rysunkami, na przykład biedronek. W zapisie formuły matematycznej należy stosować tylko znaki z języka matematyki. Rysunki, na przykład biedronek, nie należą do języka matematyki.



Metodą łączenia w pary lub liczenia, dzieci w przedszkolu ustalają, w którym zbiorze jest więcej/mniej obiektów. W klasie I poznają sposób zapisu relacji równości i nierówności liczebności. Uczą się stosować **znak =**[96], który umieszczają między liczbami i wyrażeniami o tej samej wartości oraz znaki <, >. W szkole wszystkie te trzy znaki (=, <, >) dzieci poznają razem. Uczą się symbolicznie zapisywać sytuacje, które dobrze znają z działań w realnym świecie: tyle samo, więcej, mniej.

[95] O figurach liczbowych piszemy w rozdziale 3.4 Liczby naturalne. Aspekty liczb naturalnych.

[96] Autorstwo znaku „=" przypisuje się walijskiemu matematykowi i fizykowi Robertowi Recorde. Opisał go w następujący sposób: „Nakreślę, jak to czynię w pracy, parę linii równoległych albo bliźniaczych, tej samej długości, w ten sposób: = =, ponieważ żadne 2 rzeczy nie mogą być bardziej sobie równe". Robert Recorde po raz pierwszy użył znaku = w książce The Whetstone of Witte wydanej w 1557 roku. www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Recorde.html

	tyle samo	
3	=	3
	ołowków jest więcej	
4	>	3
	niebieskich jest mniej	
4	<	5

Ważne jest, żeby dziecko nauczyło się porównywać obiekty pod względem określonych cech, pomijając pozostałe cechy. Zbiór lalek i misiów można porównywać pod względem liczebności, pomijając wygląd zabawek.

Znak „=" odnosi się nie do identyczności, ale do **równoważności**. Dziecko buduje dwie wieże z klocków o tej samej wielkości, ale różnych kolorach: jedna składa się z dwóch czerwonych klocków i jednego niebieskiego, a druga z jednego czerwonego i dwóch niebieskich. Liczba klocków jest taka sama, wielkość wieży jest taka sama, ale wieże nie są takie same. Można zapisać 3 = 3. Znak „=" odnosi się do liczby klocków, która w obu wieżach jest taka sama. Uwaga dziecka jest skoncentrowana na takiej samej liczbie klocków. Nie jest właściwym utożsamianie znaku „=" jako zapisu „tu i tu jest to samo". Każda z wież jest inna, choć w zapisie po obu stronach znaku równości będzie to samo. Zapis odnosi się jedynie do aspektu liczbowego sytuacji, inaczej mówiąc to opis sytuacji językiem matematyki.

Równość odnosi się też do **przekształcenia**. Kiedy dziecko ma 3 klocki czerwone i 2 niebieskie, a następnie je połączy, to razem jest 5 klocków. Zapisze to jako 3 + 2 = 5. Znak „=" będzie reprezentował pewne przekształcenie. Uwaga dziecka w tym przypadku będzie skoncentrowana na przekształceniu. Później dzieci testują i weryfikują działanie warunków równania, kiedy poddane zostaje transformacji, zauważając, niektóre z jego właściwości. Na przykład jeżeli po obu stronach znaku = doda się lub odejmie tę samą liczbę, to wyrażenia po obu stronach równania nadal będą sobie równe
(5 + 2 = 7, a też 5 + 2 + 3 = 7 + 3).

W PRZEDSZKOLU, W SZKOLE
Kiedy dzieci porównują liczebności zbiorów przez sparowanie, warto obiekty z dwóch zbiorów układać w rzędy, jeden obok drugiego.
Łatwo wtedy zobaczyć nie tylko, w którym zbiorze jest więcej/mniej obiektów, ale też o ile jest więcej/mniej obiektów.
Dzieci porównują liczbę klocków i kasztanów.

Układają w rzędzie klocki. Obok każdego klocka kładą kasztan, okazuje się, że dla 3 klocków zabrakło kasztanów.
Znaczy to, że klocków jest o 3 więcej niż kasztanów, a kasztanów jest o 3 mniej niż klocków.
Nauczyciel opisuje sytuację słowami i gestami.

Ustalanie o ile jest więcej/mniej obiektów w porównywanych zbiorach to **porównywanie różnicowe**. Dziecko ustala o ile obiektów jest mniej w jednym zbiorze niż w drugim, a jednocześnie o ile więcej jest obiektów w drugim zbiorze niż w pierwszym.

Doświadczenia (zadania) rozwijające

w zakresie umiejętności porównywania liczebności

PRZEDSZKOLE I SZKOŁA
posługiwanie się pojęciami „to samo", „tak samo", „tyle samo"
dzieci uczą się różnicować sytuacje, w których jest to samo, albo tak samo, albo też tyle samo

Nauczyciel rysuje na tablicy prosty domek. Dzieci rysują na kartce tak samo.
Nauczyciel rysuje drzewo. Dzieci rysują to samo, ale nie takie samo. Czyli rysują drzewo, ale inne niż nauczyciel.

Nauczyciel rysuje 3 kółka. Dzieci rysują tyle samo kółek. Nauczyciel rysuje 4 gwiazdki, a dzieci rysują tyle samo, ale czegoś innego. Na przykład rysują 4 kreski.

PRZEDSZKOLE
porównywanie liczebności zbiorów obiektów, które należą do jednej klasy, a potem należą do różnych klas
dzieci, zazwyczaj metodą sparowania, ustalają, w którym zbiorze jest więcej/mniej obiektów

Dzieci porównują liczebności swoich misiów i misiów kolegi;
Dzieci porównują liczebności lalek i misiów

PRZEDSZKOLE
porównywanie liczebności zbiorów najpierw bez liczenia, czyli „na oko", a następnie precyzyjne ustalenie, w którym zbiorze jest więcej/mniej obiektów poprzez sparowanie
dzieci przekonują się, że porównywanie liczebności zbiorów „na oko" może być zawodne

Dzieci bawią się klockami. Liczą, ile mają klocków.
Ustalają, czy mają mniej, czy więcej klocków niż kolega. Ile mają czerwonych klocków? Więcej, czy mniej niż kolega? A ile mają długich klocków? Mniej, czy więcej niż kolega?
Dzieci mają stos klocków. Ustalają, czy mają tyle samo klocków, co kolega.
A może mają więcej lub mniej?
Ile muszą wziąć klocków, żeby mieć tyle samo co kolega?

Dzieci mają klocki i nauczyciel ma klocki.
Nauczyciel i dzieci budują wieże ze swoich klocków.
Dzieci liczą, z ilu klocków nauczyciel zbudował wieżę. Z ilu one zbudowały wieżę.
Kto zbudował wieżę z mniejszej/większej liczby klocków?
Czy można zbudować wieżę, w której będzie tyle samo klocków, co w wieży nauczyciela?

PRZEDSZKOLE
porównywanie liczebności zbiorów obiektów, których cechy mogą utrudniać ustalenie, czego jest więcej, a czego mniej
dzieci porównują liczebności zbioru małych obiektów oraz zbioru dużych obiektów. Wielkość obiektów może utrudnić dziecku skoncentrowanie się na liczebności, bo pierwszeństwo będzie miała ocena wzrokowa

Dzieci mają 7 dużych klocków plastikowych oraz 10 małych klocków drewnianych.
Mają ustalić, czego jest więcej, klocków drewnianych czy plastikowych.
Dzieci mają 6 dużych jabłek i 9 rodzynek.
Ustalają, czego mają więcej: jabłek czy rodzynek.

PRZEDSZKOLE
tworzenie zbiorów o takiej samej liczbie obiektów
dzieci uczą się konstruować zbiory o takiej samej liczbie obiektów. Mogą to robić na dwa sposoby przez policzenie obiektów lub przez połączenie w pary obiektów z obu zbiorów

Dzieci wyjmują kilka czerwonych klocków.
Mają wyjąć tyle samo niebieskich klocków.
Dzieci liczą, ile mają talerzyków. Wyjmują tyle samo kubeczków.

PRZEDSZKOLE
tworzenie zbiorów o większej lub mniejszej liczbie obiektów
dzieci uczą się konstruować zbiory o mniejszej lub większej liczbie obiektów. Mogą to robić przez policzenie obiektów lub przez połączenie w pary obiektów z obu zbiorów

Dzieci wyjmują kilka czerwonych klocków.
Mają wyjąć więcej/mniej niebieskich klocków.

3.4. Liczby naturalne
Aspekty liczb

Pierwsze wyobrażenia liczbowe wyłaniają się z **codziennych doświadczeń**. Dzieci obserwują i naśladują dorosłych, czy starsze dzieci. Chcą liczyć, tak jak oni. Wyłaniają liczebniki wraz z zasłyszanym kontekstem: mam 4 lata, film jest o godzinie piątej. Widzą też wokół siebie zapisane cyframi liczby: godziny na tarczy zegara, daty w kalendarzu, numery autobusów, numery stron w książce, rejestracje samochodów, liczby na pilocie do telewizora.

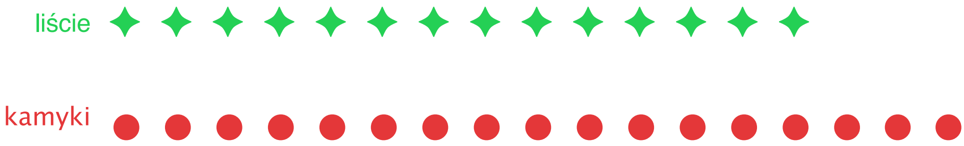
Dziecko rodzi się z intuicją liczby[97]. Posługiwanie się tą intuicją pozwala konstruować abstrakcyjne pojęcie liczby. Dzieje się to już na długo przed tym, nim dziecko pójdzie do przedszkola. Na początku korzysta z różnych strategii, aby oszacować liczebność i podaje ją w przybliżeniu, stosując nieprecyzyjne określenia, typu dużo, mało, wiele, kilka, trochę. Następnie uczy się posługiwać liczbami niezależnie od jakościowego wyglądu obiektów, biorąc pod uwagę to, że występują pojedynczo oraz jako całości zbudowane z jedności. Porównuje liczebności zbiorów i wnioskuje o równości lub nierówności między liczebnościami. Liczbę zaczyna traktować jako wyraz porządku, jako element pewnej serii. Stopniowo następuje interioryzacja pojęcia liczba – dziecko odrywa się od realnych obiektów i potrafi posługiwać się liczbami na poziomie abstrakcji. Jednocześnie uczy się korzystania z symboli i różnych konfiguracji tych symboli, aby reprezentować liczby i stosunki między nimi. Uczy się rozumieć umowność i arbitralność znaków matematycznych. Ma to ogromne znaczenie użytkowe. Dzieje się to wszystko na przestrzeni przedszkola oraz pierwszych lat nauki szkolnej.

Wiele razy w ciągu dnia dziecko ćwiczy liczenie, naśladując przy tym dorosłych. Zresztą dorośli chętnie wspierają dzieci w tych czynnościach, gdyż posługiwanie się liczbami przez małe dziecko uznaje się powszechnie za symbol rozwoju intelektualnego. Rozumienie liczby jest jeszcze bardzo powierzchowne, mało uświadomione, pełne błędów, nieuogólnione. W tym czasie trwa w umyśle dziecka intensywny proces budowania pojęcia liczby, który będzie podstawą do tego, by później korzystało z liczb w coraz większym zakresie, wykonywało na nich coraz bardziej skomplikowane obliczenia i korzystało z liczb do rozwiązywania coraz bardziej złożonych problemów.

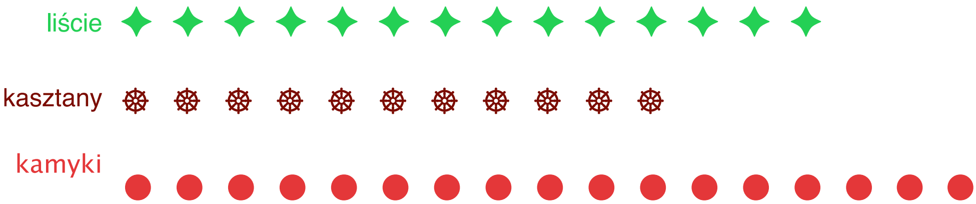
W PRZEDSZKOLU, W SZKOLE

Dzieci zbierają w ogrodzie kasztany, kamyki i liście. Składają swoje znaleziska w jednym miejscu, porządkując: osobno kasztany, osobno liście osobno kamyki.
Próbują na oko ocenić czego jest najwięcej, a czego jest najmniej.
Każdy podaje swój szacunek. Okazuje się, że są różne typowania.
Trzeba sprawdzić kto dobrze ocenił, a kto się pomylił. Jak to można sprawdzić? Łatwiej będzie najpierw sprawdzić czy więcej jest liści czy kamyków.

[97] Pojęcie intuicja liczby można traktować jako zbliżone do pojęcia zmysł liczby, o którym więcej piszemy w rozdziale 3.1.



lišci jest mniej, kamyków jest więcej



kasztanów jest najmniej, liści jest więcej, kamyków jest najwięcej

Liczby kardynalne wyrażają moc zbioru, opisują, ile czegoś jest. Na stole stoją 4 kubki, autobusem jedzie 12 pasażerów, po boisku biega 22 piłkarzy. Dorośli najczęściej używają liczb kardynalnych przy uczeniu małych dzieci liczenia.

Liczby w aspekcie kardynalnym odgrywają także w przedszkolu uprzywilejowaną rolę, tymczasem dziecko bardzo wcześnie zaczyna wprowadzać porządek: ten jest pierwszy, a ten drugi. Może dziać się to wcześniej, niż zacznie używać liczb jako odpowiedź na pytanie „ile jest?”. Posługując się liczebnikami porządkowymi dziecko łatwo zauważa, że każda liczba ma swoje towarzystwo – liczbę poprzedzającą i liczbę następną. Trzeba pamiętać o tym, że liczby nabierają dla dziecka znaczenia wtedy, gdy występują w szeregu liczbowym, podobnie jak litery w wyrazie, czy nuty w zapisie melodii. Przy liczeniu z zastosowaniem liczebników porządkowych prosta jest też do zastosowania zasada jeden do jednego – jeden gest, jeden wypowiedziany liczebnik, jeden określony obiekt w uporządkowanym ciągu. W przypadku liczebników kardynalnych sytuacja nie jest już tak jednoznaczna: jeden gest, jeden wypowiedziany liczebnik, który informuje, ile do tej pory razem policzono obiektów.

Problemem nawet dla kilkuletniego dziecka może być **podwójna rola ostatniego wypowiedzianego liczebnika**: ostatni obiekt w liczonym szeregu jest ósmy, co oznacza, że wszystkich policzonych obiektów jest osiem.

W PRZEDSZKOLU, W SZKOLE
Dzieci ustawiają z krzeseł pociąg. Najpierw krótki pociąg, dla trzech pasażerów.
Ustawiają krzesła jedno za drugim: pierwsze, drugie i trzecie. Ile jest wszystkich krzeseł?
Pociąg okazuje się za krótki, trzeba dostawić jeszcze dwa krzesła.
Ile teraz krzeseł stoi w pociągu?
Trzeba dostawić jeszcze pięć krzeseł. Ile teraz jest krzeseł w pociągu?

Liczby porządkowe wyrażają uporządkowanie, hierarchię, następstwo w czasie, stosunki przestrzenne. Gdy na pudełku z batonikami widzimy napis 7, to rozumiemy, że jest w nim 7 batoników. Gdy w pociągu zobaczymy przedział oznaczony numerem 7, to nie pomyślimy, że siedzi w nim 7 osób, tylko, że jest to siódmy przedział od początku wagonu. W poczekalni wielu pacjentów czeka na swoją wizytę u lekarza. Każdy wie za kim jest i kto przed nim stoi. Numerujemy pacjentów od początku kolejki. Zatem pierwszy w kolejce czeka najdłużej, ale teraz najszybciej wejdzie do lekarza. Przychodzi kolejny pacjent i staje na końcu kolejki. Praktycznie nic się nie dzieje. Było dużo ludzi, jest ich nadal dużo, a porządek nie uległ zmianie. Co się dzieje, gdy koś chce dostać się bez kolejki, stając na jej początku? Osoba, która była pierwsza staje się drugą, druga trzecią itd. Nadal jest wielu pacjentów i numeracja zmienia się. Podobnie dzieje się, gdy nowy pacjent wchodzi do kolejki, przypuśćmy jako czwarty. W tej sytuacji numeracja osób, które są przed nim nie zmieni się, za to zmieni się numeracja osób, które będą za nim.

W języku polskim pierwsze dwa liczebniki kardynalne różnią się w nazwie od porządkowych: jeden – pierwszy, dwa – drugi. Kolejne liczebniki też różnią się w nazwie od kardynalnych, ale są już łatwiejsze do rozpoznania. Inne nazewnictwo oddaje inną funkcję liczb porządkowych: wyrażają one hierarchię, następstwo, a nie liczebność. Dzieci mogą mieć kłopoty z wypowiadaniem nazw liczebników porządkowych.

W PRZEDSZKOLU, W SZKOLE

Dzieci ustawiają się „w kolejkę" do okienka, w którym do odebrania jest coś bardzo ciekawego. Trzeba w kolejce zaprowadzić porządek i dokładnie ustalić, kto jest który.
Każdy dostaje numerek, na którym zapisane są kolejne liczby: 1, 2, 3, 4 …
Wszystkie dzieci w kolejce, po kolei dostały numerki.
Pierwsze dziecko dostało numer 1, drugie dziecko dostało numer 2, trzecie dziecko dostało numer 3 i tak do ostatniego dziecka, które jest dziewiąte – to dziecko dostało numer 9.
Ile jest wszystkich dzieci? Tyle ile numerków, jest ich 9.
Jaki numer ma ostatnie dziecko? Ile dzieci stoi przed dzieckiem z numerem 4? Ile dzieci stoi za dzieckiem z numerem 6? Jaki numer ma dziecko które stoi przed dzieckiem z numerem 3?
Do kolejki przyszło jeszcze jedno dziecko. Zajmie miejsce za dzieckiem z numerem 7. Jaki numer będzie miało? Czyje numery trzeba zmienić? Czy te dzieci które stoją na początku, z numerami od 1 do 7 muszą zmieniać swoje numery? Czy dzieci które stoją dalej, te które mają numery 8 i 9 muszą zmieniać swoje numery, kiedy w kolejce pojawia się nowe dziecko, po numerze 7?
Dziecko z numerem 1 już odebrało z okienka to co było do odebrania, teraz pierwsze jest dziecko z numerem …? Trzeba zmienić numery, każdy musi przekazać swój numer temu kto stoi za nim.

Dziecko bez liczenia podaje liczbę obiektów w zbiorze. Potrafi to zrobić w zakresie 4. Jeżeli ma w ten sposób rozpoznać większe liczebności trzeba mu je pokazać w stałym układzie. Służą do tego tak zwane **figury liczbowe**. Są to konkretne obrazy liczb stworzone za pomocą zbioru znaków, najczęściej kropek, w stałym układzie[98]. Taki stały układ odróżnia figury liczbowe od przypadkowego zobrazowania liczby za pomocą liczmanów. Daje jasny, jednoznaczny obraz liczby jako jedności wielu jedności[99].

