

strategii rozwiązania, współpracy z rówieśnikami w klasie, akceptacji dla uczniowskich błędów jako podstawy uczenia się. Proces dochodzenia do rozumienia pojęć matematycznych wymaga także wyeksponowania wizualizacji i obrazowej, graficznej reprezentacji problemów matematycznych (Wood, 2006).

Efektywność nauczania matematyki w świetle badań

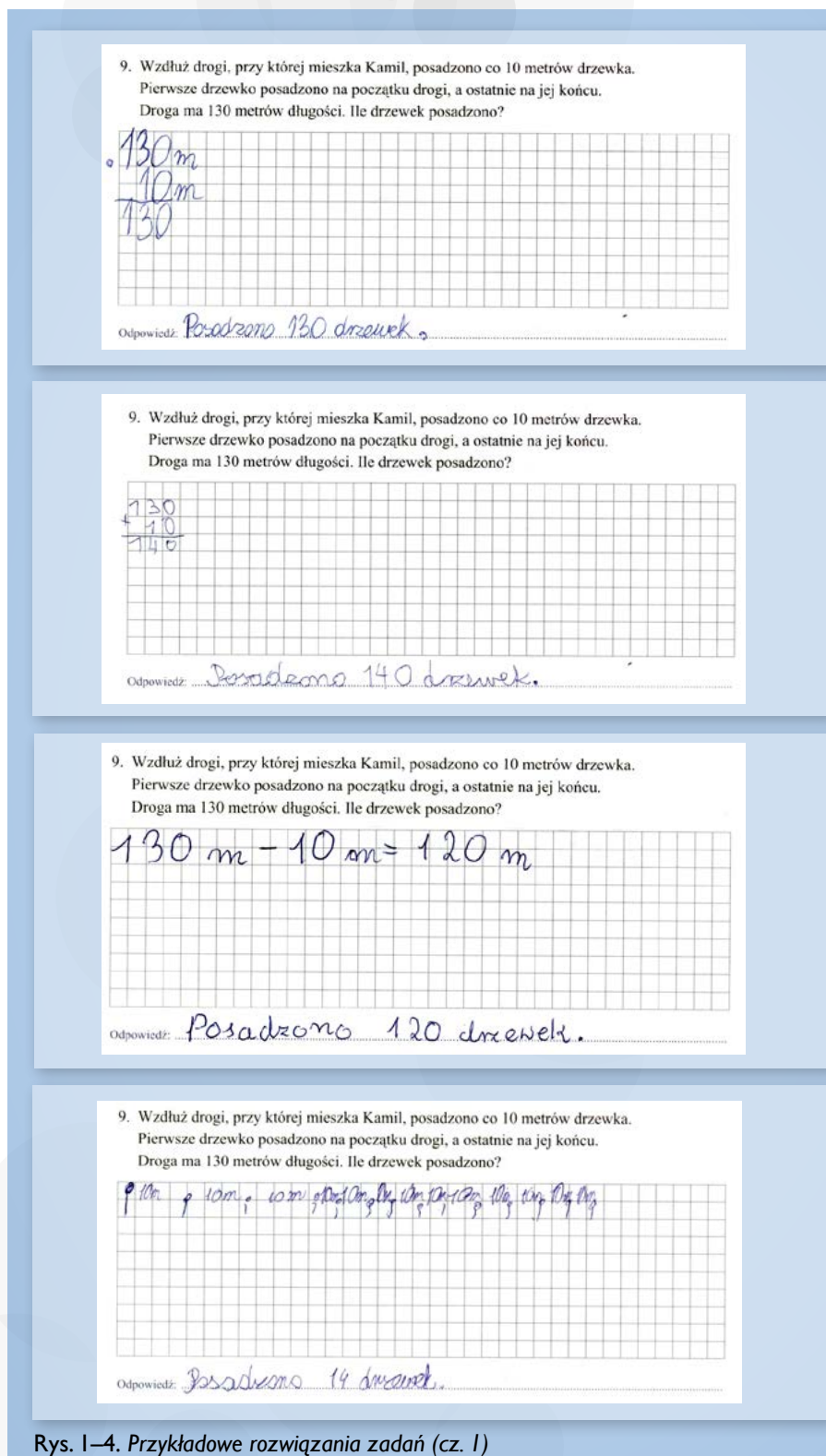
Edukacja matematyczna i jej efektywność w polskiej szkole jest przedmiotem dyskusji i krytycznych analiz od wielu lat. Niskie wyniki egzaminu maturalnego z matematyki w 2014 r. (25% uczniów nie zdało egzaminu) napawają niepokojem i każą powrócić do problemu jakości kształcenia w szkołach na różnych etapach edukacji, ale także sposobu kształcenia i doskonalenia nauczycieli. Wyniki badań ogólnopolskich i międzynarodowych wskazują, że osiągnięcia uczniów w zakresie matematyki są zróżnicowane i dominuje odtwórcze, podporządkowane schematom i algorytmom podejście do zadań matematycznych. Problemy nietypowe, wymagające elastyczności myślenia, odnalezienia własnej strategii rozwiązania, zbadania zagadnienia, wskazania prawidłowości czy wykorzystania wiedzy i umiejętności matematycznych w praktyce sprawiają uczniom trudność i powodują rezygnację z podejmowania wysiłku rozwiązania problemu. Trudności i zniechęcenie do uczenia się matematyki pojawiają się już na pierwszym etapie kształcenia w szkole podstawowej.