Figura liczbowa ma pozwolić dziecku przez dłuższy czas zachować związek nazwy liczby, a potem też obrazu cyfry, z konkretnym wyobrażeniem liczby. Z biegiem czasu, wraz z rozwojem intelektualnym dziecka, obraz cyfry zastąpi układy kropek. Dorosły, kiedy usłyszy osiem, wyobraża sobie zapis za pomocą cyfr, a nie układ kropek. Dla dziecka ważne jest utrwalenie związku nazwy liczby z jej konkretnym wyobrażeniem, zanim zacznie sprawnie posługiwać się cyframi.

Dziecko powinno dostać wiele doświadczeń z piątkowymi figurami liczbowymi, czyli takim układem kropek, który oparty jest na piątce. W takim układzie dziesiątka składa się z dwóch piątek. Jest to układ kropek tradycyjnie występujący na sześciennych kostkach do gry.

Dzieci poznają też liczbę w **aspekcie symbolicznym**, czyli uczą się kodować liczby cyframi. Cyfra to przyjęty na oznaczanie liczb znak, czyli symbol liczby. Ważne jest, żeby nauczyciel we właściwym znaczeniu używał określeń liczba i cyfra.

W przedszkolu dziecko raczej samo nie zapisuje cyfr, zwłaszcza długopisem czy ołówkiem. Może to niekorzystnie wpływać na zdobywanie biegłości w pisaniu. To nie znaczy, że dziecko ma nie próbować kodować liczebności cyframi. Może korzystać z kartoników z cyframi, stempelków, a też może samo próbować zapisywać cyfry grubym pędzlem, palcem zanurzonym w farbie, czy kredą na chodniku. Ważne, żeby robiło to z własnego wyboru, nie przymuszane przez dorosłego. Metodyka uczenia dzieci zapisu cyfry jest taka sama jak metodyka uczenia zapisu litery.

W PRZEDSZKOLU, W SZKOLE

Na stole leżą kartoniki z cyframi. Nauczyciel prosi: Podaj mi kartonik z cyfrą, która oznacza liczbę 5. Dbałość o właściwe stosowaniu obu określeń to w tym przypadku nie pedanteria, ale troska o to, żeby dziecko zrozumiało cyfrę jako symbol liczby. Łatwiej mu będzie wtedy, gdy zacznie posługiwać się liczbami dwucyfrowymi, czyli liczbami kodowanymi za pomocą dwóch cyfr.

Dzieci wcześniej poznają liczbę niż jej znak graficzny, cyfrę. Dlatego, jeżeli nauczyciel będzie prawidłowo określał oba pojęcia, to dzieci nie powinny mieć kłopotów w rozróżnianiu między liczbą a cyfrą. Pojęcie cyfry powiąże z zapisywaniem, ze znakowaniem. Dobrze skonstruowane pojęcie cyfry będzie podstawą do zrozumienia formuły, czyli zapisu działań[100].

98 L. Jeleńska: Metodyka arytmetyki i geometrii w pierwszych latach nauczania, op. cit., s. 141.

99 por.Ibidem, s. 10.

100 Ibidem, s. 16 - 17.

Liczba naturalna występuje również w **aspekcie arytmetycznym** – każdą można przedstawić w postaci działania arytmetycznego. Na początku dzieci przedstawiają liczbę w postaci dodawania lub odejmowania, w dalszych latach nauki dojdzie jeszcze mnożenie i dzielenie, a pod koniec szkoły podstawowej i w gimnazjum też potęgowanie i pierwiastkowanie.

W PRZEDSZKOLU, W SZKOLE
Podstawą posługiwania się liczbą w aspekcie arytmetycznym jest umiejętność rozkładania liczby na składniki. Dziecko wyjmuje 6 klocków – rozkłada je na 4 i 2 klocki. Sześć to 4 i 2. Jak będzie już zapisywało formuły matematyczne, opisze sytuację 6 = 4 + 2. Też dolicza i odlicza tyle obiektów, aby była ich wskazana liczba. Ma 3 kamyki, ile trzeba dołożyć, żeby było ich 5. 3 + 2 = 5.

W **aspekcie miarowym** liczba oznacza, ile razy w danej wielkości mieści się wielkość jednostkowa. Sznurek ma długość 12 cm, co oznacza, że odcinek o długości 1 cm możemy w nim odmierzyć 12 razy. Aspekt miarowy związany jest z mierzeniem różnych wielkości – długości, powierzchni, objętości, masy, czasu. W edukacji matematycznej aspekt miarowy służy nie tylko do kształtowania pojęcia liczby naturalnej, ale też jest podstawą wprowadzania ułamków, liczb całkowitych i rzeczywistych. Aspekt miarowy uważany jest za jeden z najtrudniejszych spośród tych, które pojawiają się w przedszkolu. Dzieje się tak z kilku powodów: pomiar dokonywany przez przedszkolaka jest zawsze przybliżony, zależy od dokładności, która na ogół nie daje wartości całkowitej; wynik pomiaru może nie być liczbą naturalną i zależy od wyboru jednostki. Dziecko mierzy długość sali: najpierw krokami – „21 kroków i jeszcze trochę", potem sprawdza ile zmieści się patyków o takiej samej długości ułożonych jeden za drugim – prawie 26, na koniec mierzy długością klocka – dokładnie 32.

W PRZEDSZKOLU, W SZKOLE
Bardzo trudnym dla dziecka jest **aspekt miarowy liczby**, który związany jest z podawaniem wyniku mierzenia określonej wielkości. Dla prawidłowego zrozumienia aspektu miarowego liczby można używać takich zwrotów jak „prawie cztery", „cztery i jeszcze trochę", „około czterech". Mierząc różne przedmioty dziecko powinno powtarzać pomiar ze zmianą jednostki. Dzięki temu może zobaczyć zależność wyniku pomiaru od wybranej jednostki.

Liczba występuje też w aspekcie kodowym. Numery linii tramwajowych, numer konta bankowego, NIP, PESEL numery serii na banknotach – we wszystkich tych przypadkach liczby występują w tym aspekcie. Tylko w niektórych przypadkach ważne jest, że zapisano je cyframi. Mogłyby je z powodzeniem zastąpić inne symbole, na przykład litery. Po mieście jeżdżą tramwaje. Zlikwidowana zostaje linia tramwajowa numer 6 – nie trzeba w tej sytuacji zmieniać numeracji pozostałych linii. Numer 6 w tym przypadku oznacza, że tramwaj jeździ z punktu A do punktu B, a nie to, że jest on szósty w jakimś porządku. Z powodzeniem można by zastąpić „6" literą „G" lub znakiem „✈".

Zdarza się, że dzieci spotykają się z liczbami, które występują wyłącznie w postaci jakiegoś kodu, na przykład żeby wejść do domu muszą nacisnąć w określonej kolejności przyciski z cyframi na klawiaturze domofonu.

Zero – szczególnie trudna dla dzieci liczba

W dziesiątkowym systemie pozycyjnym, którym się posługujemy stosujemy **zasadę „pozycjonowania"**. Każdy rząd wielkości, na przykład jedności, dziesiątki czy tysiące, ma swoje miejsce. Cyfra w zapisie, wskazuje wartość, odpowiednio: jedności, dziesiątek czy tysięcy. Gdy stosuje się zasadę pozycyjną, trzeba mieć do dyspozycji jakiś znak oznaczający, że jednostek pewnego rzędu w danej liczbie nie ma. Stopniowo uświadomiono sobie, że trzeba to nic czymś wyrazić, a dokładnie oznaczyć brak jednostek pewnego rzędu. W ten sposób wymyślono zero[101]. Kiedy na przykład jest dziesięć cukierków i chcielibyśmy ich liczbę zapisać cyframi, korzystając z dziesiątkowego systemu pozycyjnego, to zapiszemy liczbę cukierków jako 1 dziesiątkę i zero jedności. Liczba dziesiątek to 1, liczba jedności, których nie ma to zero. Posługujemy się zerem i zapisujemy 10. Liczba siedemset dwa, to siedem setek i dwie jedności. Zapisujemy: na pierwszym miejscu jest 7 (setki), na trzecim 2 (jedności), a między nimi 0 (dziesiątki). Ten przykład bardzo dobrze ilustruje jak bardzo abstrakcyjny jest ten sposób kodowania liczb.

Dla dziecka, które jeszcze nie abstrahuje liczebności (liczb) od rzeczy, do których liczby się odnoszą dziesięć cukierków to … dziesięć cukierków. Na te dziesięć cukierków składa się dziesięć pojedynczych cukierków – dziesięć jedności. Proces „zamiany" dziesięciu cukierków, na jedną „paczkę", „wiązkę", którą można zapisać posługując się cyfrą 1 jest długotrwały i musi być oparty na bardzo wielu doświadczeniach. Dodatkowo, po raz kolejny, mamy tu do czynienia z bardzo relatywnym charakterem symboli w matematyce. Cyfra 1 (podobnie jak każda inna cyfra), zależnie od miejsca w zapisie koduje bardzo różne liczby. Inna jest wartość zapisana tylko przy użyciu cyfr 1 i 0 o obrazie 10 a inna o takim 1 000 000. To czego dziecko powinno się nauczyć, by dobrze posługiwać się językiem matematyki, to przede wszystkim to, że symbole matematyczne, których jest stosunkowo niewiele mogą nieść bardzo różne informacje zależnie od kontekstu. A kontekstem tym są najczęściej inne znaki matematyczne. Często bywa tak, że stosowane w matematyce symbole, są zaczerpnięte z innych języków i alfabetów; co tylko potęguje trudność w ich stosowaniu. **Symboli w matematyce jest stosunkowo niewiele**. Zasadnicza trudność w sprawnym posługiwaniu się nimi przez dzieci tkwi w ich relatywnym użyciu. Czasem cyfra jeden będzie wskazywała, że jest bardzo dużo (1000), a czasem bardzo mało (1); czasem połowa to będzie bardzo dużo (połowa całego tortu), a czasem bardzo mało (połowa małej czekoladki).

Początkowo zero miało tylko za zadanie wypełnić puste miejsce powstałe wskutek „braku wartości" jakiegoś rzędu w liczbie wyrażonej ustnie lub w piśmie. Uczeni indyjscy wzbogacili pojęcie zera o znaczenie, jakie mu dziś głównie nadajemy – **zbiór pusty**.[102] Wynika z tego, że na początku liczba zero występowała w zasadzie tylko w aspekcie symbolicznym, potem dopiero w aspekcie kardynalnym i porządkowym.

Słowo zero nie mieści się w codziennym języku. Rzadko używamy tego słowa w domu, rzadko występuje w rymowankach, piosenkach, opowiadaniach, czy wierszykach. Rzadko używa się go też w zabawach. Typowym jest stosowanie określeń takich jak „nic", „nie ma", „pusty". Z tego powodu zero jest trudnym dla dziecka pojęciem. Utrwalenie myślenia o zerze jako o niczym jest konsekwencją przywiązywania zbytniej wagi do kardynalnego aspektu liczby.

101 G. Ifrah: Dzieje liczby czyli historia wielkiego wynalazku, op. cit., s. 184.
102 Ibidem, s. 222.

Liczba zero występuję oczywiście też w aspekcie porządkowym. Uczeń rysuje oś liczbową, początkowo wyłącznie z liczbami naturalnymi. Zaznacza liczby – pierwsza od lewej to zero. Zero na osi liczbowej ma taki sam status jak inne liczby. Staje się wręcz bardzo ważną liczbą. Jest często punktem początkowym, później oddziela liczby dodatnie od ujemnych, wskazuje parter w wysokich budynkach, wskazuje północ na zegarze cyfrowym, na termometrze jest punktem zamarzania, granicą między temperaturami dodatnimi a ujemnymi. Temperatura 0 stopni nie oznacza, że nie ma temperatury, piętro zerowe, też nie oznacza niczego. Piętro istnieje [103].

W PRZEDSZKOLU, W SZKOLE
Jeśli skoncentrujemy się na jednym tylko wymiarze liczby zero – na przykład, że zero oznacza „nic" – kosztem innego znaczenia, to zwiększa się prawdopodobieństwo, że dzieci będzie konstruowały zniekształcone pojęcie liczby zero. Trudno będzie dzieciom zrozumieć rolę zera w liczbie 10 i w innych liczbach, a też istotę liczb ujemnych[104].
Warto używać określeń wskazujących na liczbę zero. „Na półce nie ma książek, liczba książek na półce wynosi zero." „Nie mam cukierków, liczba cukierków wynosi zero" „Oddałem wszystkie balony, nie mam teraz ani jednego, jest zero balonów"

W rozwoju umiejętności posługiwania się liczbami można dostrzec związek z rozwojem mowy. Dziecko rozróżnia w języku liczbę pojedynczą i mnogą (lepiej mieć cukierki niż cukierka). Dziecko używa słowa drugi w znaczeniu do pary, a także w roli liczebnika porządkowego (jeden but i drugi but – para butów; ale drugi w kolejce do lekarza). Dziecko używa liczebnika jeden gdy wydziela jedności (tylko jeden: jeden cukierek i jeszcze jeden, i jeszcze jeden) oraz, gdy odróżnia jedność od wielości (mam tylko jeden cukierek czyli mało).

Ewoluuje rola liczebnika dwa: od określenia związanego z parą do określenia mocy różnych zbiorów dwuelementowych: dwie nogi, dwa buty. Kasia zjadła dwa placki.

Pojawia się początek rozumienia tego, że jeśli jest jeden i drugi, to są dwa. Dziecko uczy się nazw kolejnych liczebników (najpierw przelicza 1,2,1,2,1,2 – jeden, dwa, jeden, dwa, jeden, dwa …). Potem wzrasta liczba wypowiadanych liczebników w rytmicznych ciągach (1,2,3,7, 1,2,3,7, 1,2,3,7). Stopniowo rozbudowuje je do dłuższych ciągów, we właściwym porządku i próbuje zastosować do liczenia obiektów, odpowiednio przyporządkowując liczebniki liczonym przedmiotom. Dziecko uczy się nazw dużych liczb wraz z zasłyszanym kontekstem, na przykład sto złotych.

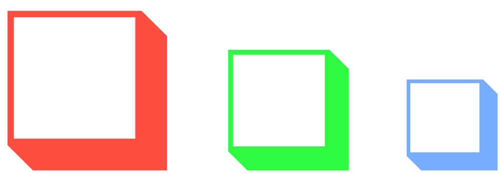
Bramą do wkroczenia w świat abstrakcyjnej matematyki jest **język**, który odgrywa kluczową rolę w rozwoju abstrakcyjnych pojęć liczbowych**.** Zdaniem E. Spelke **reprezentacje liczb mają charakter językowy[105].** Choć dzieci bardzo wcześnie uczą się wymawiać nazwy podstawowych liczebników to, do końca drugiego roku życia raczej nie potrafią przypisać im poprawnego znaczenia. Przełom dokonuje się w okolicach 3.roku życia. Wtedy zaczynają rozumieć, że liczebnik jeden odpowiada liczbie 1. Mniej więcej rok później

[103] D. Haylock, A. D. Cockburn: Understanding Mathematics for Young Children. op. cit., s. 22.
[104] A. D. Cockburn, G. Littler: Mathematical Misconceptions. A Guide for Primary Teachers, SAGE, Londyn, 2008, s. 8.
[105] E. S. Spelke: Natural Number and Natural Geometry w: Attention and Performance Vol. 24, Space, Time and Number in the Brain: Searching for the Foundations of Mathematical Thought, E. Brannon, S. Dehaene (red.), Oxford University Press, Oxford 2011, s. 313.

proces ten powtarza się dla kolejnych liczb i liczebników, aż do 4. Następnie umiejętność posługiwania się liczebnikami zwiększa się bardzo szybko. Dzieci uczą się rozwiązywać coraz trudniejsze zadania arytmetyczne. W ich umysłach tworzy się ogólna reguła, która pozwala na przyporządkowanie każdej kolejnej liczby do kolejnego liczebnika. Od mniej więcej 4.roku życia dzieci zaczynają zdawać sobie sprawę z dwóch aspektów liczby: kardynalnego i porządkowego. Wytworzone w ten sposób połączenia między liczbami i liczebnikami „nakładane" są na struktury symboliczne (graficzne przedstawienia liczb, czyli cyfry), których dzieci uczą się również dosyć wcześnie[106].

Pojęcie liczby rozwija się równolegle z rozwojem poznawczym dziecka. Liczba jest konstruowana przez dziecko krok po kroku. Ma związek ze stopniowym rozwojem umiejętności klasyfikowania i opanowaniem zasady inkluzji (hierarchii klas logicznych) oraz zasady relacji asymetrycznych (ustalanie konsekwentnych serii)[107]. Pojęcie liczby jest budowane na fundamencie bardziej podstawowych zdolności. Przede wszystkim jest to zdolność do oderwania się od fizycznych cech zbioru. W ocenie liczebności nie jest istotny kolor, wielkość, kształt, czy przeznaczenie.

W posługiwaniu się liczbą ważna jest też zdolność do rozumowania odwracalnego i przechodniego. Odwracalność jest związana z operacyjnym rozumowaniem, przede wszystkim z rozumieniem istoty zmian odwracalnych. O stosowaniu zasady przechodniości możemy mówić kiedy dziecko dostrzega, że pudełko **A (czerwone)** jest większe od pudełka **B (zielonego)**, a B (zielone) jest większe od **C (niebieskiego)**, to wie, że pudełko A (czerwone) jest większe od C (niebieskiego)[108]. Żeby stwierdzić, że niebieskie zmieści się w czerwonym, wystarczy mu ustalić zależność między czerwonym a zielonym oraz zielonym i niebieskim.



Najprościej oczywiście ustawić obok siebie trzy pudełka: czerwone, zielone i niebieskie. Ocenić: czerwone jest największe, zielone jest mniejsze a niebieskie jest jeszcze mniejsze. Czyli niebieskie jest najmniejsze oraz jest mniejsze od czerwonego. **To, co jest najistotniejsze z punktu widzenia rozwoju myślenia matematycznego, to „przeniesienie" tej operacji „do umysłu": wnioskuję o tym, czego nie widzę** (nie potrzebuję ustawiać pudełek, żeby wnioskować o ich wzajemnych relacjach i zależnościach). Wiem, że czerwone jest większe od zielonego oraz wiem, że niebieskie jest mniejsze od zielonego. Wnioskuję na podstawie tego co wiem, że niebieskie jest mniejsze od czerwonego.

Ta zasada odnosi się także do liczebności. Tego typu wnioskowań dziecko doświadcza kiedy na przykład ma ustalić ile pestek zostanie kiedy 8 dzieci (A – liczba dzieci) dostanie po jednej śliwce (B – liczba śliwek). Każde dziecko dostało jedną śliwkę i zjadło

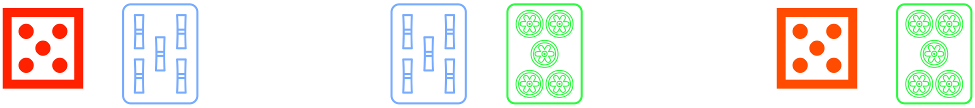
[106] B. Brożek, M. Hohol: Umysł matematyczny, op. cit., s. 87-88.

[107] J. Piaget: The Child's Conception of Number, op. cit.

[108] O rozwoju operacyjnego myślenia w zakresie ujmowania stałości liczby piszemy w rozdziale 2.4 Rozumowania matematyczne – stałość liczby, równoważności i transformacji.

ją. Pestek zostało 8 (C liczba pestek). A = B; B = C; A = C. Zaczyna też rozumieć (uznawać) stałość liczby[109].

Jeżeli czerwonych jest tyle samo co niebieskich, a niebieskich tyle samo co zielonych, to zielonych jest tyle samo co czerwonych.



Zarówno w przedszkolu, jak i w klasie I, dobrze jest, kiedy dziecko poznaje liczby w zestawach. Na przykład, razem liczby od 1 do 5, liczbę 0, liczby od 6 do 10, liczby drugiej dziesiątki, liczby trzeciej dziesiątki. Chodzi o to, aby dzieci widziały powiązania między liczbami – liczba nabiera pełniejszego sensu, gdy występuje w towarzystwie innych liczb, gdy widzą jej powiązanie z poprzednią i następną liczbą.

Przed monograficznym wprowadzaniem liczb naturalnych ważne jest, aby dziecko dostało porcję doświadczeń w zakresie:

- ustalania (uznawania) stałości ilości nieciągłych (stałość liczby),
- porządkowania obiektów w konsekwentne serie,
- wyznaczania równoliczności zbiorów,
- liczenia,
- ustalania miejsca liczby w szeregu liczb,
- dodawania i odejmowania na konkretnych przedmiotach, realnych obiektach.

Te wszystkie czynności intelektualne potrzebne są do tworzenia syntezy operacyjnej, którą jest pojęcie liczby naturalnej.

W pierwszej klasie uczniowie bardzo dużo czasu na zajęciach z edukacji matematycznej poświęcają monograficznemu opracowaniu liczb naturalnych, zwłaszcza liczb pierwszej dziesiątki. **Monograficzne ujęcie liczb** odrębnie traktuje każdą z liczb. Nauczyciele posługują się różnymi sposobami monograficznego opracowywania liczb pierwszej dziesiątki. Zaprezentujemy najbardziej tradycyjny sposób[110].

W PRZEDSZKOLU, W SZKOLE

Przypuśćmy, że dzieci poznają liczbę 8. Zaczynają od liczenia: przeliczają obiekty do 8. Odliczają 8 obiektów, czyli dobierają po jednym aż będą mieć 8 obiektów, czyli składają liczbę 8 z ośmiu jedności. Układają liczbę 8 z figur liczbowych. Konstruują liczbę 8 przez dodanie 1 do wcześniej poznanej liczby 7. Wykładają 7 liczmanów, podpisują je cyfrą 7. Dokładają jeszcze jeden liczman i zmieniają zapis cyfrowy. Poznają cyfrę 8 – analizują jej kształt, uczą się zapisywać. Dodają w zakresie 8. Jeżeli już potrafią, to zapisują działania dodawania w postaci formuły. Działając na przedmiotach rozkładają na różne sposoby liczbę 8 na składniki. Zapisują każdy nowy sposób rozłożenia liczby 8 na składniki. Na początku rozkładają na dwa, potem na trzy i więcej składników – „na ile się da".

[109] U. Oszwa: Psychologiczna analiza procesów operowania liczbami u dzieci z trudnościami w matematyce, Wyd. Uniwersytetu Marii Curie-Skłodowskiej, Lublin 2009, s. 20.

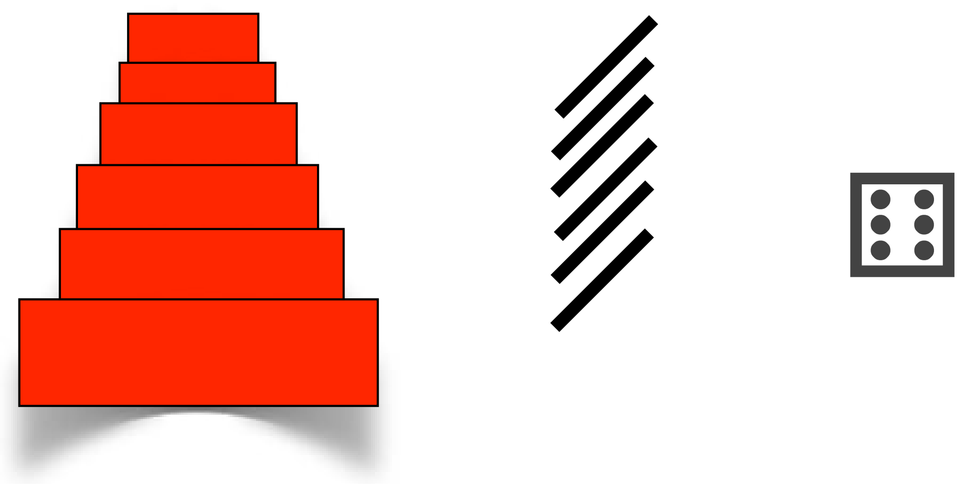
[110] por. L. Jeleńska: Metodyka arytmetyki i geometrii w pierwszych latach nauczania, op. cit., s.18.

Po zadaniach na rozkładanie liczby na składniki odejmują w zakresie 8. Nauczyciel może też zaproponować dzieciom zadania o „czystej liczbie" – Jaka liczba jest przed liczbą 8? A wiecie jaka liczba jest po liczbie 8? Z ilu jedności składa się liczba 8? Z ilu dwójek? Z ilu czwórek? We wszystkich tego typu zadaniach dzieci pomagają sobie w obliczeniach realnymi przedmiotami.

Składanie **liczebności z jedności i rozkładanie liczebności na jedności** to podstawa konstruowania pojęcia liczby. Liczba oznacza zbiór jedności i w zależności od wielkości tego zbioru może być większa lub mniejsza. Dzieci do zrozumienia, że liczba oznacza zbiór jedności, nie doprowadzi tylko słowne liczenie, czyli wypowiadanie po kolei nazw liczebników. Doprowadzi do tego przeliczanie realnych obiektów i określanie, ile ich jest.

Dzieci do pudełek wkładają misia. W pudełku jest jeden miś. Dokładają lalkę i piłkę. Teraz w pudełku jest miś, lalka i piłka. Do tych zabawek dokładają jeszcze samochodzik. Zabawek jest teraz jeszcze więcej.

Doświadczenia prowadzące do **zrozumienia pojęcia liczby:**
- **doliczanie** po 1;
- **odliczanie** określonej liczby obiektów;
- **doliczanie do podanej liczby** obiektów nowej liczby obiektów;
- **odwzorowywanie liczebności** zbioru. Pojęcie liczby jest ściśle związane z liczeniem, a liczenie to odwzorowywanie liczebności za pomocą kolejnych liczebników;
- **liczenie** i **określanie, ile jest obiektów**;
- **porównywanie liczebności zbiorów**, na czym opiera się pojęcie liczby mniejszej i większej;
- określanie liczby obiektów bez wcześniejszego liczenia;
- **rozkładanie liczebności na składniki**.



SZEŚĆ

U podstaw tych doświadczeń leżą **analogiczne doświadczenia w klasyfikowaniu:**
- tworzenie **kolekcji,**
- wyróżnianie **podzbioru** (podzbiorów) w zbiorze,
- **dołączanie do kolekcji** innych pasujących do niej obiektów.

Doświadczenia (zadania) rozwijające

w zakresie konstruowania pojęcia liczby w aspekcie kardynalnym

PRZEDSZKOLE
Doświadczenia w doliczaniu po 1
Dzieci składają liczebności po jeden: jeden klocek, jeden klocek i jeszcze jeden klocek

Dzieci wyjmują 1 klocek. Dokładają kolejny klocek i określają, ile jest teraz klocków. Dokładają kolejny klocek i określają, ile jest. Mogą w ten sposób dojść do 10 klocków. Nie zapisują jeszcze liczebności, tylko słownie określają, ile jest.

PRZEDSZKOLE I SZKOŁA
Doświadczenia w doliczaniu po 1

Dzieci wyjmują 1 klocek. Pod nim kładą kartonik z liczbą 1. Dokładają kolejny klocek i określają, ile jest teraz klocków. Zamieniają kartonik z liczbą 1 na kartonik z liczbą 2. Dokładają kolejny klocek i określają, ile jest. Zabierają kartonik z liczbą 2 i kładą kartonik z liczbą 3, i tak dalej.

PRZEDSZKOLE
Odliczanie określonej liczby obiektów

Na dywanie stoi pudełko z klockami. Każde z dzieci ma wyjąć z pudełka 5 klocków.

PRZEDSZKOLE I SZKOŁA
Odliczanie określonej liczby obiektów

Na rysunku są różne zabawki; dzieci mają policzyć i zapisać, ile jest wśród nich misiów.

PRZEDSZKOLE
Doliczanie do podanej liczby obiektów nowej liczby obiektów

Dzieci wyjmują 3 kredki i doliczają jeszcze 2 kredki. Liczą, ile mają razem kredek. Wyjmują 4 zielone klocki, doliczają 2 czerwone klocki. Liczą, ile mają razem klocków.

Nauczyciel rysuje na tablicy kwiatki. Pyta dzieci, ile narysował kwiatków. Dorysowuje kolejne kwiatki i pyta, ile jest teraz kwiatków.

PRZEDSZKOLE I SZKOŁA
Doliczanie do podanej liczby obiektów nowej liczby obiektów

Dzieci wyjmują 4 klocki. Podpisują kartonikiem z liczbą 4. Doliczają jeszcze 3 klocki. Liczą, ile mają teraz razem klocków i kładą odpowiedni kartonik z liczbą.

Dzieci dostają kartkę, na której zapisane jest, że ma być 6 kół. Liczą, że są już narysowane 3 koła. Dorysowują kolejne tak, żeby razem było ich 6.

PRZEDSZKOLE
odwzorowywanie liczebności zbioru

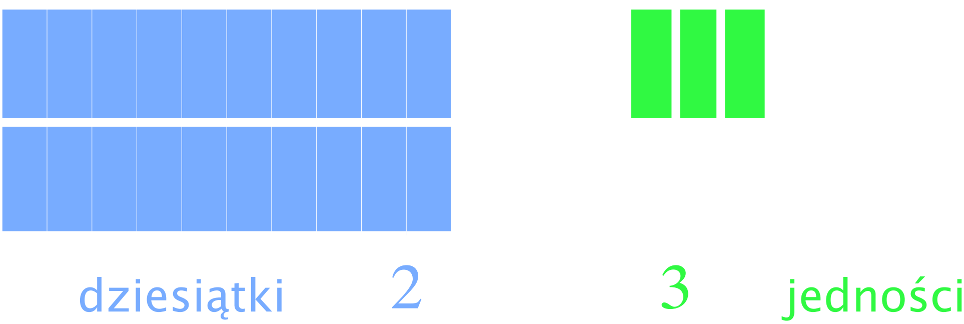
Odpowiedniość „jeden do jednego" jest oczywista już dla małych dzieci, które bawią się, dopasowując kołki do otworów, czy misie do łóżek. W każdym otworze ma być jeden kołek, a w każdym łóżku jeden miś.

Dzieci w rzędzie ustawiają klocki. Pod każdym klockiem kładą patyczek.
Klocków i patyczków jest po tyle samo. Mogą policzyć klocki.
Czy wiedzą, ile jest patyczków?
Dzieci pokazują na palcach, ile mają ciastek. Jedno ciastko, to jeden palec.

PRZEDSZKOLE I SZKOŁA
odwzorowywanie liczebności zbioru

Na kartce narysowane są baloniki.
Dzieci w ramce rysują tyle kresek, ile jest baloników.

Dzieci z patyczków i wiązek patyczków po 10 układają liczby dwucyfrowe.
Kładą 2 wiązki i 3 patyczki.
Jedna wiązka to jedna dziesiątka, a jeden patyczek do jedna jedność.
Dzieci ułożyły liczbę 23.



PRZEDSZKOLE
porównywanie liczebności zbiorów

Dzieci ustalają, czego mają więcej klocków, czy patyczków.
Osobno gromadzą klocki, osobno patyczki. Potem dobierają w pary klocek z patyczkiem. Co zostanie bez pary, tego jest więcej.
Nie muszą jeszcze posługiwać się liczbami, wystarczy, że wskażą, w którym zbiorze jest więcej/mniej obiektów.

PRZEDSZKOLE I SZKOŁA
porównywanie liczebności zbiorów

Dzieci porównują na rysunkach liczebności zbiorów, łącząc obiekt jednego zbioru z obiektem z drugiego zbioru.

Dzieci liczą lub odczytują liczebność jednego zbioru. Potem drugiego zbioru i wskazują, w którym zbiorze jest więcej/mniej obiektów.

Posługują się znakami <, >,=. Umieszczają je najpierw między figurami liczbowymi, a potem między liczbami zapisanymi cyframi.

Umieszczają znaki <, >, = między działaniami matematycznymi. Najpierw po obliczeniach wyników, a potem bez dokonywania obliczeń na podstawie znajomości liczb, które dodają, odejmują, mnożą czy dzielą.

PRZEDSZKOLE
liczenie i określanie ile jest obiektów[111]

Dzieci liczą i ustalają ile jest obiektów. Najpierw liczone obiekty są jednego rodzaju (np. tylko kredki), potem różnego rodzaju (liczą kredki i klocki razem i określają, ile jest przedmiotów). Najpierw liczone obiekty ustawione są w szeregu, potem są rozsypane, a jeszcze trudniej jest policzyć obiekty, gdy są ustawione po okręgu. Warto liczyć też „znikające" obiekty, na przykład dźwięki. Dzieci zauważają wtedy, że ostatni wypowiedziany przy liczeniu liczebnik wskazuje, ile jest wszystkich liczonych obiektów.

PRZEDSZKOLE
określanie liczby obiektów bez wcześniejszego liczenia

Dzieci rzucają kostką i pokazują na palcach, ile wypadło kropek. Na początku można dać dzieciom większą kostkę, żeby mogły liczyć palcem kropki. Stopniowo mniejsza kostka zastępuje większą, żeby skłonić dzieci do określania liczby kropek bez liczenia.

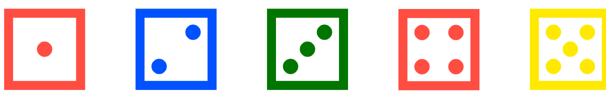
---

[111] O rozwijaniu u dzieci umiejętności liczenia piszemy więcej w rozdziale 3.2 Liczba naturalna – liczenie.

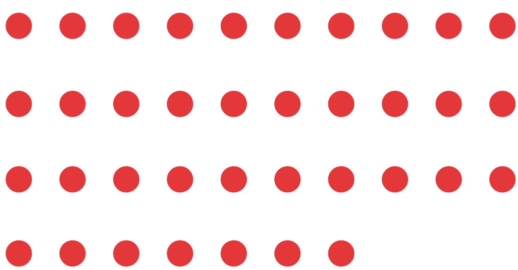
Dzieci wyszukują kartonik z daną liczbą kropek.

Dzieci mają klocki w różnych kolorach. Segregują je według koloru, a kartonikiem z kropkami podpisują, ile mają klocków w danym kolorze. Takie doświadczenia, prowadzą nie tylko do nabrania biegłości w liczeniu uczą też kodowania – liczebność można zakodować w taki sposób, żeby inni mogli bez trudu ją odczytać.

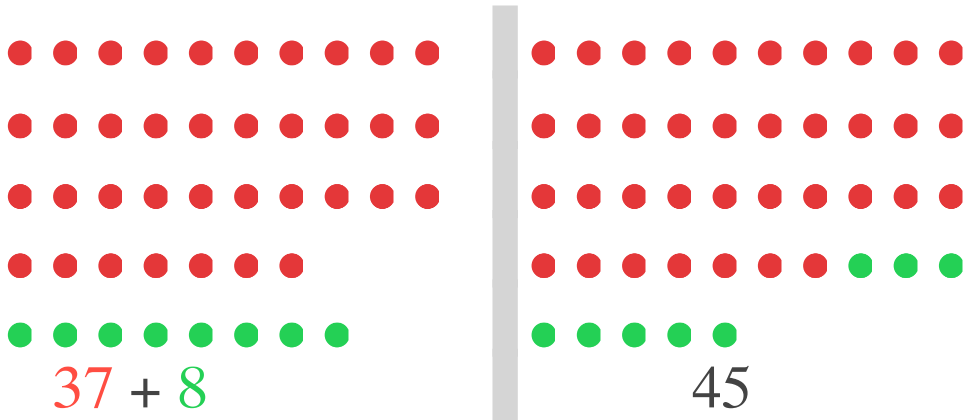
Dzieci dostają kartoniki w czterech kolorach: czerwony kartonik, niebieski, zielony i żółty. Każdy kartonik w innymi kolorze. Dzieci wyjmują odpowiednią liczbę klocków w danym kolorze, a potem ze wszystkich tych klocków budują, na przykład zamek. W tym zadaniu posługują się łączeniem dwóch zakodowanych cech – szukają określonej liczby klocków w określonym kolorze. Łączą cechę kolor z cechą liczebność.
Budowle pozostają, a dzieci zamieniają się kartonikami z kropkami.
Dzieci szukają budowli, która pasuje do kartoników, które dostały. Na przykład, dziecko dostało żółty kartonik z 3 kropkami, zielony z 2, czerwony z 5 i niebieski z 3.
Szuka budowli, która została zbudowana z odpowiednio licznych zbiorów klocków żółtych, zielonych, czerwonych i niebieskich.
Oczywiście początkowo mogą to być budowle tylko z klocków w jednym kolorze . Następnie w dwóch kolorach , aż po bardzo skomplikowane układy liczebności i kolorów.