Wyniki badań trzecioklasistów opublikowane w kilku raportach wydanych w latach 2008–2012 (Dąbrowski, 2011; 2013) oraz wyniki badań OBUT wskazują, że w edukacji matematycznej w klasach I–III znaczna część uczniów opanowuje jedynie pewną liczbę utrwalonych schematów postę-

powania w typowych sytuacjach oraz wiele różnych strategii obronnych, których zadaniem jest ukrycie przed nauczycielem, że nie rozumie się matematyki. Dzieci są przekonane, że rozwiązanie zadania polega na zapisaniu obliczenia, w którym trzeba wykorzystać wszystkie liczby podane

w treści zadania. Nie rozwiązują więc problemu, ale „zagospodarowują” liczby (por. rys. 1–4).

Wśród rozwiązań dominuje właśnie „zagospodarowywanie liczb” czy poszukiwanie działania, które pozwoli wykorzystać liczby zawarte w zadaniu,



Rys. 1–4. Przykładowe rozwiązania zadań (cz. 1)





a nie znaleźć rozstrzygnięcie przedstawionemu w nim problemowi. Dopiero wykonanie rysunku przez dziecko, a więc wizualizacja treści zadania – modelowanie sytuacji matematycznej na poziomie ikonicznej reprezentacji wiedzy – pozwala odkryć poprawne rozwiązanie.

Warto podkreślić, że rozwiązanie zadania tekstowego polega na znalezieniu, za pomocą dowolnej skutecznej strategii, poprawnej odpowiedzi na postawione w nim pytanie, a nie wykonaniu jakiegoś obliczenia. Tymczasem większość uczniów bezrefleksyjnie operuje symbolami, bez wnikania w ich sens oraz cel ich użycia.

Wskazywała ten problem już wiele lat temu prof. Z. Krygowska – wybitna dydaktyk matematyki – nazywając je „zdegenerowanym formalizmem”. Efektem takich działań jest zdobycie przez uczniów biegłości w stosowaniu wyuczonych schematów postępowania w typowych sytuacjach oraz ogromne trudności w stosowaniu wiedzy w nowych, nieznanych wcześniej sytuacjach. A to właśnie decyduje o znaczeniu matematyki dla rozwoju współczesnego społeczeństwa.

Droga do symbolu matematycznego

W procesie kształcenia matematycznego zapomina się, jak trudny do zrozumienia dla uczniów jest symboliczny język matematyki. W polskiej szkole dzieci są zapoznawane z językiem symbolicznym od początku procesu kształcenia, a znaczna część nauczycieli sądzi, że jest to najważniejsze zadanie i cel edukacji matematycznej w klasach I–III.

To przekonanie wzmacniają materiały edukacyjne (podręczniki, zeszyty ćwiczeń), w których już przy pierwszych zadaniach tekstowych rozwiązywanych przez uczniów oczekuje się wpisania odpowiedniego działania arytmetycznego w pozostawione puste miejsca. W ten sposób dziecko – nie rozumiejąc jeszcze języka symbolicznego – jest zmuszane do wykonania bardzo trudnego zadania: formalnego modelowania matematycznego.

Aktywności na poziomie reprezentacji enaktywnej czy ikonicznej¹, budujące rozumienie matematyki i jej języka,

są w szkole pomijane i eliminowane jako „niematematyczne”. Pomoce dydaktyczne, które mogą wspierać przechodzenie od konkretnego do abstrakcji w procesie poznawania pojęć i symboli matematycznych, są używane sporadycznie.

Zjawisko to nasila się znacznie w klasach IV–VI i w gimnazjum, gdzie nowe zagadnienia matematyczne wprowadza się zazwyczaj od najtrudniejszego poziomu – symbolicznego – gdzie się pozostaje. Skutkuje to tym, że znaczny odsetek polskich uczniów nie rozumie języka symbolicznego matematyki oraz nie potrafi się nim efektywnie posługiwać. Potwierdzają to wyniki egzaminów zewnętrznych po klasie VI i po gimnazjum oraz część matematyczna badań międzynarodowych, np. PISA czy TIMSS (Konarzewski, 2012).

Język symboliczny jest nie tylko skutecznym narzędziem komunikowania się w różnych sytuacjach, lecz także narzędziem rozwiązywania problemów, również tych praktycznych, z codziennego życia. Wspiera myślenie matematyczne, ale sam także musi być przez to myślenie wspierany.

W procesie kształcenia uczniowie muszą mieć okazję do poznawania oraz stosowania różnych sposobów rozumowania i wnioskowania, typowych dla matematycznej twórczości – rozumowania indukcyjnego i dedukcyjnego, uogólniania i specyfikacji, dostrzegania i wykorzystywania prawidłowości, rozumowania przez analogię. Powinno to być ich udziałem na każdym etapie rozwijania umiejętności matematycznych – zarówno podczas manipulacji, jak i operowania zapisami zaawansowanymi matematycznie.

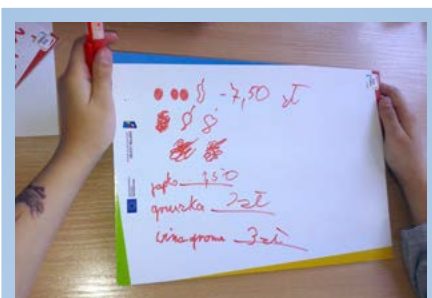
¹ Nawiązanie do koncepcji J. Brunera dotyczącej trzech rodzajów reprezentacji wiedzy poznawczej: enaktywnej (reprezentacje odwołujące się do działania na konkretnych obiektach), ikonicznej (reprezentacje świata za pomocą obrazów umysłowych, w tym schematów graficznych), symbolicznej (systemy reprezentacji świata abstrakcyjne, z wykorzystaniem symboli: liczb, języka, notacji muzycznej).



Piktogramy wspierają uczenie się matematyki

Jednym z materiałów dydaktycznych wspierających u dzieci w klasach I–III i IV–VI zainteresowanie matematyką i rozwijanie umiejętności niezbędnych do rozumienia pojęć matematycznych oraz świadomego posługiwania się nimi w praktyce, w konkretnych sytuacjach związanych z codziennym doświadczeniem, jest pakiet edukacyjny *Gramy w piktogramy*. Jego autorem zależało w szczególności na podwyższeniu u uczniów:

- poziomu rozumienia pojęć matematycznych, także dzięki ich samodzielnemu konstruowaniu przez uczniów i krytycznemu myśleniu;
- poziomu umiejętności rozwiązywania problemów o charakterze matematycznym z wykorzystywaniem procesów poznawczych istotnych dla myślenia matematycznego (dostrzeganie związków, prawidłowości, myślenie przez analogię) oraz współpracy w grupie i tutoringów rówieśniczego;
- umiejętności dobierania modeli matematycznych do analizowanych sytuacji z uwzględnieniem posługiwania się językiem symbolicznym.