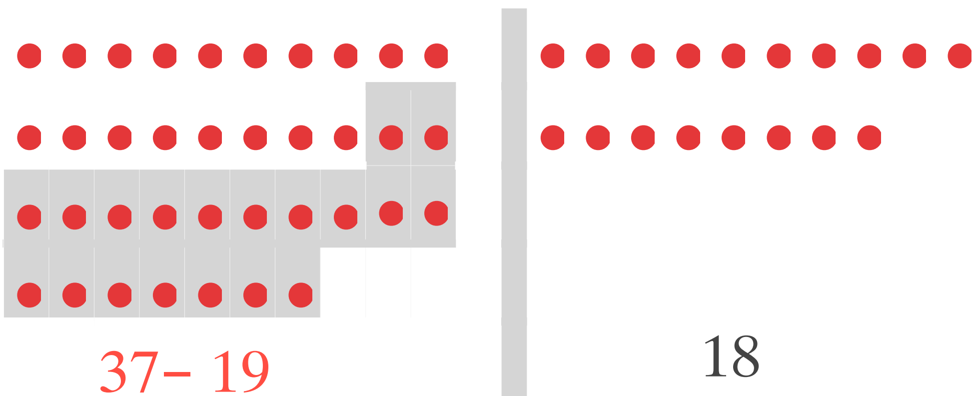
PRZEDSZKOLE I SZKOŁA
określanie liczby obiektów bez wcześniejszego liczenia
Kiedy dzieci poznają kolejne liczby w zakresie 100 pomocne mogą być obrazy liczbowe z kropek ułożonych dziesiątkami. Za pomocą takich figur można skonkretyzować każdą liczbę. Na przykład 37 można przedstawić tak:



Takie skonkretyzowanie liczb pomaga też w rachunkach z przekroczeniem progu dziesiątkowego. Dodawanie 37 + 8 można skonkretyzować w ten sposób:



Odejmowanie 37 - 19 można skonkretyzować zaś tak:



PRZEDSZKOLE
rozkładanie liczby na składniki
Rozkładanie liczby (liczebności) na składniki jest odwrotnym działaniem do składania liczby po jeden. Czynności te podkreślają, że liczba jest zbiorem jedności.

Dzieci budują z klocków, na przykład zamek. Kiedy już zbudują rozkładają budowlę na pojedyncze klocki, które ustawiają jeden obok drugiego. Liczą, z ilu klocków zbudowały zamek.
Na początku chodzi o to, żeby dzieci daną liczebność rozkładały po jeden. Na przykład w koszyku są jabłka. Dzieci wyjmują po jednym jabłku. Układają je w rzędzie i liczą, ile ich jest.

PRZEDSZKOLE I SZKOŁA
rozkładanie liczby na składniki
Rozkładanie liczb po jeden jest podstawą do tego, żeby dzieci dostrzegły możliwość rozkładania liczby na różne składniki, co jest podstawą nie tylko rozumienia liczby w aspekcie kardynalnym, ale też arytmetycznym.

Posługując się dziesiątkowym systemem pozycyjnym, dzieci rozkładają liczby na jedności, dziesiątki, setki itd. Na przykład liczba 124 składa się ze 124 jedności; 124 to 12 dziesiątek i 4 jedności; 124 to 1 setka 2 dziesiątki i 4 jedności.

Doświadczenia (zadania) rozwijające

w zakresie konstruowania pojęcia liczby w aspekcie porządkowym

PRZEDSZKOLE
określanie pierwszego i ostatniego obiektu w szeregu/rzędzie – posługiwanie się określeniami: pierwszy, ostatni

Dzieci ustawiają samochodziki jeden za drugim.
Wskazują pierwszy i ostatni samochód.

PRZEDSZKOLE I SZKOŁA
numerowanie obiektów
dzieci numerują kolejne obiekty, posługują się liczebnikami porządkowymi. Jeżeli potrafią posługiwać się kartonikami z liczbami, to mogą cyfrą kodować numer każdego obiektu

Dzieci układają przedmioty w szeregu lub w rzędzie i numerują je liczebnikami porządkowymi.
Dzieci sadzają misie jeden obok drugiego. Numerują je.
Pod każdym misiem kładą odpowiedni kartonik z liczbą.
Jeszcze raz odczytują numery misiów.

PRZEDSZKOLE I SZKOŁA
wskazywanie obiektów o danym numerze
dzieci uczą się wskazywać obiekt o podanym numerze, dzieci ustawiają przedmioty w szeregu lub w rzędzie. Numerują je liczebnikami porządkowymi. Wskazują pierwszy, drugi, czwarty przedmiot

Dzieci bawią się samochodzikami, które wjeżdżają i wyjeżdżają z parkingu. Każdy samochód ma swoje miejsce na parkingu. Numery zapisane są cyframi. Dzieci określają, z którego miejsca parkingowego wyjeżdża samochód, albo na które miejsce parkingowe ma wjechać.

PRZEDSZKOLE I SZKOŁA
zmiany w numerowaniu obiektów
dzieci sprawdzają, jak zmieni się numeracja obiektów, kiedy zabiorą pierwszy z szeregu, ostatni z szeregu, dodadzą obiekt na początku szeregu, czy dodadzą obiekt na końcu szeregu. Jak zmieni się numeracja, gdy doda się lub odejmie obiekt w środku ponumerowanego szeregu?

Dzieci sadzają misie w rzędzie lub szeregu. Numerują je.
Pod każdym misiem kładą kartonik z liczbą.
Zabierają pierwszego misia. Który miś teraz jest pierwszy? Zmieniają numerację misiów. Zabierają ostatniego misia. Który miś teraz jest ostatni? Czy misie są dobrze ponumerowane? Zabierają trzeciego misia. Wskazują misia, który teraz jest trzeci.
Czy misie są dobrze ponumerowane?
Dzieci bawią się w lekarza. W poczekalni siedzą pacjenci.
Każdy pacjent ma swój „numerek".
Pacjenci wchodzą do lekarza, odchodzą z kolejki, „wpychają" się do kolejki.
Ustalają, kto stoi tuż za danym dzieckiem, a kto tuż przed nim.
Jaki ma numer w kolejce?

PRZEDSZKOLE I SZKOŁA
zmiany w numeracji w zależności od tego, z której strony zaczyna się numerowanie
dzieci zbierają doświadczenia, aby dojść do tego, że numer obiektu zmienia się w zależności od tego, z której strony zacznie się liczyć

Dzieci mają piramidki z kółek. Zdejmują koła i układają je od najmniejszego do największego. Numerują koła liczebnikami porządkowymi, zaczynając od najmniejszego. Pod każdym kołem kładą kartonik z liczbą. Teraz liczą od największego do najmniejszego i zmieniają układ kartoników z liczbami.

3.5. Liczby naturalne Rachowanie

Karen Wynn z University of Arizona w 1992 roku przeprowadziła badania z dziećmi, których wyniki dyskutują z tym, co o myśleniu matematycznym małych dzieci sądził J. Piaget. Zdaniem szwajcarskiego uczonego dzieci długo nie są w stanie posługiwać się liczbami i działaniami na liczbach. K. Wynn przed pięciomiesięcznym dzieckiem ustawiła małą sceną. Na scenie umieściła lalkę, a potem zasłoniła ją ekranem i dodała jeszcze jedną lalkę. Po zabraniu ekranu dziecko zobaczyło dwie lalki. Potem znowu zasłaniała lalki ekranem i zabierała albo dokładała jedną lalkę. Kiedy odsłaniała ekran, dziecko patrzyło na scenę dłużej, kiedy zmieniała się liczba lalek. Zdaniem K. Wynn oznacza to, że dziecko czuło się zaskoczone, bo nie zgadzała się mu liczebność. Dziecko zauważało efekt dodania lub odjęcia lalki[112].

[112] por. B. Butterworth: The Mathematical Brain, op. cit., 1999.

Posługujemy się **sześcioma rodzajami działań arytmetycznych**: dodawaniem i odejmowaniem, mnożeniem i dzieleniem, potęgowaniem i pierwiastkowaniem. Pomiędzy działaniami arytmetycznymi zachodzą różne **relacje**. Dodawanie to działanie odwrotne do odejmowania, a odejmowanie to działanie odwrotne w stosunku do dodawania. Również mnożenie i dzielenie mogą być postrzegane jako działania wzajemnie odwrotne. Poza tym mnożenie można traktować jako wielokrotne dodawanie jednakowych składników, a dzielenie jako wielokrotne odejmowanie. Dodawanie i odejmowanie to pierwsze działania arytmetyczne, które poznaje człowiek. Na nich buduje umiejętność mnożenia i dzielenia, a na mnożeniu i dzieleniu z kolei buduje umiejętność potęgowania i pierwiastkowania.

Dodać w języku potocznym oznacza przyłączyć, dostawić, uzupełnić. Do pociągu dostawiono jeszcze jeden wagon. Mama do trzech gruszek na stole dołożyła jeszcze dwie. Dzieci do czterech kwiatów na rysunku dorysowały jeszcze trzy. Dodać to połączyć, zebrać, obliczyć ile jest razem.

W nauczaniu arytmetyki dodawanie występuje w dwóch postaciach: jako zliczanie (suma, czyli dziecko liczy na przykład razem czerwone i zielone klocki) oraz jako dopełnianie jednej liczby do drugiej (jest 7 cukierków, dopełniamy do 10-osiem, dziewięć i dziesięć). Dodawanie jest najłatwiejszym działaniem arytmetycznym, gdyż jest bardzo wcześnie intensywnie ćwiczone przez dziecko w działaniu: łączy zbiory i określa, ile jest razem.

Dzieci w przedszkolu i na początku nauki w szkole stosują określone **strategie dodawania**, które świadczą o rozwoju u nich umiejętności rachunkowych:

- liczenie wszystkiego: dziecko przelicza najpierw jeden zbiór, potem drugi, a następnie zaczyna liczyć od początku wszystkie obiekty razem. Ma 2 jabłka i 4 gruszki. Liczy, ile to razem owoców. Najpierw liczy jabłka. Potem liczy gruszki. Potem liczy wszystko razem, czyli jabłka i gruszki;
- liczenie od drugiego składnika: dziecko wie, że nie jest konieczne przeliczanie pierwszego składnika, rozpoczyna liczenie, dodając od razu drugi. Ma 2 jabłka i 4 gruszki. Liczy jabłka i od razy dolicza gruszki: trzy, cztery, pięć, sześć;
- liczenie od większego składnika: dziecko wybiera większy składnik i dolicza do niego mniejszy – to już zaawansowana strategia, wskazująca, że dziecko rozumie prawo przemienności dodawania. Ma 2 jabłka i 4 gruszki. Zaczyna liczenie od gruszek i dolicza jabłka: pięć, sześć.

Odejmowanie to ujmowanie, ubywanie, zabieranie, znikanie czegoś. Obliczamy różnicę 7 odjąć 3: wyobrażamy sobie, że od 7 ujmujemy 3. Było 7 ciastek, tata zjadł 3, zostały 4 ciastka.

Nie zawsze jednak przy odejmowaniu wyobrażamy sobie ubywanie. Różnicę można też obliczyć przez doliczanie: ustalamy, ile trzeba „dorzucić" do 3, żeby dostać 7. W tym przypadku pomaga umiejętność rozkładania liczby na składniki: 7 to 3 i 4. Odejmowanie też można rozumieć jako różnicę między liczbami: szukamy wyniku działania 7 odjąć 3, czyli różnicę między liczbą 7 a 3, to oczywiście 4.

Zazwyczaj dziecko ma więcej trudności z odejmowaniem niż z dodawaniem.

Każda przyjęta strategia odejmowania niesie z sobą pułapki. Przy odejmowaniu dziecko posługuje się **odliczaniem, które jest trudniejsze niż doliczanie.** Wymaga liczenia do tyłu, które dla większości dzieci jest kłopotliwe. Licząc do tyłu, należy pamiętać, ile odliczyło się, zanim „odczytało się" wynik. Dziecko ma od 7 odjąć 3. Prostuje 7 palców i zgina po jednym, aż zegnie 3, licząc jednocześnie do tyłu. Przy dodawaniu oba składniki można przedstawić za pomocą zbiorów, a przy odejmowaniu jest zbiór od którego się odejmuje, ale nie „widać" ile trzeba odjąć. Kiedy przy odejmowaniu dziecko stosuje doliczanie na palcach (liczenie do przodu), musi po prostu poczekać aż przy liczeniu usłyszy daną liczbę – a potem zatrzymać się i policzyć użyte palce. Oblicza 7 odjąć 3: zaczyna liczyć od 3 – cztery, pięć, sześć, siedem. Liczy, że wyprostowało 4 palce – ale razem wyprostowanych palców jest teraz 7. I to jest duża trudność. Dziecko musi rozłożyć siedem na liczbę od której zaczęło doliczanie i liczbę, którą doliczało. Jak widać, odejmowanie jest znacznie trudniejsze od dodawania, stąd wniosek, że dziecko powinno mieć w przedszkolu wiele sytuacji, w których będzie odejmowało, wybraną przez siebie strategią.

W rachowaniu ważne jest **stopniowe odrywanie się od rzeczy** i przechodzenie na rachowanie w pamięci, już wyłącznie na poziomie symbolicznym. Takie przejście oczywiście rzadko jest dostępne już dziecku w przedszkolu.

Na **trudność sytuacji dodawania i odejmowania** wpływ mają głównie dwa czynniki: sytuacje, gdy dzieci muszą oderwać się od konkretnych przedmiotów i przejść na poziom abstrakcyjny oraz rozszerzanie zakresu rachowania.

Podstawą sprawnego dodawania, jak i odejmowania, jest biegłość w **liczeniu**.

Już bardzo małe **dziecko interesują zmiany typu dodać/odjąć**. Wie, że po odjęciu, odsunięciu, zabraniu jest mniej a po dołożeniu, dosunięciu – więcej. Wraz z rozwojem umiejętności liczenia, rachowanie staje się coraz bardziej precyzyjne. Mały przedszkolak po każdej zmianie typu dodać/odjąć liczy przedmioty. Czyli wie, że dodawanie czy odejmowanie zmienia liczbę przedmiotów. Oczywiście liczy, jak potrafi. Im lepiej radzi sobie z liczeniem, tym lepiej potrafi ustalić wynik dodawania i odejmowania. Umiejętności dziecka w zakresie rachowania rosną więc w miarę doskonalenia się umiejętności liczenia. Występuje tu prawidłowość: osiągnięcie większej precyzji w liczeniu pozwala przejść na wyższy poziom umiejętności rachunkowych. Tak się dzieje nie tylko w przedszkolu, ale też później w szkole. Dziecko liczy w większym zakresie, a rachuje w mniejszym.

W przedszkolu dziecko zaczyna naukę **rachowania na palcach**.

Najpierw uczy się liczyć na palcach[113], a potem uczy się, że na palcach można też dodawać i odejmować. Jak to się robi, pokazuje dorosły. Kiedy prostuje się palce, to oznacza to czynność dodawania, dokładania, dosuwania. Kiedy zgina się palce, to przedstawia się odejmowanie, zabieranie, odsuwanie. Palce zaczynają pełnić rolę zbiorów zastępczych – zbiorów obiektów, które zastępują te, na których wykonywane są rachunki. Żeby obliczyć, ile to razem ciastek – 3 bajaderki i 4 pączki – to nie musi zgromadzić tych ciastek i razem je policzyć. Wystarczy, że o ciastkach pomyśli i pokaże na palcach, ile ich jest. Potem dodając wyprostuje kilka palców (a odejmując zegnie kilka z nich). Na koniec policzy wyprostowane palce i już wie, ile jest ciastek.

W takich zadaniach palce pełnią rolę **zbiorów zastępczych,** podobnie jak różne liczmany, typu patyczki, kamyki, kasztany czy koraliki na liczydle. Posługiwanie się zbiorami zastępczym przy rachowaniu jest ogromnym osiągnięciem rozwojowym na drodze od rachowania na konkretach po rachowanie abstrakcyjne – w pamięci. Przejście tej drogi zajmuje dziecku zazwyczaj kilka lat i odbywa się na przełomie przedszkola i szkoły podstawowej.

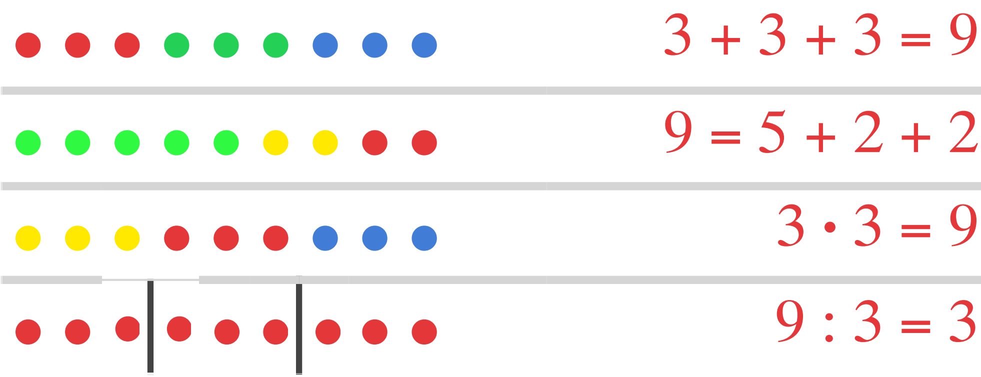
Ważną umiejętnością jakiej dziecko uczy się też na przełomie przedszkola i szkoły podstawowej jest umiejętność doliczania i odliczania.

[113] O liczeniu na palcach piszemy w rozdziale 3.2 Liczba naturalna – liczenie.

Przy **doliczaniu** dziecko nie przelicza obiektów jednego z sumowanych zbiorów (pierwszego składnika), ale wie ile jest i dolicza po jednym obiekcie z drugiego zbioru. Podobnie przy **odliczaniu**. Wie, od ilu odejmuje i od tej liczby odlicza po jeden, tyle ile ma odjąć. Dziecko w przedszkolu dolicza i odlicza, rachując na konkretach. Na przykład przykleja na kartce bałwanki. Są już 2 bałwanki, a ma ich być razem 5. Dokłada bałwanka. Są 3, to jeszcze mało. Dokłada kolejnego, są 4. I jeszcze jednego. Jest ich 5, czyli tyle ile ma być. Ile dołożyło bałwanków? Na talerzyku jest 6 ciastek. Mają zostać 2. Dziecko odkłada jedno, zostało 5. To jeszcze za dużo. Odkłada kolejne, zostały 4. Jeszcze jedno i jeszcze jedno, teraz są 2, czyli tyle ile ma być. Ile odłożyło ciastek? Tego typu doświadczenia są podstawą do tego, aby dziecko doliczało i odliczało na zbiorach zastępczych, a potem w pamięci.

Dziecko w przedszkolu zbiera doświadczenia w **rozkładaniu liczby na składniki**. Układa z patyczków domek. Z ilu patyczków składa się ten domek? Ile razy trzeba wziąć po jednym patyczku, żeby ułożyć taki domek? Na ile pojedynczych patyczków można go rozłożyć?[114].

W nauczeniu się sprawnego dodawania, odejmowania, potem mnożenia i dzielenia ważną rolę odgrywa umiejętność **rozkładania liczby na składniki**. Liczba oznacza zbiór jedności. Można więc każdą liczbę na różne sposoby na jedności rozłożyć. Rozkładamy liczbę 6 na składniki. 6 = 4 + 2, co inaczej można zapisać 4 + 2 = 6. Rozkładanie liczb na składniki pomoże w odejmowaniu. Tylko wtedy dziecko opanuje pamięciowe odejmowanie, gdy nie będzie odliczało po jednym, ale wprost „rozbije" odjemną (czyli liczbę od której się odejmuje) na dwa składniki. Na przykład: 6 - 2 wywoła natychmiast odpowiedź 4, jeśli posiadamy skojarzenie 6 = 2 + 4. Liczbę 6 można w różny sposób rozkładać na składniki. Składniki mogą być różne, ale niektóre liczby można rozłożyć też na kilka takich samych składników. Do tych liczb należy szóstka: 6 = 3 + 3, czy 6 = 2 + 2 + 2. Tego typu doświadczenia w rozkładaniu liczby przydadzą się, kiedy dziecko będzie uczyło się w szkole mnożyć (2 x 3 = 6, 3 x 2 = 6), czy dzielić „po kilka" (6 po 2, to 3), czy „na kilka" (6 na 2 to 3) [115].