Tabliczki suchościeralne

E-pakiet edukacyjny *Gramy w piktogramy*, z którym można zapoznać się na stronie [Projekt Piktografia](#), stwarza nauczycielom okazję do zmiany stylu pracy w szkole, w szczególności w obszarze edukacji matematycznej. Pakiet edukacyjny *Gramy w piktogramy* powstał w ramach projektu „PIKTOGRAFIA. Rozwijanie umiejętności posługiwania się językiem symbolicznym w edukacji z zakresu nauk matematycznych z zastosowaniem piktogramów Asylco”. To środek dydaktyczny stworzony we współpracy Wydawnictwa Bohdan Orłowski oraz Wydziału Pedagogicznego Uniwersytetu Warszawskiego.

E-pakiet *Gramy w piktogramy* składa się z dwóch zasadniczych elementów: pomocy dla uczniów i dla nauczyciela. Do pobrania i wydrukowania przygotowano przewodniki, scenariusze zajęć i karty pracy dla uczniów na trzech poziomach edukacyjnych: klasy I–III, IV–VI i gimnazjum. Zasadniczą część tego środka dydaktycznego stanowią piktogramy – demonstracyjne dla nauczyciela oraz uczniowskie do manipulowania i tworzenia modeli sytuacji matematycznych. Poza tym w zestawie są także gry planszowe, programy komputerowe, modele wagi do odkrywania zależności, domino, siatki brył. Są także wzory naklejek, które można wykorzystać do wykonania pieczętek, wzór planszy z naklejkami z piktogramami, żetony i woreczki strunowe, a także tabliczki suchościeralne. Dzieci z klas I–III, które miały okazję korzystać z tego środka dydaktycznego, podczas testowania uczyły się matematyki w zabawie, rozwiązując zagadki, manipulując piktogramami, grając w gry. Istota tego materiału dydaktycznego wiąże się ze stwarzaniem dzieciom okazji do pracy w grupach (jeden pakiet przeznaczony jest dla grupy czteroosobowej), manipulowania piktogramami (i innymi elementami) w celu zbudowania modelu – wizualizacji sytuacji matematycznej

zaprezentowanej w zadaniu – i rozwiązania problemu za pomocą właśnie takiej aktywności. Oto przykład zadań zaczerpniętych ze scenariuszy zajęć zaproponowanych w tym pakiecie²:

1.

	7,50 zł
	6 zł
	6 zł

Trzy jabłka i jedna gruszka kosztują 7,50 zł, jedna kiść winogron i dwie gruszki 6 zł, a 2 kiście winogron 6 zł. Ile kosztują poszczególne owoce?

2.

	6 zł
	5 zł
	9 zł

Trzy jabłka i jedna gruszka kosztują 6 zł, gruszka i dwa jabłka kosztują 5 zł, a 2 kiście winogron 9 zł. Ile kosztują poszczególne owoce?

Dzieci rozwiązują te zagadki, manipulując piktogramami lub rysując sytuację matematyczną na tabliczkach suchościeralnych.

Po serii takich zadań dzieci w grupach układają, wykorzystując piktogramy czy rysując je na kartkach, własne zagadki i prezentują je kolegom i koleżankom do rozwiązania.

Warto zauważyć, że w toku wykonywania takich zadań dzieci budują sobie

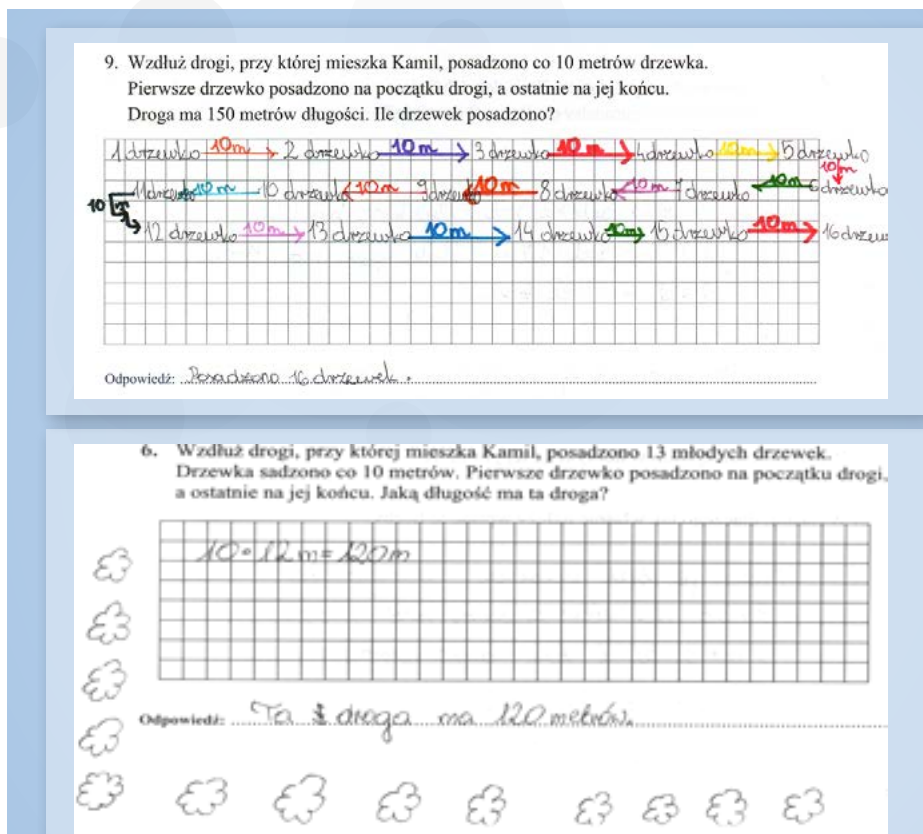
² Przykłady zaczerpnięte ze scenariusza M. Dąbrowskiego, *Ile to kosztuje – czyli od zagadki do zadania tekstowego* przygotowanego na szkolenie nauczycieli zainteresowanych pracą z pakietem *Gramy w piktogramy*.



dwie podstawowe metody rozwiązywania układów równań: eliminacji i odejmowania stronami. Konstruują rozumienie znaczenia działań, które za chwilę będą wykonywać, na poziomie reprezentacji symbolicznych. Zatem manipulowanie piktogramami i wykonywanie schematów rysunkowych nie służą tylko ilustracji treści zadania, ale także zbudowaniu rozumienia pojęcia matematycznego. Po takich doświadczeniach, które charakteryzuje stopniowe przechodzenie od działań na elementach graficznych do symbolicznych, dzieci mogą rozwiązywać następujące zadania w rodzaju:

- W pewnym sklepie sprzedawano owoce na sztuki. Wszystkie owoce tego samego gatunku, np. jabłka, kosztowały w tym sklepie po tyle samo. Pierwszy klient kupił jabłko i dwie gruszki i zapłacił 10 złotych. Następny kupił gruszkę i dwa jabłka i zapłacił 8 złotych. Trzeci za jabłko i dwie kiście winogron zapłacił 9 złotych. Ile kosztowały poszczególne owoce?
- Za 6 filiżanek i 6 talerzyków mama zapłaciła 42 zł. Następnego dnia mama dokupiła jeszcze 2 filiżanki i 6 talerzyków z tego samego zestawu. Tym razem zapłaciła 26 zł. Ile kosztowała filiżanka, a ile talerzyk?
- Jaś karmił w schronisku psy i koty. Każdy pies dostał 6 kawałków mięsa, a każdy kot – 4 kawałki. Ile było psów, a ile kotów, jeśli łącznie było ich 14, a Jaś dał im 74 kawałki mięsa?
- Wzdłuż ulicy sadzono drzewa. Drzewa sadzono co 10 metrów. Pierwsze posadzono na początku, a ostatnie na końcu drogi. Ile drzew posadzono, jeśli droga ma 120 metrów?