Przy rozkładaniu liczby na składniki dzieci posługują się też doliczaniem. Na przykład mają 3 klocki, a mają mieć 5 klocków. Ile muszą dołożyć (doliczyć) klocków? W szkole zapiszą to tak: 5 = 3 + 2. Tego typu doświadczenia przydadzą się przy doliczaniu do 10, żeby wykonać działanie matematyczne z przekraczaniem progu dziesiątkowego. W doliczaniu warto posługiwać się rachowaniem na palcach.

[114] L. Jeleńska: Metodyka arytmetyki i geometrii w pierwszych latach nauczania, op. cit., s. 10-15.
[115] Ibidem, s. 10-15.

W rozwijaniu umiejętności rachowania dąży się do tego, aby dziecko dodawało i odejmowało **w pamięci**, bez potrzeby manipulowania konkretnymi przedmiotami, czy zbiorami zastępczymi. Znajomość wyników dodawania i odejmowania w zakresie pierwszej dziesiątki znacznie ułatwi później wykonywanie bardziej skomplikowanych obliczeń. Dzięki przechowywaniu w pamięci wyników takich działań, szybko ustalamy nawet skomplikowane sumy czy różnice.

Na poziom, kiedy dodaje i odejmuje tylko w umyśle, na pomyślanych liczbach dziecko przechodzi stopniowo po wielu ćwiczeniach. Nawet, kiedy już rachuje w pamięci, to nie raz zdarzy się, że będzie pomagało sobie jeszcze rachowaniem na palcach. Nie ma w tym niczego złego. Nie należy zakazywać dziecku rachowania na palcach. W przedszkolu dziecko powinno nabrać przekonania, że **rachowanie na palcach jest bardzo dobrym sposobem by pomóc sobie w rachunkach. Warto je za to chwalić,** sprawne rachowanie za pomocą palców świadczy o dużych umiejętnościach rachunkowych dziecka. W przeciwnym razie łatwo zniechęcić dziecko do podejmowania prób rachowania. A to już prosta droga do tego by nie lubić czy bać się matematyki.

Dziecko nabierze biegłości w rachowaniu w miarę możliwie częstego powtarzania czynności dodawania czy odejmowania (potem mnożenia czy dzielenia). Zmniejszać się będzie udział świadomości w rachowaniu, mniej będzie wymagało namysłu, aż wreszcie będzie rachowało mechanicznie. Wtedy powiemy, że dziecko jest w **rachunkach biegłe**. W zakresie pierwszej dziesiątki biegle uczeń zazwyczaj rachuje pod koniec klasy pierwszej, jednak początki drogi do biegłości sięgają doświadczeń w przedszkolu.

Stopniowo w przedszkolu wdraża się też dzieci do **kodowania** (zapisywania) i **dekodowania** (odczytywania) czynności rachunkowych. Jeżeli dzieci rozpoznają liczby zapisane cyframi, można pokazać im jak wygląda znak dodać czy odjąć. Oczywiście odbywa się to wszystko na zasadzie opatrzenia się i osłuchania, bez wymagania od dziecka umiejętności korzystania z symboli. Dzieci na długo przed nauczeniem się stosowania znaków matematycznych dodają, odejmują, mnożą, czy dzielą. Wraz z doskonaleniem się tych umiejętności powinny nabrać przekonania, że w arytmetyce wszystko, co się robi, co słownie się opisuje, można **zapisać specjalnymi znakami**[116]**.**

Na początku dziecko manipuluje obiektami obliczając sumę czy różnicę. Potem tym czynnościom nadaje matematyczny sens i zapisuje je w formie działania przy pomocy cyfr i znaków działań (formuła działania). Uczy się, że inni mogą odczytać zapisane przez niego czynności i będą wiedzieli, co robiło i jakie otrzymało wyniki. To **kodowanie**. Jednocześnie dziecko uczy się czynności odwrotnej – **dekodowania**. Odczytuje symbolicznie zapisane czynności i oblicza wynik. Zapisywania działań matematycznych nie można rozumieć jako tylko doskonalenie się umiejętności rachunkowych dziecka – najpierw dodaje i odejmuje na przedmiotach, a z czasem zapisuje i odczytuje działania zakodowane cyframi i znakami działań. Jest to też uczenie się posługiwania się symbolami, w tym przypadku symbolami języka matematyki.

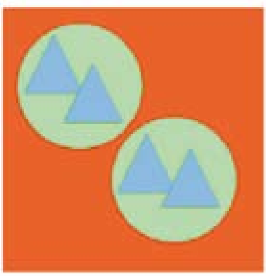
Znaki matematyczne, jakimi się dziś posługujemy rodziły się przez wieki. Babilończycy i Egipcjanie przedstawiali zadania opisowo: długość pokoju jest taka sama jak szerokość plus jeden łokieć, a wysokość jest o jeden łokieć mniejsza od długości. Współczesne znaki matematyczne ludzie skonstruowali dosyć późno. We Włoszech stosowano skróty słów więcej, mniej jako plus i minus. Operatory arytmetyczne, czyli symbole pokazujące,

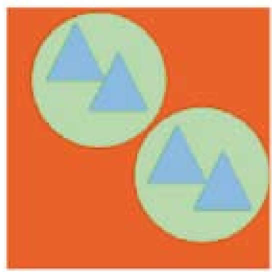
[116] Ibidem, s. 19-20.

jaki rodzaj obliczeń należy wykonać, pojawiły się pod koniec XV wieku. Pierwszymi symbolami które stosowano były znaki + i –. Początkowo miały one oznaczać nadmiar albo niedobór wielkości magazynowych[117].

Formuła matematyczna jest symbolicznym zapisem wykonanych czynności –dodawania, odejmowania, potem mnożenia czy dzielenia. Może być wypowiedziana słowami lub wyrażona cyframi i znakami działań. U podstaw jest więc czynność, która musi zostać przez dziecko zrozumiana. Następnie zrozumienie powinno być wyrażone słowami, a słowa z czasem zastąpione symbolami matematycznymi[118]. Z tego można wyprowadzić bardzo ważne wskazówki dla nauczyciela, które w połowie ubiegłego stulecia sformułowała L. Jeleńska:

- każde działanie musi być wyrażone konkretnie – ruchem. Ruch jest najbardziej wyrazistym obrazem czynności. Przy dodawaniu to ruch łączenia razem, ruch dopełniania. Przy odejmowaniu to ruch odkładania, odsuwania, zabierania, chowania itp.;
- wykonane działanie musi być opisane słowami: dwa dodać trzy, to razem pięć; pięć odjąć dwa, zostaje trzy. Dla małych dzieci trudne może być opisywanie słowne działania, ze względu na trudności z posługiwaniem się liczebnikami, szczególnie gdy trzeba je odmienić. W przedszkolu głównie chodzi o to, żeby dziecko z takim opisem się osłuchało. Dlatego to nauczyciel głównie opisuje, to co dzieci zrobiły i w miarę rozszerzania umiejętności językowych, oddaje aktywność przedszkolakom;
- opis słowny działania może zostać zapisany formułą. Pierwsze formuły powinny być odczytywane, ze wskazywaniem poszczególnych cyfr i znaków. Chodzi bowiem o podkreślenie związku słów z symbolami matematycznymi[119].





$$2 \times 2 \times 2 = 8$$

$$2^3 = 8$$

[117] http://blogiceo.nq.pl/matematycznyblog/2013/01/14/komu-zawdzieczamy-symbole-matematyczne/

[118] Jeleńska L.: Metodyka arytmetyki i geometrii w pierwszych latach nauczania, op. cit., s. 20.

[119] Ibidem, s. 20.

Na tym schemacie opiera się zapisywanie formuły dodawania, odejmowania, potem mnożenia i dzielenia.

Przedszkolak kładzie 2 kwadraty. Na każdym kwadracie kładzie po 2 koła. A na każdym kole kładzie po 2 trójkąty. Ile jest kwadratów? Ile jest kół? A ile trójkątów?

Z pomocą nauczyciela opisuje, to co zrobił: Są 2 kwadraty. Na każdym kwadracie są po 2 koła, a na każdym kole są po 2 trójkąty. Razem jest 8 trójkątów.

W szkole, już pod koniec klasy I, zapisze, ile jest trójkątów formułą: 2 + 2 + 2 + 2 = 8. Pod koniec klasy III będzie potrafił zapisać inną formułą matematyczną czynność układania trójkątów: 2 x 2 x 2 = 8. A tę samą czynność za kilka lat, w gimnazjum, zapisze już jako 2^3=8

Żeby uczeń nie tylko posługiwał się algorytmem obliczania potęg, ale rozumiał sens samego działania musi mieć podstawy – czynność, potem czynność opisaną słowami i dopiero słowa zapisane formułą matematyczną.

Stopniowo dzieci uczą się też **własności działań**. Kiedy przedszkolak ma do 4 dodać 6, to najpierw odliczy 4 obiekty, a potem doliczy do nich 6 obiektów. Po pewnym czasie zauważy, że można dodawane liczby zamienić miejscami bez wpływu na wynik, czyli do 6 dodać 4 – dodawanie będzie prostsze. Znaczy to, że rozumie ważne własności liczb i liczenia. Zauważa, że dodawanie do większej liczby mniejszej wymaga mniejszego wysiłku. Potrafi też rozpoznać, która liczebność jest większa, a która mniejsza. Wreszcie intuicyjnie rozumie prawo przemienności – na wynik nie ma wpływu kolejność dodawanych liczb. Zdarza się, że przenosi potem to prawo też na odejmowanie i w szkole zapisuje 2 – 6, podając wynik 4.

Doświadczenia (zadania) rozwijające

w zakresie rozwijania umiejętności rachowania

PRZEDSZKOLE

Dodawanie. Posługiwanie się pojęciem razem

dzieci liczą, ile jest obiektów w każdym ze zbiorów, potem łączą oba zbiory i liczą, ile jest teraz wszystkich obiektów razem

Dzieci mają 3 niebieskie piłki i 2 zielone piłki. Ustalają, ile ma piłek razem.

PRZEDSZKOLE SZKOŁA

Rozkładanie liczby na składniki

dzieci uczą się rozkładać liczbę na składniki. Każdą liczbę rozkładają na kilka sposobów. Za każdym razem opisują, jak rozłożyły

Dzieci wyjmuje 5 misiów. Kilka z nich kładą na łóżku, a pozostałe obok łóżka. Opisują na przykład tak: 3 misie są na łóżku, a 2 obok łóżku (5 to 3 i 2). Potem układają misie jeszcze inaczej.

Dzieci mają 5 dwustronnych kartoników (na przykład z jednej strony są zielone, a z drugiej żółte). Układają zielone kartoniki jeden obok drugiego.

Jest 5 kartoników. Odwracają pierwszy. Teraz mają 1 żółty kartonik i 4 zielone kartoniki: pięć to jeden i cztery. Odwracają kolejny: pięć to dwa i trzy. Kontynuują odwracanie kartoników, aż wszystkie będą żółte. A jak opisać ostatnią sytuację? Pięć to pięć i zero[120].

PRZEDSZKOLE I SZKOŁA

Odejmowanie

dzieci liczą obiekty. Kilka z nich zabierają (chowają, przesuwają, odkładają itp.). Ustalają, ile obiektów zostało

Dzieci wyjmują 7 klocków. Trzy z nich chowają pod kartkę. Ile klocków zostało?
Dzieci mają w pudełku żetony. Rozdzielają je na zielone i czerwone. Liczą, ile jest ich razem. Odkładają czerwone. Liczą, ile odłożyły czerwonych. Liczą, ile zostało zielonych.

PRZEDSZKOLE I SZKOŁA

Doliczanie i odliczanie

dzieci uczą się doliczać, czyli liczyć po jeden do przodu, aż uzyskają określoną liczebność. Uczą się też odliczać, czyli liczyć po jeden do tyłu, aż uzyskają określoną liczebność

Dzieci mają zabawki typu piramidka. Są na niej 3 krążki, a ma być 7 krążków. Teraz krążków jest za mało.
Dzieci dokładają po jednym krążku (głośno licząc – cztery, pięć, sześć, siedem) aż będzie ich 7.
Jeżeli dokładane krążki są w innym kolorze, to można określić, ile ich dołożyły: 3 i 4 to razem 7.
Dzieci mają zabawkę typu piramidka. Jest na niej 7 krążków, a mają być 3 krążki. Teraz krążków jest za dużo. Dzieci zdejmują po jednym krążku (głośno licząc – sześć, pięć, cztery, trzy) aż zostaną 3.
Liczą, ile odłożyły krążków: 7 odjąć 4, zostaje 3.

[120] por. Lisicki M., Skura M.: Matematyka w działaniu. op. cit., rozdział VI Liczby naturalne

4. Stosowanie rozumowań matematycznych i liczb

4.1. Stosowanie rozumowań matematycznych i liczb Określanie tego, co prawdopodobne i nieprawdopodobne

W pochmurny dzień, dziecko zapewne nie raz widzi, jak ciemne chmury zasłaniają niebo. Może wtedy usłyszeć od dorosłego: Prawdopodobnie spadnie deszcz. Po kilku minutach, leje już jak z cebra, a dziadek z babcią wyrokują Na pewno dziś już nie pójdziemy na spacer. Oznacza to, że nie będzie zabawy na huśtawkach w parku i lodów w drodze powrotnej. Dawno nie widziana ciocia zachwyca się, jak to siostrzeniec przez rok urósł i wróży: Możliwe, że zostanie koszykarzem. Czyli może zostanie, a może nie. Przedszkolak, który raczej o karierze koszykarza jeszcze nie myśli oświadcza przy śniadaniu: Na pewno nie zjem dziś owsianki. Określenia: na pewno tak, na pewno nie, możliwe, niemożliwe, prawdopodobnie, chyba tak, chyba nie – to codziennie używane przez dorosłych określenia, które powoli wchodzą do słownika dziecka. Stopniowo uczy się szacować prawdopodobieństwo zdarzeń, coraz lepiej rozumie pojęcia z zakresu rachunku prawdopodobieństwa.

W PRZEDSZKOLU, W SZKOLE
Dzieci gromadzą się przy oknie, obserwują niebo. Przyglądają się czy widać jakieś chmury, czy jest ich dużo, mało, a może w ogóle ich nie ma. Co można powiedzieć o tym jaka będzie pogoda za godzinę, po najbliższych zajęciach, po obiedzie? Prawdopodobnie będzie słonecznie i ładnie. Na pewno nie będzie padał deszcz. Czy to możliwe że będzie dziś burza? Czy to możliwe, że dziś ulepimy bałwana? Dziś prawdopodobnie będziemy się bawili piłką. Dziś na pewno nie będziemy jeździć na sankach.

Określenie prawdopodobieństwa dotyczy sytuacji, których nie da się precyzyjnie przewidzieć, nie kontrolujemy bowiem wszystkich okoliczności lub czynników, które dla jej zaistnienia są konieczne. W jakimś stopniu (czasem mniejszym, czasem większym) decyduje los. To właśnie określanie tego, jaka jest szansa na to, że coś się wydarzy. To miara pewności lub przewidywalności, że jakieś zdarzenie nastąpi, która umożliwia ocenę ryzyka lub szansy. Te dosyć trudne pojęcia, pojawiają się w otoczeniu dziecka bardzo wcześnie. Fakt, że w starszych klasach nastręczają tak wielu kłopotów, bierze się w dużej mierze stąd, że poza potocznym użyciem w codziennych życiowych sytuacjach, prawie w ogóle nie pojawiają się w planowanym procesie edukacji. Rozmawiając z nauczycielami małych dzieci, można dojść do przekonania, że proponowanie dzieciom zadań mających na celu szacowanie prawdopodobieństwa zdarzeń mogłoby dzieciom zaszkodzić! Tak niewielu nauczycieli to robi. Z pewnością bardzo ważną przyczyną takiego stanu rzeczy jest fakt, że nie ma ani śladu tego typu treści w podstawie programowej, czy w najpopularniejszych programach nauczania.

Badanie prawdopodobieństwa, to badanie szans. Dzięki temu nieprzewidywalne staje się w większym lub mniejszym stopniu przewidywalne.

W PRZEDSZKOLU, W SZKOLE

Dzieci gromadzą się na dywanie, wokół przygotowanej skrzyni. Skrzynia jest pusta. Każde dziecko ma z sobą jakąś zabawkę. Dzieci same wybrały zabawki, które przyniosły. Wszyscy siadają wokół skrzyni i układają przed sobą to co przyniosły, tak żeby każdy widział. Oglądają i nazywają to co przyniosły. Wszystkie te rzeczy, które przyniosły dzieci, to zabawki. To są zabawki przedszkolne, wszystkie te zabawki są małe.

Wszystkie dzieci wkładają swoje zabawki do skrzyni. Skrzynia teraz jest zamknięta, będziemy losować ze skrzyni kolejne przedmioty. Każde dziecko będzie wyciągało jeden przedmiot. Czy to możliwe, że dla kogoś zabraknie? Każde dziecko włożyło jedną zabawkę, każde dziecko włożyło swoją zabawkę. Czy teraz kiedy każde będzie losowało, wyciągało ze skrzyni jedną zabawkę wystarczy dla każdego? Czy każdy będzie mógł wyciągnąć dla siebie jedną zabawkę? Sprawdzimy to. Dzieci losują. Każde dziecko przed losowaniem próbuje odpowiedzieć na różne pytania. Losuje oczywiście niezależnie od tego co odpowie. Czy to możliwe, że wyciągnie kalosz? Czy to możliwe, że wyciągnie kanapkę? Czy to możliwe, że wyciągnie kapustę? Czy to możliwe, że wyciągnie lalkę? Ciekawe czy wyciągnie misia czy samochód? Czy to możliwe, że wyciągnie zabawkę którą włożyło?

Do skrzyni wkładamy pożyczoną z kuchni plastikową miskę. Dzieci oczywiście widzą jak miska jest wkładana do skrzyni. Zamykamy skrzynię. Teraz oprócz zabawek, które tam włożyliśmy, jest jeszcze jedna miska. Zanim będziemy losować, zastanawiamy się czy to możliwe, że wyciągniemy ze skrzyni coś innego niż zabawkę? Co jest bardziej możliwe: to, że wylosujemy zabawkę czy to, że wyciągniemy miskę? Trzeba mieć więcej szczęścia żeby wylosować zabawkę czy żeby wylosować miskę? Co jest bardziej prawdopodobne: wylosowanie zabawki czy wylosowanie miski? A co jest mniej prawdopodobne: to, że wylosuję misia czy to, że wylosuję miskę?

Starożytni Grecy, Rzymianie czy Hindusi byli maniakami hazardu. Nie próbowali jednak zrozumieć praw matematycznych rządzących przypadkowością. W zdarzeniach losowych nie widziano matematyki, tylko wolę boską. Na przestrzeni dziejów ludzie wymyślali różne sposoby na interpretowanie zdarzeń. Przesądy skutecznie blokowały rozwój badań nad prawdopodobieństwem. Teorię prawdopodobieństwa zapoczątkował Girolamo Cardano, XVI-wieczny włoski uczony. Jego nałóg gier kościanych zaowocował krótkim traktatem na temat gier hazardowych. Była to pierwsza naukowa analiza prawdopodobieństwa. Wynalezienie prawdopodobieństwa spowodowało powolny upadek przesądów. Okazało się, że nieprzewidywalne wydarzenia podlegają prawom matematyki i nie trzeba odwoływać się do bogów, aby je wyjaśniać [121].

Już od przedszkola można i należy kształtować rozumienie prawdopodobieństwa. Codzienne sytuacje można doskonale wykorzystać do posługiwania się określeniami na pewno, możliwe, prawdopodobne, nieprawdopodobne, niemożliwe.

Pierwsze doświadczenia dzieci z rachunkiem prawdopodobieństwa są oparte na codziennych czynnościach i towarzyszących im obserwacjom. Rozwijanie rozumienia praw-

[121] D.J. Hand: Zasada nieprawdopodobieństwa. Dlaczego codziennie zdarzają się cuda, zbiegi okoliczności i rzadkie wydarzenia, Grupa Wydawnicza Foksal, Warszawa 2014.

dopodobieństwa od przedszkola, od pierwszych lat w szkole pozwoli dochodzić dzieciom w różnych sytuacjach do wniosku, że coś może się zdarzyć z większym lub mniejszym prawdopodobieństwem. Ważne jest, żeby dzieci poznawały podstawowe pojęcia nieformalnie, na długo przed formalnym nauczaniem w szkole rachunku prawdopodobieństwa. Zresztą uwaga ta dotyczy bardzo wielu pojęć, choćby ułamków czy liczby zero.

Dzieci nie tylko uczą się posługiwać odpowiednimi określeniami w konkretnych sytuacjach, ale też uczą się umieszczać te określenia w odpowiedniej kolejności, stopniować je: od tych które mówią o pewności do tych, które mówią o tym, że na pewno coś się nie wydarzy. Będzie to podstawą do tego, aby w szkole pojęcia te zastępować formalną reprezentacją liczbową prawdopodobieństwa, w skali 0 – 1. 0 oznacza, że na pewno coś się nie wydarzy, a 1, że na pewno się wydarzy. Pomiędzy 0 a 1 mieszczą się przypadki, które w przedszkolu opisywały jako możliwe: bardziej prawdopodobne, mniej prawdopodobne.

Prawdopodobieństwo pojawia się w momencie, kiedy do sytuacji wprowadzamy przypadek. Nie decydujemy od początku do końca o jej przebiegu. Kiedy dzieci losują ze skrzyni zabawki, a nie wybierają je. Jakiś wpływ na sytuację mają. To dzieci zebrały przedmioty, które włożyły do skrzyni, wiedzą co jest w środku – mogą wylosować tylko spośród tego co same wcześniej tam włożyły. Właśnie na podstawie tego jak ten wpływ oszacujemy, wnioskujemy o prawdopodobieństwie. To oczywiście bardzo uproszczona analiza, zupełnie jednak wystarczająca na potrzeby naszego wywodu. Podstawą szacowania jest wiedza o liczebnościach wszystkich możliwych przypadków oraz liczbie przypadków, które nas interesują. W worku są 3 czerwone klocki i 1 niebieski klocek. Jeżeli możemy zajrzeć do worka, obejrzeć wszystkie klocki, możemy podjąć decyzję, jakie klocki wyjmiemy najpierw (na przykład czerwone), a jakie następnie (niebieskie). W takiej sytuacji nie posługujemy się wnioskowaniem o prawdopodobieństwie. Nie ma tu przypadku, wszystko jest z góry przesądzone, zależne od naszej woli. Jeżeli nie zajrzymy do worka, tylko sięgniemy do niego ręką i wylosujemy klocek, wtedy nie wiemy jaki wyciągniemy. Możemy spróbować określić prawdopodobieństwo wylosowania klocka niebieskiego i prawdopodobieństwo wylosowania klocka czerwonego. Na podstawie tego co wiemy o tym co jest w worku (są tam 4 klocki: 3 czerwone i jeden niebieski), znamy liczbę wszystkich możliwości (4) oraz liczbę sprzyjających sytuacji (jest 1 klocek niebieski). Niebieskich jest mniej – jeden z czterech. Mniejsze jest prawdopodobieństwo wylosowania klocka niebieskiego. Prawdopodobieństwo wynosi 1 na 4, bo jeden z 4 klocków jest niebieski, to 25% szansa. Jeżeli nic nie wiemy o liczbie klocków w konkretnych kolorach, losowanie niczym się nie różni od poprzedniego, ale nie możemy nic powiedzieć o tym jaką mamy szansę na wylosowanie niebieskiego klocka. Nie mamy żadnych podstaw, danych by szacować prawdopodobieństwo wylosowania niebieskiego, czy czerwonego klocka.

W PRZEDSZKOLU, W SZKOLE

Dzieci gromadzą się na dywanie, przedtem każde znajduje jakiś czerwony klocek. Układają klocki przed sobą, sprawdzają czy każdy przyniósł czerwony klocek. Są same czerwone klocki, tu są tylko czerwone klocki. Układają wszystkie klocki na środku, wszyscy widzą, że klocki są czerwone, nie ma żadnych innych kolorów. Przykrywają klocki kocem, nie widać klocków. Teraz będziemy losowali klocki. Czy to możliwe, że wyciągniemy czerwony klocek? Na pewno wyciągniemy czerwony klocek. To niemożliwe żeby wyciągnąć niebieski klocek, pod kocem są tylko czerwone klocki. Pod koc do czerwonych klocków, które już tam są, dokładamy jeszcze jeden, zielony klocek. Ciekawe czy teraz, kiedy będziemy losowali też wyciągniemy czerwony klocek? Możliwe, że klocek, który wylosujemy będzie czerwony, ale możliwe też, że wylosujemy zielony. Co jest bardziej możliwe: że wylosujemy klocek czerwony czy, że wylosujemy klocek zielony? A czy jest możliwe, że wyciągniemy klocek niebieski? Na pewno nie wyciągniemy klocka w kolorze niebieskim. Pod kocem nie ma żadnego niebieskiego klocka. Dokładamy jeszcze więcej klocków zielonych. Każde dziecko może poszukać w sali zielonego klocka i dołożyć do tych, które już leżą pod kocem. Teraz pod kocem jest dużo klocków czerwonych i dużo klocków zielonych. Będziemy losować po jednym klocku. Czy to możliwe, że wylosujemy czerwony? Czy to możliwe, że wylosujemy zielony? Co jest bardziej możliwe? Wylosowanie czerwonego lub zielonego klocka jest tak samo możliwe. A czy jest możliwe, że wylosujemy żółty klocek? Na pewno nie wylosujemy żółtego klocka. To niemożliwe, bo pod kocem nie ma ani jednego żółtego klocka.

Wiele dzieci, ale też dorosłych, uważa, że „szóstkę" jest trudniej wyrzucić na kostce do gry niż jakąkolwiek inną liczbę oczek. Zwłaszcza, jeżeli każde wyrzucenie „szóstki" zbliża do wygranej. Różnorodne, wczesne doświadczenia z rachunkiem prawdopodobieństwa, też z użyciem kostki, losowaniem klocków czy tarczą z kolorowymi polami – zbliża dziecko do myślenia opartego na wnioskowaniu w oparciu o dane. Brak tego typu doświadczeń sprzyja skłonności do myślenia magicznego, łatwiej wtedy zamiast działać i brać sprawy w swoje ręce, poprzestawać na zaklęciach. Dziecko, które zachęca się do refleksji nad sytuacjami (także losowymi), zachęca się do określania szansy wystąpienia jakiegoś zdarzenia, będzie w życiu szukać przesłanek do podjęcia decyzji, a przede wszystkim szacować prawdopodobieństwo osiągnięcia zamierzonych celów. Takie dziecko, nie tylko nie będzie uważało, że im więcej razy wciśnie się przycisk windy, tym winda szybciej przyjedzie, ale też będzie potrafiło oszacować jakie jest prawdopodobieństwo wygrania w loterii pieniężnej. To jedyny sposób, by nauczyć się oceniać prawdopodobieństwo zdarzeń obiektywnie.

Doświadczenia (zadania) rozwijające

umiejętności określania tego, co prawdopodobne i nieprawdopodobne[122]

PRZEDSZKOLE I SZKOŁA
rozróżnianie sytuacji losowych oraz sytuacji, w których zdarzenia są pewne
dzieci uczą się dostrzegać sytuacje pewne oraz takie, w których o przebiegu decyduje w mniejszym lub większym stopniu przypadek

Dzieci wymieniają zdarzenia, które nigdy nie nastąpią, czyli są niemożliwe, na przykład nigdy krowa nie będzie huśtała się na huśtawce.

[122] Jeżeli dzieci mają kłopot ze zrozumieniem określeń: prawdopodobne, nieprawdopodobne można jest zastąpić innymi, na przykład: możliwe, niemożliwe.

Potem wymieniają zdarzenia, które na pewno się wydarzą, na przykład jutro będzie też dzień.
Robią listę zdarzeń, które mogą się zdarzyć, na przykład jutro może padać deszcz.

PRZEDSZKOLE I SZKOŁA
Posługiwanie się pojęciami: na pewno, możliwe, prawdopodobne, nieprawdopodobne, niemożliwe
dzieci nie tylko uczą się stosowania tych określeń w adekwatnych sytuacjach, ale też uczą się szeregować je od tych, które mówią o pewności do tych, które mówią o tym, że coś jest niemożliwe

Nauczyciel pokazuje dzieciom klocki. Wszystkie klocki są niebieskie.
Pyta: Czy prawdopodobne jest, że wylosuję czerwony klocek?
Jaki klocek na pewno wylosuję?

Nauczyciel pokazuje dzieciom klocki. Wśród niebieskich klocków jest 1 czerwony klocek.
Pyta: Czy prawdopodobne jest, że wylosuję czerwony klocek?
Jaki klocek wylosuję z większym prawdopodobieństwem: czerwony czy niebieski?

Nauczyciel pokazuje dzieciom klocki. Wśród niebieskich klocków jest 1 czerwony klocek i 1 zielony.
Pyta: Czy prawdopodobne jest, że wylosuję czerwony klocek?
Czy prawdopodobne jest, że wylosuję zielony klocek?
Jaki klocek wylosuję z większym prawdopodobieństwem: czerwony czy niebieski?
Jaki klocek wylosuję z większym prawdopodobieństwem: czerwony czy zielony?

Nauczyciel pokazuje dzieciom klocki. Połowa klocków jest niebieska a połowa czerwona.
Pyta: Czy prawdopodobne jest, że wylosuję czerwony klocek?
Czy prawdopodobne jest, że wylosuję niebieski klocek?
Jaki klocek wylosuję z większym prawdopodobieństwem: czerwony czy niebieski?

PRZEDSZKOLE I SZKOŁA
Posługiwanie się pojęciem najczęściej

Dzieci rozmawiają na przykład o tym co najczęściej jedzą na śniadanie, czy co najczęściej robią w domu po przyjściu z przedszkola.

Na kartonikach narysowane są różne obiekty, część z nich wielokrotnie się powtarza. Dziecko wybiera te rysunki, które pojawiają się najczęściej.

4.2. Stosowanie rozumowań matematycznych i liczb Zbieranie, kodowanie i analizowanie danych

Na początku dziecko opisuje rzeczywistość wprost, tak jak ją widzi: coś jest ładne, czy brzydkie; coś jest mamy, czy taty; coś się przyda do zabawy, albo i nie. Wraz z rozwojem myślenia matematycznego, rozwojem umiejętności operowania liczbami dziecko coraz lepiej radzi sobie z ilościowym opisem rzeczywistości. Przedszkolak bardzo chętnie posługuje się cechami ilościowymi w opisie tego, co je otacza: Mam dwa misie. Mam więcej cukierków niż ty. Chcę dwa jajka na śniadanie. Zjadłem jedno ciastko i jeszcze jedno ciastko.

Świat jest dziś pełen informacji: ważnych i nieważnych, przydatnych i nieistotnych, takich które mają lub mogą mieć znaczenie. Docierają do nas przez internet, z telewizji, z plakatów reklamowych i z opakowań kosmetyków. Aby zrozumieć sens danych, które nas zalewają, musimy być w stanie przetwarzać i przekształcać je w użyteczną wiedzę. Umiejętność interpretowania danych oraz tworzenia prognoz i decyzji w oparciu o nią, staje się podstawową umiejętnością każdego człowieka. Im wcześniej dzieci zetkną się z różnorodnymi sposobami zbierania, porządkowania i interpretowania danych tym lepiej.

Można z przedszkolakami dokonać statystycznej analizy danych, na przykład zbadać jakie są ich upodobania dotyczące ulubionych słodyczy. Nie dokonamy oczywiście analizy danych posługując się procentami, średnimi, odchyleniami standardowymi. Ustalimy, jakie słodycze dzieci lubią, poklasyfikujemy je i policzymy: ile dzieci jakie słodycze lubi. Słowo statystyka pierwotnie nie miało niczego wspólnego z liczbami. Pojęcia tego używano na określenie ogólnych faktów dotyczących państwa, informacji, które potrzebne były władcom. Adolphe Quetelet – belgijski matematyk – rozszerzył pojęcie statystyka. Fascynował się szukaniem prawidłowości w liczbach. Między innymi badał francuskie statystyki dotyczące przestępczości. Doprowadziło go to do opisania regularności zjawisk społecznych w skali całej populacji. Nie wiadomo kto zostanie w danym roku mordercą, ale można przewidzieć, ile zostanie popełnionych morderstw. **Statystyka to matematyka zachowań zbiorowych**[123]**.** Podobnie przedszkolaki będą ustalały nie kto co lubi, ale ile osób woli cukierki, a ile ciastka.

W różnych propozycjach zajęć z edukacji matematycznej dla przedszkolaków i uczniów klas początkowych szkoły podstawowej jest bardzo mało zadań na organizowanie danych, które byłyby wprowadzeniem do statystyki. Tymczasem tego typu zadania to świetna okazja do liczenia, rachowania, kodowania danych liczbowych, tak żeby łatwo było je było odczytać. Nie mamy tradycji edukacyjnej uczenia dzieci już od przedszkola budowania wykresów słupkowych, potem liniowych, tabel, posługiwania się piktogramami. Uczniowie zaczynają uczyć się korzystać z danych w tabelach w pierwszej lub w drugiej klasie szkoły podstawowej. Zaczynają od odczytywania danych, a nie od budowania tabel. Powinno być odwrotnie. Najpierw są informacje – dane, które trzeba jakoś uporządkować, zorganizować. Z czasem dopiero ważne staje się **jak je zapisać, jak przechować, żeby później łatwo było je odczytać i z nich skorzystać**. Tabela, którą samodzielnie się konstruuje to zupełnie inna tabela: wiem czemu służy, dlaczego tak a nie inaczej wygląda, jak odczytać z niej dane.

U progu edukacji matematycznej dzieci są niepotrzebnie chronione przed matematyką. W zamian za to serwuje im się infantylną, nieżyciową, zdziecinniałą matematykę w po-

[123] W. Ostasiewicz: Myślenie statystyczne, Wolters Kluwer Polska Sp. z o.o., Warszawa 2012.

staci niewiele wnoszących ni to zabaw, ni to zadań. Od przedszkola nie uczy się dzieci myślenia. A potem załamuje się ręce, że dzieci nie myślą.

Już przedszkolaki uczą się używać określeń: popularniejszy, mniej popularny. Łączy się to z porównywaniem liczebności dwóch zbiorów. Dzieci ustalają, jaki owoc jest bardziej popularny w ich grupie: jabłko czy pomarańcza. Dzielą się na dwie grupy: na tych, którzy wolą jabłko i na tych, którzy wolą pomarańczę. Ustalają, w której grupie jest więcej/mniej osób. Tam gdzie więcej – ten owoc jest bardziej popularny. Już przy takich prostych badaniach dzieci uczą się bardzo ważnych umiejętności z zakresu statystyki – jeżeli chcemy poznać preferencje grupy, to każdy musi wziąć udział w badaniu. Uczą się stosować zasadę: jeden wybór z ograniczonej liczby wyborów. W tym przypadku jest to wybór z dwóch możliwości – jabłko lub pomarańcza.

Nauczyciel może zwiększyć liczbę wyborów, na przykład do trzech: jabłko, pomarańcza, banan. Tym samym pojawia się kolejne określenie ze statystyki – **najmniej popularny**. Dzieci porównują też liczebności trzech zbiorów.

Zbierane informacje przedszkolaki notują w prostej tabeli, ucząc się też stosowania symboli. Zacząć trzeba od prostej tabeli i prostych symboli. Na przykład dzieci ustalają, w jakim kolorze wolą papierowe czapeczki: czerwone czy niebieskie. Każdy wybiera sobie jedną czapeczkę w preferowanym kolorze. Dane w postaci czapeczki umieszczają w prostej tabeli, którą na podłodze wykleił nauczyciel[124].

Każda skonstruowana tabela czy wykres powinien być **omówiony przez dzieci z pomocą nauczyciela**. Na przykład przedszkolaki sprawdzają, jaką dziś wolą bawić się zabawką – misiem czy piłką. Kiedy już ustalą nauczyciel podsumowuje: Dzisiaj w naszej grupie więcej dzieci woli bawić się piłką. Piłka jest bardziej popularną zabawką w naszej grupie niż miś.

W analizie danych statystycznych istotne jest opisywanie warunków w jakich prowadzono badania (w naszej grupie popularny jest…; dzisiaj wolimy…). Uczy to dzieci **precyzji analizowania i opisywania danych a przede wszystkim warunkowania**. Podstawą konstruowania tabel i wykresów jest dobra sprawność w klasyfikowaniu.

Podczas zadań z budowaniem tabel czy wykresów dzieci **szacują**, czyli przewidują, jakie mogą być wyniki. Szacowanie zmusza do refleksji, daje lepszy wgląd w liczby i operacje na nich.

Zadania ze statystyki dla przedszkolaków i uczniów klas I-III nie powinny być wyabstrahowanymi sytuacjami, ale sytuacjami związanymi z ich grupą, z ich codziennym funkcjonowaniem, z ich upodobaniami, środowiskiem w którym żyją. To bardzo motywuje dzieci do zajmowania się rozwiązywaniem problemu.