Analiza badań umiejętności matematycznych trzecioklasistów wskazuje, że nieliczne dzieci, które posłużyły się



Rys. 5–6 Przykładowe rozwiązania zadań (cz. 2)

rysunkiem pozwalającym stworzyć model sytuacji matematycznej przedstawionej w zadaniu, poprawnie je rozwiązały. Natomiast duża grupa badanych próbowała zrobić coś z liczbami, „zagospodarować” je, a więc pomnożyć, podzielić, nawet dodać i odjąć. Nie pozwoliło to uzyskać rozwiązania, a świadczyło o braku zrozumienia problemu i schematyzmie myślenia w podejściu do rozwiązania (por. rys. 5–6).

Dzieci będą zainteresowane matematyką wtedy, gdy ją rozumieją, gdy doświadczą sytuacji, które pozwolą im samodzielnie budować rozumienie, gdy będą mogły współpracować ze sobą i wspierać się w rozwiązywaniu zadań, dzieleniu się pomysłami, rywalizowaniu ze sobą, prezentować zaskakujące rozwiązania czy tworzyć trudne zagadki matematyczne dla rówieśników.

Dzieci, które uczestniczyły w testowaniu pakietu *Gramy w piktogramy* w klasach trzecich szkoły podstawowej, tak

podsumowały swoje doświadczenia w pracy z tym materiałem na zajęciach szkolnych:

- „Są ciekawsze zajęcia po prostu”.
- „Dzięki grze niektórzy z naszej klasy, na przykład ten tu, nauczyli się liczyć”.
- „Tak, tu mogliśmy pracować sami. A ja wolę wymyślić sam”.
- „Uczymy się współpracy”.
- „Są różne pomysły, można podyskutować”.
- „To pomaga w życiu, bo ma się lepsze skojarzenia”.

Podsumowując refleksje dotyczące problematyki uczenia się matematyki w szkole i konieczności zmiany istniejącego dość powszechnie modelu nauczania, warto podkreślić, że zainteresowanie dzieci matematyką wymaga zmiany sposobu myślenia o nauczaniu i stylu pracy nauczyciela. Dzieciom trzeba stwarzać okazje do zdobywania określonych kompetencji i wykorzystywania ich w praktycznych działaniach.

Oto kilka rekomendacji:

- Trzeba rozpocząć edukację od poznania uczniów, ich możliwości i potencjału intelektualnego.
- Trzeba pozwolić uczniom mówić na zajęciach matematycznych, dzielić się spostrzeżeniami, zadawać pytania, opisywać rozwiązania zadań.
- Trzeba zachęcać do współpracy, stwarzać okazje, aby dzieci uczyły się od siebie – nauczyciel staje się tutorem, a nie instruktorem.
- Trzeba uwierzyć w możliwości dzieci i stawiać im zadania – wyzwania intelektualne, których podjęcie

i rozwiązanie sprawi przyjemność, przyniesie satysfakcję. Dzieci chcą mieć poczucie kompetencji.

- Trzeba pozwolić uczniom na popełnianie błędów; błąd to początek uczenia się, inspiracja do działań pozwalających lepiej zrozumieć pojęcia matematyczne.
- Trzeba pozwolić uczniom budować i stosować własne strategie rozwiązywania, nie narzucać jednej, nauczycielskiej metody. Wtedy matematyka będzie sprawiać przyjemność, zachęcać do badań i poszukiwań.



Małgorzata Żytka

Pedagog, doktor habilitowany w dziedzinie nauk humanistycznych w zakresie pedagogiki, profesor Uniwersytetu Warszawskiego, pracownik naukowy Wydziału Pedagogicznego UW, kierownik Katedry Edukacji Szkolnej i Kształcenia Nauczycieli. Współkoordynator (w latach 2006–2012) ogólnopolskich badań monitorujących umiejętności językowe i matematyczne trzecioklasistów i ich środowiskowe oraz szkolne uwarunkowania. Jej zainteresowania naukowe koncentrują się wokół problematyki rozwoju i edukacji dzieci w wieku wczesnoszkolnym, monitorowania osiągnięć szkolnych uczniów, oceniania szkolnego, kształcenia nauczycieli. Członek ATEE – Association for Teacher Education in Europe – oraz Zespołu Edukacji Elementarnej i Zespołu Edukacji Szkolnej przy Komitecie Nauk Pedagogicznych PAN.

Autorka lub współautorka licznych publikacji, m.in. *Pisanie – żywy język dziecka* (2006); *Pozwólmy dzieciom mówić i pisać – w kontekście badań umiejętności językowych trzecioklasistów* (2010); *Badanie umiejętności podstawowych uczniów klas trzecich szkoły podstawowej. Szkolne rzeczywistości uczniów klas trzecich w środowisku wiejskim* (2011); *Badanie umiejętności podstawowych uczniów klas trzecich szkoły podstawowej. Uczeń, szkoła, dom. IBE* (2012).

Bibliografia

Bernstein B., (1990), *Odtwarzanie kultury*, Warszawa: Państwowy Instytut Wydawniczy. | Gopnik A., Meltzoff A.N., Kuhl P.K., (2004), *Naukowiec w kołysce. Czego o umyśle uczą nas małe dzieci?*, Poznań: Media Rodzina. | Murawska B., Żytka M. (red.), (2012), *Badanie umiejętności podstawowych uczniów klas trzecich szkoły podstawowej. Uczeń, szkoła, dom*, Warszawa: Instytut Badań Edukacyjnych (także w wersji elektronicznej, dostęp dn. 6.10.2014). | Dąbrowski M., (2011), *Badanie umiejętności podstawowych uczniów klas trzecich szkoły podstawowej. Trzecioklasiści 2010*, Warszawa: Centralna Komisja Egzaminacyjna (także w wersji elektronicznej, dostęp dn. 6.10.2014). | Dąbrowski M., (2013), *(Za) trudne, bo trzeba myśleć. O efektach nauczania matematyki na I etapie kształcenia*, Warszawa: Instytut Badań Edukacyjnych (także w wersji elektronicznej, dostęp dn. 6.10.2014). | Konarzewski K., (2012), *Osiągnięcia szkolne polskich trzecioklasistów w perspektywie międzynarodowej TIMSS i PIRLS 2011*, Warszawa: Centralna Komisja Egzaminacyjna (także w wersji elektronicznej, dostęp dn. 6.10.2014). | Wood D., (2006), *Jak dzieci uczą się i myślą. Społeczne konteksty rozwoju poznawczego*, Kraków: Wydawnictwo UJ. | Wygotski L., (1989), *Myślenie i mowa*, Warszawa: Państwowy Instytut Wydawniczy.

Nauczanie matematyki w Europie: ogólne wyzwania i strategie krajowe EACEA, Eurydice

Warszawa: Fundacja Rozwoju Systemu Edukacji, 2012

W raporcie omówiono strategie reformowania programów nauczania matematyki, promowania nowatorskich metod nauczania i oceniania oraz doskonalenia systemu kształcenia i szkolenia nauczycieli w poszczególnych krajach.

Raport zawiera także zalecenia na temat podnoszenia motywacji do

uczenia się matematyki i zachęcania do wyboru kariery zawodowej związanej z matematyką (ze *Słowa wstępnego*).

[Publikacja do pobrania](#)