Nauczyciel nie musi obawiać się stosowania pojęcia tabela, czy wykres. Nie chodzi o to by dzieci potrafiły używać tych nazw, a o to, żeby z tymi terminami się osłuchały.

Warto już w przedszkolu dawać dzieciom doświadczenia porządkowania i analizowania danych liczbowych. **Pozwala to zrozumieć znaczenie arytmetyki**. Rozwija gotowość do przedstawiania informacji za pomocą graficznej reprezentacji, badania wszystkich ważnych elementów graficznych, unikając interpretacji częściowych i pochopnych. Uczy zachowania porządku i precyzji w przygotowaniu i prezentacji wykresów i tabel, a także precyzji i dokładności w stosowaniu technik graficznych. Przedstawianie danych na wykresach, w tabelach to okazja do uczenia się liczenia i porównywania liczebności, po-

[124] Opis tego zadania zamieszczamy na końcu tego rozdziału.

sługiwania się regułą jeden do jednego, możliwość działania z cyframi, literami i innymi symbolami – a to umiejętności z matematyki, których dziecko uczy się w przedszkolu i na początku nauki w szkole.

Doświadczenia (zadania) rozwijające

w zakresie zbierania, kodowania i analizowania danych

PRZEDSZKOLE I SZKOŁA
Szacowanie wielkości i notowanie przewidywanych wyników
dzieci szacują, ile czegoś jest, jakie coś jest długie, dalekie, ciężki itp. Potem mierzą, liczą i notują z pomocą nauczyciela tak, jak potrafią wyniki. Rozmawiają na temat przewidywań i rzeczywistych wyników

Ile drzew rośnie od bramy do przystanku autobusowego?
Ile dziecko zrobi kroków od drzwi do kącika lalek?
Co jest szersze: brama czy schody do przedszkola?

PRZEDSZKOLE I SZKOŁA
Budowanie prostej tabeli, odczytywanie zakodowanych w niej danych, analizowanie ich
dzieci z pomocą nauczyciela budują prostą tabelę, dane zaznaczają jednoznacznymi rysunkami – ikonami

Dzieci mają ustalić, co lubią najbardziej: jabłka, gruszki czy śliwki.
Trzeba koniecznie zdecydować się na jeden z tych owoców.
Nim określą, mają oszacować: jak sądzą, który owoc będzie najczęściej wybierany, czyli najpopularniejszy? A który najrzadziej, czyli najmniej popularny?
Potem każde z dzieci wybiera jeden z obrazków (piktogram): jabłka, gruszki lub śliwki.
Nauczyciel wykleja papierową taśmą na podłodze linie, które będą wyznaczać, gdzie trzeba położyć obrazki[125].
Dzieci układają obrazki w odpowiednich miejscach, jeden pod drugim.
Potem odpowiadają na pytania: Ile osób wybrało jabłko? Ile gruszkę? A ile śliwkę?
Ile razem dzieci wybierało owoce?
Który owoc wybrało najwięcej dzieci?
Który owoc wybrało najmniej dzieci?[126]

[125] Ważne, żeby wszystko działo się właśnie na podłodze, a nie na tablicy. Dzięki temu każde dziecko ma jednakowo łatwy dostęp i może samodzielnie ułożyć to co trzeba, tam gdzie uzna za stosowne.
[126] por. M. Skura, M. Lisicki: Statistika pre deti?, Studia Scientifica Facultatis Pedagogicae, Universitas Catholica Ruzomberok, Ruzomberok 2014, s. 90-106.

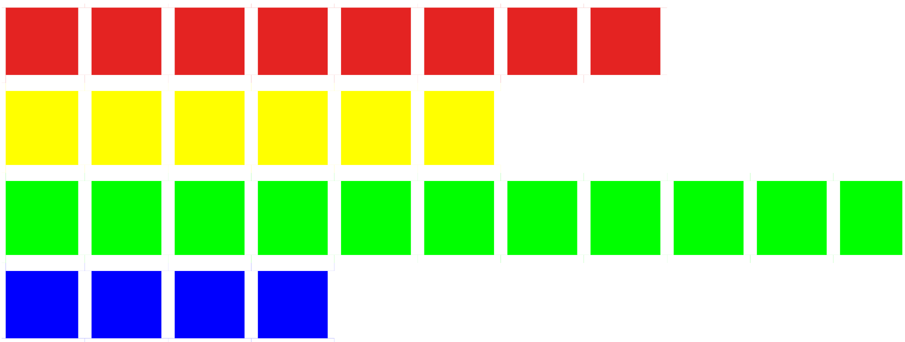
PRZEDSZKOLE I SZKOŁA
Budowanie prostego wykresu słupkowego, odczytywanie zakodowanych w nim danych, analizowanie ich
dzieci z pomocą nauczyciela budują prosty wykres słupkowy, dane zaznaczają jednoznacznymi ikonami[127]

Każde z dzieci ma wybrać jeden z kolorów[128]: czerwony, żółty, niebieski lub zielony.
Nim wybiorą, szacują, który kolor, ich zdaniem, będzie najczęściej wybierany, a który najrzadziej. Który będzie najpopularniejszy, a który najmniej popularny? Sprawdzą, czy ich przewidywania były słuszne.
Każde z dzieci wybiera jedną z kartek: czerwoną, żółtą, niebieską lub zieloną.
Nauczyciel wykleja papierową taśmą na podłodze linie, które wskażą, w których miejscach dzieci mają położyć wybrane przez siebie kartki.
Dzieci kładą kartki jedną nad drugą we właściwych miejscach. Odpowiadają na pytania: Ile dzieci wybrało niebieski kolor? Jaki kolor wybrało najwięcej dzieci? Jaki kolor wybrało najmniej dzieci? Ile razem dzieci wybierało kolor? Ile razem dzieci wybrało niebieski lub zielony kolor?

[127] Bardzo pomocne są tablice magnetyczne, które ułatwiają tworzenie tabel. Na przykład nauczyciel wiesza na tablicy 2 zdjęcia owoców, rysuje linię między nimi i dzieci mają umieszczać małe lodówkowe magnesy pod owocem, który bardziej lubią.

[128] Jeżeli ustalenie jaki kolor dzieci będą wybierały najczęściej – jaki im się najbardziej podoba, będzie dla dzieci zbyt abstrakcyjne, łatwo można ten wybór „ukonkretnić", na przykład w jakim kolorze chciałbym zrobić łódkę?

Każde dziecko wybiera papierową czapeczkę: niebieską lub czerwoną. Nauczyciel wykleja na podłodze linię. Po jednej stronie linii siadają dzieci w niebieskich czapeczkach, a po drugiej w czerwonych. Miejsce, w którym ma usiąść każda grupa, dorosły zaznacza odpowiednim kolorem kartki. Dzieci zdejmują czapki i układają je jedna nad drugą. Odpowiadają na pytania: Ile dzieci wybrało niebieską czapeczkę? Ile dzieci wybrało czerwoną czapeczkę? W jakim kolorze czapeczka jest bardziej popularna w naszej grupie: czerwonym czy niebieskim? [129]



PRZEDSZKOLE I SZKOŁA
Budowanie prostego wykresu słupkowego (lub prostej tabeli)[130] odczytywanie zakodowanych na nim danych, analizowanie ich
dzieci z pomocą nauczyciela budują prosty wykres słupkowy (lub prostą tabelę), dane zaznaczają symbolami. Teraz jest trudniej niż w poprzednich zadaniach, bo dzieci nie zaznaczają swoich wyborów jednoznacznymi rysunkami ale umówionymi symbolami.

Dzieci ustalają, jaki jest ich ulubiony deser.
Nauczyciel wiesza na tablicy rysunek lodów, a obok niego zieloną kartkę.
Niżej wiesza rysunek ciastka i niebieską kartkę.
Niżej rysunek cukierków i czerwoną kartkę.
I jeszcze rysunek czekolady i żółtą kartkę[131].
Zadanie będzie tym prostsze im mniejszy będzie wybór.
Nauczyciel wykleja na podłodze linie.
Każde z dzieci wybiera jeden z zaproponowanych deserów, bierze kartkę w odpowiednim kolorze i kładzie w odpowiednim miejscu na podłodze.
Nauczyciel zadaje pytania do zbudowanego wykresu.

[129] por. M. Skura, M. Lisicki (red.): Myślenie matematyczne. Zabawy i zadania dla starszych przedszkolaków. op. cit.

[130] Jeżeli zbudujemy z dziećmi prostą tabelę na podłodze, to w zależności z którego miejsca na nią spojrzymy będzie ona: tabelą pionową, tabelą poziomą lub wykresem słupkowym.

[131] Można ułatwić dzieciom zadanie i zaproponować łatwiejsze symbole, które wprost kojarzą się z kodowanym obiektem, na przykład dzieci wybierają smaki lodów, które kodują kartki: żółta – lody śmietankowe; czerwona – truskawkowe; brązowa – czekoladowe

PRZEDSZKOLE I SZKOŁA
Spośród różnych danych wybieranie tylko tych, które są w danej chwili ważne i umieszczanie ich w tabeli/na wykresie

Dziecko ma kartoniki z rysunkami różnych zwierząt, wśród nich są kartonik z krowami i psami.
Ma też kartkę, przedzieloną linią na pół.
Na górze jednej kolumny narysowany jest pies, a na górze drugiej kolumny – krowa.
Dzieci wybierają kartoniki tylko z rysunkami psów oraz krów i umieszczają je w odpowiednim miejscu tabeli.
Liczą, ile jest krów, a ile psów.
Czego jest więcej: psów czy krów?

4.3. Stosowanie rozumowań matematycznych i liczb Całość i części całości

Kasia zjadła pół pizzy i Jaś zjadł pół pizzy. Czy zjadły po tyle samo pizzy? Nie odpowiemy na to pytanie, póki nie dowiemy się, czy pizze były tej samej wielkości. Kiedy przy odpowiedzi na pytanie pojawiają się wątpliwości i dziecko szuka informacji, które pozwolą mu rozwiązać zadanie, to znaczy, że zrozumiało bardzo ważną własność ułamka. Dziecko pojęciem ułamka posługuje się już w przedszkolu, co nie oznacza, że rozumie, co to takiego. Intuicje rozumienia pojęcia części całości widać w zachowaniu dziecka bardzo wcześnie. Woli **całe ciastko** czekoladowe niż **część tego ciastka**. Wie, że sprawiedliwie dzielić, to znaczy po pół: pół jabłka dla niego i pół dla siostry. Można więc już w przedszkolu dawać dzieciom doświadczenia, które w przyszłości pozwolą lepiej im zrozumieć pojęcie ułamka. Rozumienie, że jest całość i część tej całości to podstawa dalszych doświadczeń z ułamkami.

Dzieci poznają **ułamki intuicyjnie** – poprzez doświadczania manipulowania różnymi obiektami, które rozcinają, rozkładają, rozdzielają na kilka równych części. Już od małego słyszą o połowie, na przykład tabliczki czekolady, jabłka, czy szklanki soku. Słyszą też o ćwiartkach brzoskwini, czy chleba. Również same próbują dzielić coś na części „po równo", na przykład wtedy, gdy chcą ciastko podzielić sprawiedliwie – „po równo" pomiędzy siebie i siostrę.

Dzieci najwcześniej poznają tak zwane **ułamki życiowe**, czyli takie, którymi najczęściej w życiu się posługujemy. To połowa, ćwiartka, trzy czwarte, jedna trzecia. Zrozumienie pojęcia ułamka niesie ze sobą wiele trudności. Liczba naturalna kojarzy się z konkretną liczebnością, zaś ułamek nie kojarzy się z niczym konkretnym. Jeżeli wyjdziemy poza ułamki życiowe to jeszcze bardziej uwidacznia się ten brak przełożenia na konkrety. Ile to na przykład 2/23. Trudno to sobie wyobrazić. A czy 2/23 to więcej czy mniej niż 3/41? Czysta abstrakcja. Warto wcześnie dawać dzieciom doświadczenia z posługiwaniem się pojęciem ułamka. Oczywiście te pierwsze doświadczenia są oparte na działaniach z konkretnymi obiektami. Dziecko osłuchuje się z tym pojęciem.

Małe dziecko tylko intuicyjne pojmuje ułamek. Znajduje się ono na etapie **myślenia przedoperacyjnego** i związanego z tym wnioskowania. Jest przekonane, że gdy całość podzieli na części, to otrzyma więcej niż było przed podziałem. Ułamek jest pojęciem wymagającym abstrakcyjnych rozumowań. W dzbanku jest sok. Przedszkolak rozlewa sok do szklanek – długo jest przekonany o tym, że w szklankach jest więcej soku niż w dzbanku.

Żeby zobaczyć, jak trudnym pojęciem jest ułamek, przyjrzyjmy się jego **własnościom**. Czy zawsze 1 = 1? Mamy 1 dużą pizzę i 1 małą pizzę. Czy 1 w tym przypadku równa się 1? Czy tu i tu jest tyle samo? Odpowiedź nie jest prosta. Zmierzenie się z takim zadaniem wymaga dużej zdolności abstrahowania, dobrego zrozumienia liczby i znaku równości. Liczba nie mówi nam jaki jest przedmiot: mały czy duży. Przedmioty mogą być większe czy mniejsze, ale liczby, które je opisują jeżeli są takie same, to są równe. Dzielimy małą, średnią i dużą pizzę na 6 jednakowych kawałków. Bierzemy po 1 z 6 kawałków z każdej pizzy, czyli po 1/6 pizzy. I z małej pizzy 1/6, i ze średniej i z dużej. 1/6 = 1/6 = 1/6, ale pod względem wielkości każdy z tych kawałków będzie inny. Największy kawałek pochodzi oczywiście z największej pizzy, a najmniejszy z najmniejszej. Wielkość otrzymanego kawałka zależy od dwóch czynników: wielkości całości, która podlega podziałowi oraz liczby części, które powstały przez dzielenie.

Mamy małe jabłko i dużego arbuza. Dzielimy oba owoce na połowy. **Nie ma większej i mniejszej połowy** jabłka, bo połowy tego samego jabłka są sobie równe. Jednak rozmiarem połowa jabłka jest znacznie mniejsza od połowy arbuza. Można między połówkami zapisać znak równa się: 1/2 = 1/2. Jedna i druga połowa są zawsze tylko połową całości. Połową jakiejś całości – jedności, chociaż ta całość może być większa lub mniejsza. O tym liczba nie mówi, opisuje tylko, ile jest[132].

Różnej natury jest też całość, której ułamka szukamy. Tą całością może być tort, pizza, jabłko, litr soku, kilogram cukru ale też paczka cukierków, czy pudełko kredek. Całością może więc być obiekt, miara lub zbiór obiektów. Ułamek otrzymujemy przez podział całości na równe części i wybranie określonej liczby tych części. W paczce jest 12 cukierków – połowa to 6 cukierków.

Ułamek podobnie jak liczba naturalna występuje w kilku **aspektach**:

- ułamek jako miara: jest to historycznie najwcześniejsza i do dziś stosowana funkcja ułamków (pół kilograma, półtora kilometra);
- ułamek jako stosunek dwóch wielkości wyrażonych liczbami całkowitymi: musimy użyć dwóch liczb, które w zapisie rozdzielone są kreską ułamkową;
- ułamek jako operator (funkcja) przekształcający dowolną wielkość: na przykład ułamek ¾ określa funkcję, która wielkość „a" przekształca w wielkość „b" w ten sposób, że najpierw dzieli „a" przez 4, a następnie mnoży wynik przez 3[133].

Przedszkolakowi najbliższa i w zasadzie jedynie dostępna jest funkcja ułamka jako miary. To kolejny argument za tezą, że można znaleźć podobieństwo między rozwojem matematyki jako dziedziny nauki z tym, jak rozwija się myślenie matematyczne dziecka.

Ułamki znane były już w starożytności, ale z powodu braku odpowiednich zasad numeracji rozmaicie je oznaczano i nie nadawały się do praktycznego zastosowania. Z początku nie uważano ułamków za liczby. Egipcjanie znali tylko tak zwane ułamki „unitarne", czyli z licznikiem 1. W miarę rozwoju arytmetyki dostrzeżono, że ułamki podlegają tym samym regułom, co liczby całkowite, a więc mogą być traktowane jak liczby, a liczby całkowite jako ułamki o mianowniku 1. Współczesny sposób zapisywania ułamków zwykłych

[132] Jeleńska L.: Metodyka arytmetyki i geometrii w pierwszych latach nauczania, op. cit., s.71-75.dd

[133] D. Wood: Jak dzieci uczą się i myślą. Społeczne konteksty rozwoju poznawczego, Wyd. Uniwersytetu Jagiellońskiego, Kraków 2006, s. 226.

zawdzięczamy Hindusom, którzy posługując się swoją numeracją pozycyjną o bazie 10 zapisywali ułamki podobnie jak robimy to do dziś[134].

Z ułamkami związana jest jeszcze jedna trudność. Dzieci od przedszkola, przez nauczanie początkowe w szkole uczą się porządku liczb naturalnych. Wielokrotnie słyszą i same opisują, że po 2 jest liczba 3, po 7 liczba 8, przed 6 liczba 5, a przed 1 liczba 0. W czwartej klasie poznają ułamki zwykłe i dowiadują się, że pomiędzy 1 a 2 jest niezliczona liczba liczb. Podobnie jak pomiędzy każdą inną parą liczb. Dla wielu uczniów zrozumienie tego może być wielkim kłopotem.

Od przedszkola dzieci poznają ułamek jako część całości. Rozpoznają, znajdują ½, ¼ i ¾ części tej samej całości. Porównują, czy połowa jest większa czy mniejsza niż ćwiartka tej samej całości. Dochodzą do tego, że dwie ćwiartki dają połowę, a dwie połowy dają całość. Dziecko zna połowę, ćwierć, ale zawsze to połowa jakiegoś przedmiotu, coś bardzo konkretnego, nie mającego większego związku z liczbą. Dopiero po kilku latach takich doświadczeń, w czwartej klasie szkoły podstawowej, poznaje **ułamki jako liczby w ciągu**. W nowych kontekstach, stare doświadczenia mogą poważne utrudniać pełne zrozumienie czym jest ułamek. Do tej pory każda poznawana przez dziecko liczba była poprzedzona inną określoną liczbą, a po niej była następna w ciągu liczb całkowitych. W przypadku ciągu ułamków nie istnieje „następny" ułamek, a pomiędzy dwoma ułamkami zawsze jest nieskończenie wiele innych. To kolejne argumenty przemawiające za tym, by „nie chronić" dzieci przed tym by zapoznawały się z ułamkami.

W PRZEDSZKOLU, W SZKOLE

Przedszkolaki mogą w wielu sytuacja doświadczać pojęcia ułamka:
- z takich samych kształtów, części składają całość (mozaiki, puzzle);
- całość dzielą na takie same części i stwierdzają, że część jest mniejsza od całości (podział ciasta, ale też podział kartki, czy paczki kredek);
- słyszą jak dorośli używają nazw ułamków życiowych (połowa, ćwiartka) w odniesieniu do obiektu, rzadziej w odniesieniu do zbioru obiektów (tata daje dziecku połowę gruszki; dziadek obdziela wnuki cukierkami – połowa paczki cukierków dla wnuków, a połowa dla dziadka);
- porównują różne kształty, które są częścią tej samej całości: połowa koła i ćwiartka tego samego koła;
- sprawdzają, jak wiele mniejszych części tworzy całość (4 wycinki koła tworzą całe koło).

1/3 to **tyle samo**, co 2/6, ale to **nie to samo**. Każdy z tych ułamków zapisuje inne czynności, inną rzeczywistość, ale z matematycznego punktu widzenia ich wartość jest taka sama. Ułamki w tym przypadku informują o proporcjach: jeden z trzech to taka sama proporcja co dwa z sześciu. Ale z odniesieniem tych ułamków do rzeczy z perspektywy do jakiej przyzwyczajone jest dziecko może być bardzo trudne. Jak uznać, że 2 kawałki to mniej niż 1 – kiedy bardzo dużą czekoladę podzielimy na trzy części i weźmiemy jedną, a bardzo małą na sześć i weźmiemy dwie. Proces jaki musi przejść dziecko, by z powodzeniem rozpocząć swoją przygodę z ułamkami, powinien doprowadzić je do umiejętności bardzo sprawnego abstrahowania od jednych okoliczności, przy warunkowym uwzględnianiu innych. To trudne dla dzieci. Nie widać też zapisu przekształcenia.

[134] G. Ifrah: Dzieje liczby czyli historia wielkiego wynalazku, op. cit., s. 246.

Doświadczenia (zadania) rozwijające

w zakresie rozumienia pojęć całość i części całości

PRZEDSZKOLE
Określanie całości i części tej całości
dzieci uczą się, co to jest całość i że w całości można wyróżnić jej część. Ta część może być większa lub mniejsza, a mogą być też części tej samej wielkości. Ważne, żeby pokazywać dzieciom, że całością może być jeden obiekt, jak i zbiór obiektów

Codzienne czynności: czekolada i kawałki czekolady, ciasto i porcje ciasta, mandarynki i cząstki mandarynek; paczka cukierków i kilka cukierków z tej paczki, pudełko kredek i kilka kredek z tego pudełka itp.

Nauczyciel dzieli jabłko na dwie części: najpierw są to dwie różne części, jedna większa, a druga mniejsza. Jedno z dzieci dostaje mniejszą część jabłka, a drugie większą. Następnie nauczyciel dzieli jabłko na dwie równe części. Teraz każde dziecko dostaje po tyle samo, czyli pół jabłka.

Nauczyciel ma paczkę kredek. Rozdziela kredki między dwoje dzieci: jedno dostaje więcej kredek, a drugie mniej. Potem rozdziela kredki po równo między dzieci: jedno dostaje połowę paczki kredek i drugie dostaje połowę paczki kredek.

PRZEDSZKOLE
Składanie z części całości
dzieci rozdzielają całość na równe części, a potem z powrotem z tych części składają całość. Całością jest obiekt, albo też zbiór obiektów. Ważne są opisy słowne tego, co się robi

Dzieci składają koło na połowę i rozcinają je na pół. Mają teraz dwie połowy koła. Składają połowy z powrotem i otrzymują całe koło.
Dzieci składają prostokątną kartkę na pół i rozcinają ją. Mają teraz dwie połowy kartki. Następnie każdą połowę składają jeszcze raz na pół i też rozcinają.
Mają cztery ćwiartki kartki. Składają z ćwiartek całą kartkę.
Dzieci mają pudełko puzzli (najlepiej, żeby na początku ich liczba była parzysta). Rozdzielają elementy układanki pomiędzy dwóch kolegów – każdy z nich dostaje połowę liczby elementów puzzli.
Z powrotem łączą dwie połowy i mają całe pudełko puzzli.

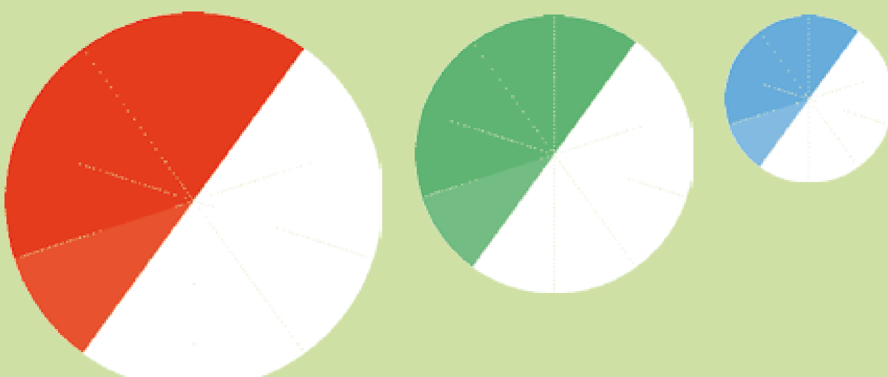
PRZEDSZKOLE I SZKOŁA
Wyróżnianie w większych i mniejszych całościach równych części
dzieci porównują różne części tej samej całości, sprawdzają jak się mają do siebie połowa i ćwiartka, całość i połowa. Ważne są opisy słowne tego, co się robi

Dzieci składają koło na pół i rozcinają. Mają dwie połowy koła. Składają jedną połowę jeszcze raz na pół i rozcinają. Porównują wielkość połowy i ćwiartki.

Dzieci mają pasek papieru. Składają na pół i rozcinają. Każdą z dwóch części składają na pół i rozcinają. Mają teraz 4 części. Każdą część składają na pół i rozcinają.
Czynność powtarzają tyle razy, ile się da.

PRZEDSZKOLE I SZKOŁA
Rozumienie tego, że połowa jest równa połowie tylko wtedy, gdy dotyczy to tego samego obiektu
to bardzo trudne doświadczenia, które jednak warto dawać dzieciom już od najmłodszych lat, gdyż ich brak ma konsekwencje w późniejszej, szkolnej nauce matematyki. Dzieci mają dwa obiekty, dzielą je na połowy i porównują połowy różnych obiektów. W tego typu zadaniach dzieci mają tylko na podstawie własnych doświadczeń dochodzić do uogólnień, żadne tłumaczenia słowne dorosłego nie pomogą im w zrozumieniu problemu

Dzieci mają duże koło i małe koło. Dzielą każde z nich na pół. Porównują połowy dużego koła, potem połowy małego koła. Połowy dużego koła są sobie równe, podobnie jak połowy małego koła.
Potem połowę małego koła porównują z połową dużego koła.
Teraz będą potrzebne trzy papierowe koła, każde innej wielkości – najlepiej żeby znacznie różniły się rozmiarem.
Zadanie będzie jeszcze łatwiejsze, kiedy koła będą w różnych kolorach: największe czerwone, średnie zielone, najmniejsze niebieskie.
Układają koła od największego do najmniejszego, od najmniejszego do największego.
Każde dziecko dzieli swoje koła na pół: połowy czerwonego koła są sobie równe, połowy zielonego koła są sobie równe, połowy niebieskiego koła są sobie równe.
Kładzie obok siebie połowę czerwonego koła, połowę zielonego koła i połowę niebieskiego koła.



Połowa którego koła jest największa? Dlaczego?
Połowa którego koła jest najmniejsza? Dlaczego?
Czy połówki kół też można uporządkować od największej do najmniejszej, od najmniejszej do największej?

PRZEDSZKOLE I SZKOŁA
Rozumienie ułamka jako części zbioru obiektów
dzieci uczą się posługiwać określeniem kilka z wielu, na przykład jeden z sześciu, czy trzy z dziesięciu. Warto łączyć tego typu doświadczenia z zadaniami, które opisujemy w części poświęconej przygotowaniu do analiz statystycznych[135]

Dzieci ustalają, gdzie chcą iść na spacer. Do wyboru mają: las symbolizowany przez drzewo lub plac zabaw symbolizowany przez huśtawki. Każde dziecko dokonuje wyboru i w wyznaczonym przez dorosłego miejscu kładzie kartonik z symbolem: rysunek drzewa oznaczający „wolę pójść do lasu" lub huśtawki „wolę pójść na plac zabaw".
Na początku liczą, ile dzieci dokonywało wyboru, to znaczy: „ile nas jest".
Potem liczą, ile osób wybrało spacer do lasu, a ile plac zabaw.
Z pomocą dorosłego opisują, na przykład tak:
- dziesięcioro dzieci z piętnastu osób wybrało spacer do lasu;
pięcioro dzieci z piętnastu woli pójść na plac zabaw.
Wynika z tego, że dzieci pójdą do lasu.
Taki jest wynik głosowania. Więcej dzieci wybrało las.
Kiedy dzieci uporządkują swoje wybory zawsze warto przeanalizować wyniki, posługując się określeniami kilka z wielu, na przykład trzy z dwunastu osób wybrało lody czekoladowe.

Codzienne sytuacje doskonale nadają się do stosowania określeń kilka z wielu:
Dzieci liczą, ile stoi doniczek na parapecie.
Potem, liczą ile wśród nich jest zielonych doniczek i z pomocą dorosłego opisują: dwie z siedmiu doniczek są zielone.
Liczą ile w sali jest krzeseł, a ile spośród nich jest wolnych;
ile na ścianach wisi obrazów, a ile spośród nich wisi na jednej ścianie?

[135] zob. część 4.2 – Zbieranie, kodowanie i analizowanie danych

Bibliografia

Bellos A.: Przygody Alexa w krainie liczb. Podróże po cudownym świecie matematyki, Wyd. Albatros S.Kuryłowicz, Warszawa 2013

Brożek B., Hohol M.: Umysł matematyczny, Copernicus Center Press, Kraków 2014

Bruner J.S.: Poza dostarczone informacje, PWN, Warszawa 1978

Butterworth B.: The Mathematical Brain, Macmillan, Londyn 1999

Cockburn A.D., Littler G.: Mathematical Misconceptions. A Guide for Primary Teachers, SAGE, Londyn, 2008

Dehaene S.: The Number Sense: How the Mind Creates Mathematics, Revised and Updated Edition, Oxford University Press, Nowy Jork 2011

Donaldson M.: Myślenie dzieci, Wiedza Powszechna, Warszawa 1986

Fias W., van Dijck J.Ph., Geveras W.: How is Number Associated with Space? The Role of Working Memory, in: Space, Time and Number in the Brain, Searching for the Foundation of Mathematical Thought, S. Dehaene, E. Brannon (red.), Elsevier, London 2011

Filipiak E.: Rozwijanie zdolności uczenia się. Z Wygotskim i Brunerem w tle, GWP, Sopot 2012

Fuson K.: Relationship between counting and cardinality from age 2 to 8: w: J. Bideaud, C. Meljac, J. Fischer (red.) Pathways to number, children's developing numerical abilities, Hillsdale, LEA: Nowy Jork 1992

Gelman R., Gallistel C. R.: The Child's Understanding of Number, Harvard University Press, Cambridge 1986

Hand D.J.: Zasada nieprawdopodobieństwa. Dlaczego codziennie zdarzają się cuda, zbiegi okoliczności i rzadkie wydarzenia, Grupa Wydawnicza Foksal, Warszawa 2014

Haylock D.: Mathematics Explained for Primary Teachers, SAGE, Londyn 2010

Haylock D.,Cockburn A.D..: Understanding Mathematics for Young Children. Fully Revised and Expanded Edition, SAGE, Londyn 2008

Hejny M., Stazakova J.: Investigating Mathematical Reasoning and Decision Making in: Mathematical Understanding 5-11: A Practical Guide to Creative Communication in Primary Maths, A. Cockburn (red.), SAGE, Londyn 2007

Jeleńska L.: Metodyka arytmetyki i geometrii w pierwszych latach nauczania, Nasza Księgarnia, Warszawa 1948

Jurkowski A.: Rozumowanie przez analogię u dzieci w wieku szkolnym, PWN 1967

Karwowska-Struczyk M.: Rozmowa dzieci w wieku przedszkolnym, WSiP, Warszawa 1982, s. 48

Lakoff G., Nunez R.E.: Where Mathematics Comes From, Basic Books, Nowy Jork 2000

Lim C.: Public images of mathematics' , "Philosophy of Mathematics Education Journal", 15 (March), 2002

Lisicki M., Skura M.: Matematyka w działaniu. Metody wprowadzania pojęć matematycznych – scenariusze zajęć, WSiP, Warszawa 2015

Lompscher J. (red.): Psychologia uczenia się w nauczaniu początkowym, WSiP, Warszawa 1976

Mehler J., Dupoux E.: What Infants Know. The new cognitive science of early development., Wiley-Blackwell , Cambridge 1994

Nisbett R.R.: Geografia myślenia. Dlaczego ludzie Wschodu i Zachodu myślą inaczej, Smak Słowa, Sopot 2011

Ostasiewicz W.: Myślenie statystyczne, Wolters Kluwer Polska Sp. z o.o., Warszawa 2012

Oszwa U.: Psychologiczna analiza procesów operowania liczbami u dzieci z trudnościami w matematyce, Wyd. Uniwersytetu Marii Curie-Skłodowskiej, Lublin 2009

Piaget J.: The Child's Conception of Number, W.W.Norton&Company, Nowy Jork 1965

Piaget J.: Studia z psychologii dziecka, PWN, Warszawa 1966

Piaget J., Inhelder B.: Psychologia dziecka, Siedmiogród, Wrocław 1996

Piaget J., Inhelder B.: Obrazy umysłowe, w: Inteligencja, P. Oleron, J. Piaget, B. Inhelder, P. Greco, PWN, Warszawa 1967

Polya G.: Jak rozwiązać? PWN, Warszawa 1964

Puchalski T.: Statystyka. Wykład podstawowych zagadnień z ćwiczeniami, PWN, Warszawa 1969

Rozporządzenie Ministra Edukacji Narodowej z dnia 27 sierpnia 2012 roku w sprawie podstawy programowej wychowania przedszkolnego oraz kształcenia ogólnego w poszczególnych typach szkół (Dz.U. z 2012 r., poz. 977, z późn. zm.)

Sarnecka B.W., Carey S.: How Counting Represents Number: What Children Must Learn and When They Learn it, "Cognition" 108, 2008

Sawicki T., Reclik R., Nowak J.: Matematyka, Wyd. NOWIK, Opole 1997

Skura M., Lisicki M.: Za progiem. Jak rozwija się dziecko i jaka jest rola nauczyciela w tym rozwoju, ORE, Warszawa 2011

Skura M., Lisicki M.: Na progu. Ile w dziecku ucznia, a w nauczycielu mistrza? O co chodzi w pierwszej klasie, ORE, Warszawa 2013

Skura M., Lisicki M.: Przed progiem. Jakie umiejętności są potrzebne do rozpoczęcia nauki w pierwszej klasie i jak je rozwijać, ORE, Warszawa 2013

Skura M., Lisicki M.: Statistika pre deti?, Studia Scientifica Facultatis Pedagogicae, Universitas Catholica Ruzomberok, Ruzomberok 2014

Skura M., Lisicki M. (red.): Myślenie matematyczne. Zabawy i zadania dla młodszych przedszkolaków. Liczenie i rachowanie. Cechy wielkościowe i porównywanie wielkości. Myślenie przyczynowo-skutkowe i rozwiązywanie problemów, DR Josef Raabe Spółka Wydawnicza Sp. z o.o., Warszawa 2014

Skura M., Lisicki M. (red.): Myślenie matematyczne. Zabawy i zadania dla młodszych przedszkolaków, Raabe, Warszawa 2014, 2 części: Liczenie i rachowanie. Cechy wielkościowe i porównywanie wielkości. Myślenie przyczynowo-skutkowe i rozwiązywanie problemów; Klasyfikowanie. Orientowanie się w przestrzeni. Rytmy. Serie

Skura M., Lisicki M. (red.): Myślenie matematyczne. Zabawy i zadania dla starszych przedszkolaków, Raabe, Warszawa 2014, 4 części: Klasyfikowanie. Geometria; Orientowanie się w przestrzeni. Cechy wielkościowe i porównywanie wielkości. Miary; Rytmy. Liczenie i rachowanie; Myślenie przyczynowo-skutkowe i rozwiązywanie problemów. Zbieranie i porządkowanie informacji

Słupecki J., Piróg-Rzepecka K., Hałkowska K.: Elementy arytmetyki teoretycznej, WSiP, Warszawa 1979

Spelke E.S.: Natural Number and Natural Geometry in: Attention and Performance Vol.24, Space, Time and Number in the Brain: Searching for the Foundations of Mathematical Thought, E. Brannon, S. Dehaene (red.), Oxford University Press, Oxford 2011

Swoboda E.: Przestrzeń, regularności geometryczne i kształty w uczeniu się i nauczaniu dzieci, Wydawnictwo Uniwersytetu Rzeszowskiego, Rzeszów 2006
Szemińska A.: Rozwój procesu klasyfikacji, w: Nauczanie początkowe matematyki, t. 1, pod red. Z. Semadeniego, WSiP, Warszawa 1981
Szemińska A.: Czynności kształtujące pojęcie liczby, w: Nauczanie początkowe matematyki, t. 1, Z. Semadeni (red.), WSiP, Warszawa 1981
Szuman S.: Rozwój pytań dziecka: badania nad rozwojem umysłowości dziecka na tle jego pytań, Nasza Księgarnia Sp. Akcyjna Związku Nauczycielstwa Polskiego, Warszawa 1939
Szuman S.: Dzieła wybrane, tom.1: Studia nad rozwojem psychicznym dzieci, WSiP, Warszawa 1985
Szurek M.: O nauczaniu matematyki. Wykłady dla nauczycieli i studentów, tom 2, GWO, Gdańsk 2005
Tarvis C., Wade C.: Psychologia. Podejścia oraz koncepcje, Zysk i S-ka, Poznań 1999
Thornton S.: Growing Minds, Palgrave Macmillan, Basingstoke, 2002
Williams P.: Independent Review of Mathematics Teaching of Early Years Setting and Primary Schools, Final Report, DCSE, Londyn 2008
Wołoszynowa L.: Problemy szkolnego „startu" dzieci w polskim zreformowanym systemie oświaty, „Psychologia Wychowawcza" 1977, nr 1
Wood D.: Jak dzieci uczą się i myślą. Społeczne konteksty rozwoju poznawczego, Wyd. Uniwersytetu Jagiellońskiego, Kraków 2006

strony internetowe

www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Recorde.html
http://blogiceo.nq.pl/matematycznyblog/2013/01/14/komu-zawdzieczamy-symbole-matematyczne/

W książce wykorzystano znaki specjalne i symbole programy Pages firmy Apple oraz piktogramy z zasobów portalu www.scholaris.pl

ORE

Ośrodek
Rozwoju
Edukacji

Aleje Ujazdowskie 28
00-478 Warszawa
tel. 22 345 37 00
fax 22 345 37 70

www.ore.edu.pl

EGZEMPLARZ BEZPŁATNY

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

Publikacja współfinansowana przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego