ORE Ośrodek Rozwoju Edukacji

Rozszerzony program matematyki w gimnazjum

Poradnik nauczyciela matematyki

Wojciech Guzicki

Rozszerzony program matematyki w gimnazjum

Poradnik nauczyciela matematyki

Wojciech Guzicki

Warszawa, 2013

Wydawca:
Ośrodek Rozwoju Edukacji
Aleje Ujazdowskie 28
00-478 Warszawa
Tel. +48 22 345 37 00
Fax +48 22 345 37 70

Publikacja powstała w ramach projektu „Opracowanie i wdrożenie kompleksowego systemu pracy z uczniem zdolnym"

Autor:
Dr hab. Wojciech Guzicki

Recenzent:
Dr hab. Zbigniew Marciniak, prof. UW

Projekt graficzny:
Agencja Reklamowa FORMS GROUP

Warszawa, 2013

Nakład: 8 000 egz.

ISBN 978-83-62360-31-4

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

MINISTERSTWO
EDUKACJI
NARODOWEJ

ORE
Ośrodek
Rozwoju
Edukacji

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

Publikacja współfinansowana przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

EGZEMPLARZ BEZPŁATNY

Przygotowanie do druku, druk i oprawa:
Agencja Reklamowo-Wydawnicza A. Grzegorczyk
www.grzeg.com.pl

Spis treści

1. Wstęp

Niniejszy poradnik powstał w wyniku moich wieloletnich doświadczeń w pracy z uczniami uzdolnionymi matematycznie w dwóch warszawskich gimnazjach.

Uczę matematyki od ponad 40 lat, przez cały ten czas na Wydziale Matematyki, Informatyki i Mechaniki Uniwersytetu Warszawskiego. Przez kilka lat zajmowałem się pracą z nauczycielami w ODN w Warszawie, od ponad 20 lat uczę również w szkołach. Najpierw uczyłem w liceach: Pierwszym Społecznym Liceum Ogólnokształcącym (tzw. „Bednarska") w Warszawie, później w Liceum Przymierza Rodzin im. Jana Pawła II w Warszawie. W obu liceach pracowałem z uczniami zdolnymi, uczyłem według własnego programu rozszerzonego i przygotowywałem uczniów do Olimpiady Matematycznej (ok. 20 moich uczniów zostało finalistami Olimpiady). Od 10 lat uczę w gimnazjach: przez cały ten czas w Gimnazjum Przymierza Rodzin im. Jana Pawła II w Warszawie i aktualnie, trzeci rok, w Gimnazjum nr 13 im. Stanisława Staszica w Warszawie. W gimnazjum też uczę według własnego programu rozszerzonego i przygotowuję uczniów do Olimpiady Matematycznej Gimnazjalistów (dalej będę używał skrótu OMG). W dotychczasowych ośmiu OMG w Gimnazjum Przymierza Rodzin 27 moich uczniów zostało finalistami, a większość z nich laureatami OMG. Po tak bogatych doświadczeniach, wyniesionych głównie ze szkół niepublicznych, postanowiłem przenieść swoje doświadczenia na grunt szkoły publicznej. Uczę w Gimnazjum im. Staszica według tego samego własnego programu. W roku szkolnym 2012/2013 jedenastu moich uczniów III klasy zostało finalistami OMG. Te sukcesy przekonują mnie o skuteczności programu oraz o skuteczności moich dziesięcioletnich doświadczeń z pracy z uczniami zdolnymi. Tymi doświadczeniami chcę się teraz podzielić z innymi nauczycielami, z wiarą, że będą oni mogli moje doświadczenia przenieść do swoich szkół, i z wiarą, że ich uczniowie odniosą podobne sukcesy.

Moje doświadczenia wywodzą się przede wszystkim ze szkół niepublicznych. Tak się złożyło, że w szkołach, w których uczyłem, miałem ogromną swobodę w kształtowaniu programu nauczania i wielokrotnie spotkałem się z wielką życzliwością dyrekcji, patrzącej z wyrozumiałością na moje — często niestandardowe — pomysły. Chcę w tym miejscu za tę życzliwość podziękować dyrektorom tych szkół: Krystynie Starczewskiej, Elżbiecie Guzickiej i Pawłowi Głowackiemu. Po doświadczeniach w pracy wyłącznie w szkole niepublicznej, idąc do szkoły publicznej byłem pełen obaw — czy moje pomysły będą tam odebrane równie dobrze. Chcę podziękować pani dyrektor Reginie Lewkowicz i jej zastępczyni pani Urszuli Tarkowskiej za życzliwość i za to, że wszelkie moje obawy już dawno się rozwiały. Gimnazjum im. Staszica jest dla mnie dowodem, że moje pomysły mogą być realizowane w każdej szkole — jeśli tylko znajdą zrozumienie dyrekcji.

Jak wspomniałem, uczę według własnego programu rozszerzonego. To nie znaczy, że wszystko w tym programie wymyśliłem sam. Przede wszystkim, mój program jest rozszerzeniem zwykłego programu gimnazjalnego. Moi uczniowie korzystają ze zwykłych podręczników, rozwiązują zadania ze zwykłych zbiorów zadań. Nie miejsce tu na kryptoreklamę któregokolwiek podręcznika, zbioru zadań czy programu. Nauczyciel, chcący wdrożyć to, co opisuję w poradniku, może wybrać dowolny program, podręcznik, zbiory zadań. W uwagach realizacyjnych zamieszczam tylko krótkie uwagi dotyczące tego, jakie cechy powinien mieć dobry podręcznik czy zbiór zadań; programy nauczania nie różnią się istotnie. Na czym więc polega mój program? Otóż na rozszerzeniach programu zwykłego. Moje wieloletnie doświadczenia pokazują, że w gimnazjum jest wystarczająco dużo miejsca na różne rozszerzenia — zwłaszcza wtedy, gdy uczymy uczniów zdolnych.

Ten poradnik jest poświęcony właśnie takim rozszerzeniom. Jego objętość wskazuje, że z uczniami gimnazjum można zrobić naprawdę wiele.

Chcę też wyraźnie podkreślić: nie wszystko, o czym piszę, można zrobić ze wszystkimi uczniami w jednym cyklu kształcenia. Z jednym rocznikiem koncentrowałem się bardziej na jednych tematach, z innym rocznikiem na innych. O tym, jak rozszerzyć program, ile zrobić, decyduje nauczyciel na bieżąco. Trzeba pamiętać o dwóch rzeczach: po pierwsze, wszystko, co zrobimy w ten sposób, będzie rozszerzeniem podstawowego programu i będzie z korzyścią dla uczniów; po drugie, wszystko, co zrobimy, mamy zrobić bardzo dokładnie. Celem nie jest to, byśmy wypełnili odpowiednie rubryki w dzienniku, ale by uczniowie te ponadprogramowe tematy dobrze zrozumieli. Pamiętajmy: wszystko, co w ten sposób zrobimy, i tak stanowi nasz i naszych uczniów zysk.

Ten poradnik zawiera konkretne materiały teoretyczne, zadania, rozwiązania zadań i komentarze. Poradnik dla nauczyciela to nie monografia z dydaktyki matematyki. Nie silę się tutaj na wielkie rozważania teoretyczne. Wychodzę z założenia, że nauczyciel, który ma z moich doświadczeń skorzystać, powinien otrzymać w zasadzie gotowe materiały dydaktyczne. Takie staram się dać. Nie mogę dać gwarancji sukcesu, mogę jedynie zapewnić, że wszystkie sukcesy moich uczniów wywodzą się z takich lekcji, jakie tu opisałem. Mogę zapewnić, że wszystko, o czym piszę w poradniku, zostało sprawdzone. Wszystkie pomysły, o których piszę, zostały zrealizowane na lekcjach, czasem na kółkach po lekcjach (nie rozróżniam tego, czy temat był robiony na lekcji, czy na kółku — choćby z tego powodu, że w różnych latach bywało różnie). Zadania były zadawane do domu i omawiane na lekcjach. Nieliczne zadania, które w chwili pisania poradnika wydały mi się nieskuteczne, usunąłem. W kilku miejscach zmieniłem sformułowania czy kolejność zadań, wyciągając wnioski z doświadczeń ostatniego roku. Tak zresztą robię co roku — zestawy zadań, które daję uczniom, modyfikuję w zależności od tego, jak się sprawdziły ostatnio. Jak wspomniałem, chyba niemożliwe jest zrealizowanie z uczniami wszystkich pomysłów zawartych w poradniku. Rolą nauczyciela, który z tego poradnika będzie korzystał, jest wybranie tego, co mu najbardziej odpowiada. Nauczyciel sam kształtuje swój program nauczania. Chciałbym, by ten poradnik był dla nauczyciela źródłem pomysłów; niektóre są podane w gotowej postaci, inne być może tylko zainspirują do stworzenia czegoś zupełnie nowego.

Znaczne części poradnika to po prostu zbiory zadań. Może to być powodem krytyki: po co jeszcze jeden zbiór zadań? Powtórzę: uważam, że poradnik powinien dać nauczycielowi gotowe materiały, a nie tylko pomysły. Uważam także, że o nauczaniu matematyki nie powinno się mówić w sposób „teoretyczny". Nauczanie matematyki odbywa się zawsze poprzez rozwiązywanie z uczniami zadań. Oczywiście trzeba uczniom różne kwestie wytłumaczyć, ale ostatecznym celem jest zadanie. Dopiero zadanie zmusza ucznia do myślenia samodzielnego — a przecież myślenie samodzielne jest chyba najważniejszym celem nauczania (nie tylko matematyki). O tym nie da się rozmawiać teoretycznie — trzeba te zadania pokazać. To właśnie czynię.

Poradnikowi towarzyszą pliki pdf, zamieszczone na stronie internetowej ORE, zawierające tekst poradnika oraz wiele z omówionych materiałów dydaktycznych. Oto adres tej strony internetowej:

`www.ore.edu.pl/s/181`

W pliku zawierającym tekst poradnika zamieszczam trzy dodatki, w których znajdują się przykładowe materiały do zajęć seminaryjnych. Na tej stronie zamierzam także zamieszczać informacje o błędach znalezionych w poradniku. W innych plikach są zestawy zadań oraz wybrane materiały teoretyczne, które daję uczniom. Na przykład jest tam w całości tekst teoretyczny dotyczący geometrii trójkąta, którego obszerne fragmenty przytaczam. Dla zwiększenia czytelności poradnika i odróżnienia tekstu, który daję uczniom, od komentarza przeznaczonego dla nauczyciela, zaznaczam początek i koniec cytowanych fragmentów tekstu teoretycznego z geometrii. Początek każdego fragmentu oznaczam znaczkiem $\boxed{\blacktriangledown}$, koniec znaczkiem $\boxed{\blacktriangle}$.

Na zakończenie chcę podziękować wszystkim osobom, które przyczyniły się do powstania tego poradnika. Chcę podziękować nauczycielom matematyki, z którymi współpracowałem; dyskusje z nimi niewątpliwie odegrały istotną rolę przy tworzeniu programu nauczania: Mirce Galas, Eli Guzickiej, Ewie Jaroszewicz, Joasi Lisak, Piotrowi Mężyńskiemu, Hani Mierzejewskiej i Beacie Szlachcic z Gimnazjum Przymierza Rodzin oraz Wojtkowi Martysowi, Agnieszcze Potockiej i Filipowi Smentkowi z Gimnazjum im. Staszica. Następnie chcę podziękować memu przyjacielowi — Waldkowi Rożkowi, nauczycielowi w Liceum Ogólnokształcącym im. KEN w Stalowej Woli, z którym współpracuję od kilkunastu lat, między innymi przy organizowaniu warsztatów matematycznych. Dyskusje i spory z nim bardzo mocno wpłynęły na zrozumienie przeze mnie tego, jak należy uczyć matematyki w szkole. Dziękuję również moim kolegom z Uniwersytetu: Jurkowi Bednarczukowi, Markowi Kordosowi, Waldkowi Pompe, Pawłowi Strzeleckiemu a szczególne Zbyszkowi Marciniakowi, który był recenzentem poradnika, a jego uwagi bardzo poprawiły poradnik. Dziękuję Ani Rudnik za wyjaśnianie zawiłości systemu TeX i za pomoc w złożeniu tekstu poradnika. Nade wszystko chcę podziękować mojej żonie Eli za wieloletnią współpracę we wszystkich szkołach, w których razem uczyliśmy matematyki, zwłaszcza w Szkole Przymierza Rodzin, którą współtworzyliśmy, za pomoc przy pisaniu tego poradnika oraz za nieskończenie wiele innych rzeczy, których wymienić nie sposób.

Konstancin-Jeziorna 30 czerwca 2013 r.

2. Motywacja dla wprowadzenia programu rozszerzonego

Ten rozdział chciałbym zacząć od krótkiej refleksji nad tym, dlaczego uczę matematyki w szkole. Do czego matematyka jest w ogóle uczniom potrzebna? Dlaczego jej uczymy? Dlaczego wreszcie ja jej uczę? Na ten temat można napisać całe tomy; ja chcę ograniczyć się do kilku uwag o podstawowym dla mnie znaczeniu. Uczę matematyki z trzech powodów, które — moim zdaniem — będą w przyszłości kształtowały moich uczniów. Oto te powody:

- matematyka jest użyteczna;
- matematyka porządkuje nasz sposób myślenia;
- matematyka jest piękna.

Omówię krótko te powody. O użyteczności matematyki jest dzisiaj przekonany prawie każdy, choć wiele osób nie zdaje sobie sprawy z zakresu tej użyteczności. Używamy prostej matematyki w codziennych obliczeniach: robimy budżet domowy, zawieramy umowy kredytowe, zastanawiamy się, ile kupić farby na pomalowanie ścian pokoju, czy ile kupić trawy na obsianie ogródka itp. Rzadziej myślimy o poważniejszych zastosowaniach matematyki. Ian Stewart pisze o tym w swojej książce *Listy do młodego matematyka* ([Stewart]) już w pierwszym rozdziale:

> Myślę czasami, że najlepszą metodą zmiany społecznego podejścia do matematyki byłyby czerwone nalepki na wszystkim, co jest związane z matematyką. „Uwaga, matematyka”. Taką nalepkę widać byłoby oczywiście na każdym komputerze; obawiam się, że gdybyśmy chcieli potraktować pomysł dosłownie, to widać byłoby ją także na czole każdego nauczyciela matematyki. Ale powinniśmy taki czerwony matematyczny znaczek nakleić także na każdym bilecie lotniczym, każdym telefonie, każdym samochodzie, każdym samolocie, każdym warzywie...

Dalej Stewart przekonuje, że umieszczenie w tym wykazie warzyw nie było przypadkowe, pokazując związki między matematyką i biologią... I wiele stron jeszcze poświęca pokazaniu roli matematyki w dzisiejszym świecie. Cóż, ja dodałbym, że naprawdę wiele byłoby przedmiotów z tą naklejką: od najprostszych przedmiotów użytku codziennego po tomograf komputerowy.

Co to znaczy, że matematyka porządkuje nasz sposób myślenia? Przede wszystkim uczy rozumowania opartego na ścisłych regułach logiki. Uczy wyobraźni. Co to jest wyobraźnia przestrzenna, wie właściwie każdy; zwłaszcza ci, którzy zarzekają się, że jej nie posiadają. W pewnym stopniu ma ją każdy — umiemy sobie na przykład wyobrazić, jak wygląda oglądany przedmiot z drugiej strony. Wiele osób umie wyobrazić sobie szachownicę po wykonaniu dwóch ruchów lub swoje karty po zagraniu dwóch lew w brydżu. Ale co wyobraźnia przestrzenna ma wspólnego z porządkowaniem sposobu myślenia? Otóż nie tylko umiemy sobie wyobrazić różne rzeczy, których nie widzimy, ale także umiemy wywnioskować, jakie mają własności, do czego się przydają, umiemy wyciągnąć wniosek, co nastąpi w szachach lub brydżu itp. Ale wyróżniam jeszcze jeden rodzaj wyobraźni: formalną. Wykonujemy obliczenia i wyobrażamy sobie, jak będzie wyglądać wynik; czy przyda nam się dalej, czy będzie bezużyteczny; czy te obliczenia mogą prowadzić do rozwiązania zadania, czy raczej „wyprowadzają nas w pole”.

Umiemy przeprowadzać rozumowania przez analogię i przez rozpatrzenie wszystkich przypadków. Umiemy stwierdzić, czy rzeczywiście przeanalizowaliśmy wszystkie możliwości. Umiemy w swoich rozumowaniach opierać się na podobnych rozumowaniach wykonanych w przeszłości, ale umiemy także oderwać się od sposobu rozumowania typowego dla danej sytuacji i poszukać czegoś innego. Umiemy przyjrzeć się wykonanym obliczeniom i dostrzec w wynikach coś wspólnego, jakąś prawidłowość, której wcześniej nie dostrzegaliśmy i która może okazać się tym kluczowym, brakującym krokiem na drodze do rozwiązania. Każdy matematyk czegoś takiego kiedyś doświadczył; matematyka uczy nas takich sposobów myślenia. To są sposoby myślenia przydatne w każdej sytuacji; w matematyce dostrzegamy je najwcześniej i z pewnością można powiedzieć, że matematyka uczy nas ich najlepiej.

A co to znaczy, że matematyka jest piękna? Pojęcie piękna przede wszystkim kojarzy się z pięknem zmysłowym. Widzimy piękny obraz, piękne góry i piękny zachód słońca. Słuchamy pięknej muzyki, pięknego śpiewu ptaków i pięknego szumu górskiego potoku. Zachwycamy się pięknym zapachem kwiatów, perfum i podawanej na stół wspaniałej potrawy. Za chwilę zachwycimy się jej — chyba można powiedzieć — pięknym smakiem. A po wspaniałej uczcie zachwycimy się cudownie pięknym dotykiem fotela, na którym odbędziemy sjestę. Tyle zmysły. Ale przecież jest jeszcze inne piękno: w czasie sjesty nie musimy spać, śniąc piękne sny; możemy wziąć dobrą książkę i zachwycać się pięknem literatury. A gdzie w tym wszystkim jest matematyka? Czy chcę powiedzieć, że piękna jest strona podręcznika zadrukowana znaczkami niezrozumiałymi dla większości ludzi?

Jest coś takiego jak piękno rozumowania. Piękno myśli ludzkiej. Nie dotyczy ono wyłącznie matematyki. Odkrycia: szczepionek, struktury DNA i w konsekwencji kodu genetycznego, czy lasera wraz z jego rozlicznymi zastosowaniami, to były odkrycia wynikające z wieloletnich czasami doświadczeń, analizowania wyników tych doświadczeń, podążania błędnymi ścieżkami, uwieńczone w końcu sukcesem. To na pewno były piękne odkrycia, będące wynikiem pięknych rozumowań. Ale matematyka pokazuje nam myśl w stanie czystym, nieskażonym żadnym doświadczeniem. To jakby myśl wyabstrahowana ze wszelkich zastosowań. I ta czysta myśl, czyste rozumowanie, może być nazwane pięknym.

Piękno ma to do siebie, że nie przez wszystkich jest dostrzegane i odczuwane. Są osoby, których nie zachwyca malarstwo i chcą w nim widzieć tylko odwzorowanie rzeczywistości. Nie zachwyca ich piękno gór widzianych ze szczytu, bo bardziej myślą o zmęczeniu. Nie wszyscy zachwycają się muzyką czy zapachem świeżo skoszonej łąki. Nie wszyscy dostrzegają piękno rozumowania matematycznego. Ale są osoby, na których niezwykłe wrażenie wywarły piękne dowody twierdzeń matematycznych. Paul Erdös, wielki matematyk węgierski XX wieku, mówił, że Bóg ma taką księgę, w której są zapisane najdoskonalsze, tzn. najpiękniejsze dowody twierdzeń matematycznych i czasem tylko, w swej dobroci, pozwala nielicznym ujrzeć jej kawałek (zob. [Księga]). Jak pisał G. H. Hardy „nie ma na świecie miejsca dla brzydkiej matematyki”. Każdy, kto studiował matematykę, musiał zachwycić się niejednym dowodem, dostrzegając w nim niezwykłe piękno. Dla mnie było to przede wszystkim twierdzenie Gödla i twierdzenie o niezależności hipotezy continuum, ale zachwycały mnie także twierdzenia algebry, topologii czy analizy funkcjonalnej. Każdy matematyk ma z pewnością takie swoje „najpiękniejsze” twierdzenie, które być może zadecydowało ostatecznie o jego przyszłości.

Piękno matematyki nie musi odwoływać się do tak poważnych twierdzeń i teorii. Książka *Dowody z Księgi* zaczyna się od niezwykle pięknego dowodu twierdzenia o nieskończoności zbioru liczb pierwszych. Dowód jest niezwykle krótki i zachwyca swoją prostotą. Przytoczę go w całości. Przypuśćmy, że istnieje tylko skończenie wiele liczb pierwszych: $p_1, \ldots, p_n$. Weźmy liczbę $N = p_1 \cdot \ldots \cdot p_n + 1$ i jej dzielnik pierwszy p. Żadna z liczb $p_1, \ldots, p_n$ nie jest dzielnikiem N (dzielenie daje resztę 1), ale p jest dzielnikiem N. Zatem liczba pierwsza p jest różna od każdej **ze wszystkich** liczb pierwszych $p_1, \ldots, p_n$.

Ta sprzeczność kończy dowód twierdzenia. Nie znam matematyka, który nie zachwyciłby się tym dowodem, widząc go po raz pierwszy. A przecież ten dowód jest tak prosty, że można go pokazać uczniom w szkole. No właśnie, w jakiej szkole?

Programy nauczania matematyki w polskich szkołach są podporządkowane pierwszemu z wymienionych celów: użyteczności. Uczymy, jak ułożyć równanie, by rozwiązać zadanie tekstowe będące jakby niewielkim problemem praktycznym, o treści wziętej z otaczającej nas rzeczywistości. Uczymy, jak obliczyć pola najważniejszych figur geometrycznych, długości linii (na przykład za pomocą twierdzenia Pitagorasa czy wzorów na długość łuku), objętości brył — w liceum także za pomocą trygonometrii. Uczymy obliczania najprostszych prawdopodobieństw i rozwiązywania prostych zadań optymalizacyjnych. Niektórzy eksperci domagają się, by zadania egzaminacyjne w znacznie większym niż dotychczas stopniu były formułowane w języku życia codziennego, by dotyczyły rzeczywistych zastosowań. To wszystko jest oczywiście bardzo ważne. Ale ja dostrzegam jeszcze jeden aspekt użyteczności.

Bo co to naprawdę znaczy, że matematyka jest użyteczna? Dla mnie jednym z najważniejszych aspektów użyteczności matematyki jest jej uniwersalność. To samo równanie może opisywać zupełnie różne sytuacje rzeczywiste. Ale, niezależnie od tego, co ono opisuje, rozwiązywać je będziemy tak samo. Ta sama krzywa opisuje ruch planety wokół Słońca i cień rzucany przez piłkę na boisko szkolne. I znów, niezależnie od tego, co ta krzywa opisuje, jej własności będziemy tak samo wyprowadzać z jej definicji geometrycznej lub równania algebraicznego. Matematyki nie należy zatem uczyć głównie w kontekście praktycznym. Trzeba jej uczyć w sposób uniwersalny, abstrakcyjny, bo tylko w taki sposób nauczymy jej rzeczywistej, powszechnej użyteczności. To pierwsze: matematyki chcę uczyć dla niej samej, podkreślając tylko jej uniwersalność i użyteczność.

Matematyka, uczona dla niej samej, porządkuje nasz sposób myślenia. Uczę nie tylko zadań matematycznych; uczę, jak należy myśleć nad zadaniem, jak zabrać się do rozwiązywania zadania i jak podążać do rozwiązania. Kieruję się tutaj wspaniałymi książkami, których autorem jest wielki matematyk amerykański pochodzenia węgierskiego, George Polya (zob. [Polya-1], [Polya-2]). W swych książkach pokazuje on przede wszystkim, że można nauczyć ucznia rozwiązywania zadań i pokazuje, jakich wskazówek (tzw. wskazówek heurystycznych) należy uczniom udzielać. O niektórych wskazówkach heurystycznych, dawanych moim uczniom, piszę przy okazji zadań. Jednak trzeba pamiętać: jeśli matematyka ma nauczyć uporządkowanego sposobu myślenia, musimy dać uczniowi odpowiednie zadania. Zadania, które „sprawdziły się” na moich lekcjach, są właśnie tematem tego poradnika.

Wreszcie, czy można pokazać w szkole piękno matematyki? Są zadania, których rozwiązania wywołują u uczniów poczucie pewnej satysfakcji, a nawet poczucie piękna. Niektóre takie zadania pokazuję, ale trzeba pamiętać — odczuwanie piękna jest bardzo indywidualne. Nie wszystko, co mnie zachwyciło, zachwyci moich uczniów. Ale i odwrotnie, wielokrotnie moich uczniów zachwyciło coś, czego się nie spodziewałem; może dlatego, że ja już się do tego przyzwyczaiłem, nic w tym nie mogło mnie zaskoczyć i dopiero reakcje uczniów pozwoliły mi dostrzec coś, czego nie widziałem wcześniej. Trzeba próbować pokazywać piękno matematyki przede wszystkim przez pokazywanie jej niezwykle logicznej struktury, jej uniwersalności, widzenia jej jednocześnie z wielu stron, ukazywania różnych aspektów tych samych pojęć, wreszcie zaskakujących pomysłów w poszczególnych zadaniach. Trzeba pamiętać, że zaskoczenie bardzo mocno zapada w pamięć, a zaskoczenie w rozumowaniu jest jednym z podstawowych elementów decydujących o pięknie tego rozumowania.

Podstawowym elementem mojego programu rozszerzonego są zadania. Uczę, tak jak wszyscy, algebry, geometrii (płaskiej i przestrzennej), elementów statystyki i rachunku prawdopodobieństwa. Uczę podstawowych własności funkcji, wspominam o przekształceniach geometrycznych. Różnią nas zadania. O nich właśnie piszę dalej.

Kogo uczę? Poradnik jest przeznaczony dla nauczycieli uczących uczniów zdolnych. Kogo w takim razie ja uczyłem? Przez wiele lat, gdy uczyłem tylko w Gimnazjum Przymierza Rodzin w Warszawie, uczyliśmy matematyki w grupach. Lekcje matematyki odbywały się we wszystkich klasach jednego poziomu w tym samym czasie i uczniowie uczyli się w grupach zaawansowania, a nie w swoich klasach. Ja dostawałem tzw. grupę rozszerzoną, były grupy, w których uczono według programu standardowego i była grupa przeznaczona dla uczniów z problemami, uczniów, którzy wymagali bardziej indywidualnego traktowania. Do grupy rozszerzonej uczniowie zgłaszali się sami, za zgodą rodziców. Nie robiłem żadnego specjalnego naboru do takiej grupy. Po prostu ci uczniowie, którzy już dostali się do szkoły, wybierali poziom lekcji matematyki. Po sześciu latach nauki w szkole podstawowej uczniowie na ogół wiedzą, czy matematyka sprawia im trudności, czy przychodzi raczej łatwo; ci ostatni na ogół wybierali grupę rozszerzoną. Zgłaszali się również uczniowie „z rozsądku”, rozumiejąc, że dobra matematyka będzie im potrzebna.

W ten sposób rozpoczynałem naukę z dużą grupą, znacznie większą od pozostałych, złożoną z uczniów, którzy się samodzielnie do niej zgłosili. W trakcie nauki okazywało się, że matematyka, której uczę, jest inna od matematyki, której wielu uczniów się spodziewało. Ci, którym się to nie podobało, odchodzili do innych grup. Myślę dzisiaj, że to był dobry pomysł organizacyjny, choć — obawiam się — w wielu szkołach niemożliwy do zrealizowania ze względu na niechęć dyrekcji do eksperymentowania. Ten system pozwalał na naturalną selekcję: o tym, kto zostawał w grupie rozszerzonej, decydowała w pewnym sensie sama matematyka. Ci, którym się podobała, zostawali, pozostali odchodzili do bardziej tradycyjnego systemu.

Często nauczyciele pytają mnie, jak rozpoznaję uczniów zdolnych. Odpowiadam, że sami się ujawniają; ja tylko stwarzam im warunki. Moim zadaniem jest przede wszystkim staranny dobór zadań umożliwiających rozwój i rozpoznanie tego rozwoju. Zadań nie dobieram w oparciu o jakąś „teorię dydaktyczną”. Obecny dobór zadań, kolejność, sposoby rozwiązania ewoluowały i są wynikiem działań praktycznych. Jak pisałem, „sprawdziły się”. Próbowałem najpierw w liceach, dobierałem zadania tak, by jak najszybciej nauczyć moich uczniów samodzielnego myślenia. Co roku modyfikowałem listę zadań; usuwałem te, które moim zdaniem nie sprawdziły się i dodawałem takie, których z jakiegoś powodu mi zabrakło. Do czego zabrakło? Tu odpowiedź była dość prosta. Zawsze jednym z ważniejszych celów wskazujących, co jest potrzebne, była Olimpiada Matematyczna.

Sam w szkole startowałem dwukrotnie w olimpiadzie. Raz byłem finalistą, w następnym roku laureatem. Pamiętam, jak wiele się nauczyłem ze wspaniałych zbiorów zadań profesora Straszewicza (zob. [Straszewicz]). Start w Olimpiadzie Matematycznej był dla mnie wielką przygodą intelektualną, chyba pierwszą tak wielką w moim życiu. Zmusił mnie do rozwiązywania wielu zadań, do uczenia się matematyki znacznie szybciej, do czytania książek matematycznych itp. Wtedy, prawie 50 lat temu, było znacznie trudniej; dzisiaj, w dobie Internetu, dostęp do wielu zadań, książek, czasopism, artykułów, jest znacznie łatwiejszy. Zauważyłem, że wielu moich uczniów także wiele skorzystało dzięki przygotowaniom do Olimpiady Matematycznej, nawet jeśli start nie zakończył się pełnym sukcesem. Ciśnie się na usta przypomnienie zasady twórcy sportowych olimpiad nowożytnych, barona Pierre de Coubertina, że nie sukces, ale udział jest celem. Dlatego — jak wspomniałem — Olimpiada Matematyczna zawsze wskazywała mi kierunek w moich doświadczeniach dydaktycznych. Olimpiada Matematyczna jest trudna. Wielu nauczycieli, widząc te trudności, nie zachęca swoich uczniów do startu. Wielu nauczycieli otwarcie przyznaje się do nieumiejętności rozwiązywania zadań olimpijskich — a jak uczyć czegoś, czego samemu się nie umie? Nie wiem, czy pocieszeniem będzie stwierdzenie, że niektórzy moi koledzy z uniwersytetu, z tytułem profesora, także przyznają się, że takich zadań nie umieją rozwiązywać. A jednak matematyki uczą, na ogół ze świetnym rezultatem. Gdy ponad 20 lat temu zacząłem uczyć w szkole, wiedziałem, że olimpiada będzie jednym z moich celów. Wziąłem zadania z aktualnej olimpiady — i wpadłem w panikę. Nie umiałem rozwiązać ani jednego. Może rzeczywiście praca na uniwersytecie, publikowanie prac naukowych, to coś innego niż Olimpiada Matematyczna. Nie było rady: wziąłem wspomniane zbiory zadań Straszewicza i zacząłem sobie przypominać to, co umiałem 25 lat wcześniej. Po kilku miesiącach okazało się, że nie jest to takie trudne; w kolejnych olimpiadach umiałem już rozwiązać większość zadań. Nie wszystkie! Nigdy nie byłem tak dobry jak niektórzy moi uczniowie. Ale mogłem już zacząć. Ostatecznie trener tyczkarzy na ogół nie skacze o tyczce 5 metrów, a niektórzy jego podopieczni skaczą nawet wyżej...

Można nauczyć się rozwiązywania zadań olimpijskich. Jeśli nauczyciel naprawdę chce pracować z uczniami zdolnymi i chce ich wiele nauczyć, to polecam mu tę drogę. Po reformie systemu edukacji, wprowadzeniu gimnazjów i skróceniu nauki w liceum, przekonałem się, że przygotowanie ucznia do olimpiady w trzyletnim liceum znacznie się utrudniło. Ale w zamian dostaliśmy gimnazja. Ta nowa szkoła kusiła, by zacząć w niej nauczanie matematyki nakierowane na samodzielność myślenia, umiejętność prowadzenia rozumowań i przygotowanie do olimpiady. Tu nastąpiło niezwykle ważne wydarzenie: z inicjatywy środowiska olimpiady, a zwłaszcza nauczycieli współpracujących z Komitetem Głównym Olimpiady Matematycznej, powstała Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów (OMG). Odbyła się ona już osiem razy. Zadania są przygotowywane w stylu „dorosłej" olimpiady — jej „starszej siostry". Są jednak znacznie łatwiejsze; tak, by do OMG można było rzeczywiście przygotować gimnazjalistów. OMG wyznaczyła kierunek, w jakim musiał pójść mój program matematyki.

Zamiast — jak dawniej — czterech lat przygotowań do olimpiady, dostaliśmy prezent w postaci dodatkowych dwóch lat. Mamy trzy lata gimnazjum i trzy lata liceum. To ogromna zmiana i chciałem, by mój program wykorzystał dobrodziejstwa płynące dla matematyki ze zmiany systemu szkolnego. Spróbuję teraz odpowiedzieć, po tym wprowadzeniu, na podstawowe pytania narzucające się w związku z moim programem rozszerzonym.

Po pierwsze, możemy zapytać, jak rozpoznać uczniów zdolnych mających 13 lat. Jak pisałem wyżej, w Gimnazjum Przymierza Rodzin nie robiłem żadnej selekcji wstępnej. Pracowałem ze wszystkimi uczniami, którzy się zgłosili. Można oczywiście zapytać, co bym zrobił, gdyby zgłosili się na przykład wszyscy uczniowie szkoły. Cóż, wierzę w statystykę i myślę, że byłoby to niemożliwe. Tak też było w praktyce. W szkole, w której mieliśmy na jednym poziomie cztery klasy dwudziestoosobowe, do grupy rozszerzonej zgłaszało się zazwyczaj nieco ponad 20 uczniów. Jeden raz zgłosiło się 35 uczniów, ale już po kilku tygodniach grupa stopniała do 25 osób. Pozostali sami uznali, że moje wymagania im nie odpowiadają; niektórzy otwarcie mówili, że myśleli, iż mój sposób nauczania pozwoli im poznać matematykę bez wysiłku. To, że ja wymagałem odrabiania prac domowych, ostatecznie ich zniechęciło. Ale około jednej czwartej szkoły co roku chciało podjąć też zwiększony wysiłek, by nauczyć się więcej.

Trudniej było w Gimnazjum im. Staszica. Tam utworzyliśmy dwie klasy matematyczne i chętnych było dużo więcej. W pierwszym roku przeprowadziliśmy test wstępny, po którym podzieliliśmy klasy na dwie grupy zaawansowania. Ten podział okazał się dość trwały. Początkowo moja grupa była nieco bardziej liczna, po dwóch latach jest nieco mniejsza. Prawie wszystkie decyzje zmiany grupy były decyzjami samych uczniów, którzy deklarowali chęć przejścia do bardziej zaawansowanej grupy lub chęć ucieczki do tej drugiej.

Jestem zadowolony z systemu, w którym uczniowie mają możliwość zmiany grupy, nawet jeśli jest to ograniczone tylko do dwóch grup. Nie stanowi to na ogół wielkiego problemu organizacyjnego dla szkoły. Zazwyczaj w szkole jest więcej niż jeden nauczyciel matematyki. Wystarczy tak ułożyć plan, by dwie klasy miały lekcje matematyki w tym samym czasie. Ten system pozwala uczniom mniej ambitnym lub uczniom, którzy przeliczyli się ze swoimi siłami, lub wreszcie uczniom, którzy stwierdzili, że nie są aż tak bardzo zainteresowani matematyką, uciec do programu mniej ambitnego. W Gimnazjum im. Staszica w tej drugiej grupie moi koledzy uczą wolniej, robią mniej zadań, opuszczają zadania trudniejsze, ale nadal jest to program rozszerzony. To jest bardzo ważne. Uczniowie, którzy przechodzą do programu mniej ambitnego, nie mają poczucia niepowodzenia; nadal są w programie rozszerzonym, ale bardziej dostosowanym do ich możliwości, ambicji i chęci.

Nauczanie matematyki ma coś wspólnego z nauczaniem języków obcych. Wydaje się, że nie powinien być na lekcji angielskiego w jednej grupie uczeń, który dopiero zaczyna uczyć się pierwszych słówek i uczeń, który zna język i potrzebuje bardziej konwersacji niż lekcji. Dla wszystkich jest oczywiste, że tacy dwaj uczniowie powinni znaleźć się w innych grupach, w których uczy się języka na różnych poziomach. Podobnie jest z matematyką; uczeń, który już rozwiązuje zadania olimpijskie, nie powinien uczyć się w jednej klasie z uczniem mającym trudności ze skracaniem ułamków. Często słyszymy argument, że nie należy zbyt wcześnie tworzyć klas o ustalonym profilu. Jednak nawet w takich klasach należy wprowadzić oddzielne grupy językowe, dostosowane do poziomu uczniów. Podobnie jest z matematyką. Zdolności matematyczne ujawniają się w bardzo wczesnym wieku i na poziomie gimnazjum różnice są już bardzo duże. Moim zdaniem warto włożyć nieco wysiłku organizacyjnego, by ułatwić uczniom zdolnym i chętnym bardziej zaawansowaną naukę matematyki, dostosowaną do ich możliwości — często znacznie przewyższających przeciętne.

Nikogo nie dziwi to, że dziecko uzdolnione muzycznie jest posyłane do szkoły muzycznej w wieku kilku lat. W przypadku uzdolnień muzycznych wydaje się to konieczne; jeśli tego nie zrobimy, to być może na zawsze odbierzemy dziecku możliwość kariery muzycznej. Nikogo nie dziwi rozwijanie u dziecka jego szczególnych uzdolnień plastycznych. Nie dziwmy się więc naturalnej potrzebie rozwijania zdolności matematycznych. Początek gimnazjum to nie jest zbyt wcześnie na tworzenie grup, w których uczymy matematyki według programu rozszerzonego. Niektórzy nasi uczniowie są naprawdę tak bardzo uzdolnieni, że taki program im się należy.

Inne pytania, które cisną się na usta, to pytania, jak rozpoznać możliwości twórcze ucznia zdolnego, co robić z takimi uczniami, jak z nimi pracować, jak mówić o matematyce. Tak naprawdę odpowiadam na nie w całym poradniku. Należy dawać uczniom zadania, pokazywać rozwiązania, uczyć pomysłów i trików — aż pewnego dnia to zaowocuje. W tym miejscu chciałbym zwrócić uwagę na dwa aspekty nauczania. Należy dbać o biegłość ucznia, w tym biegłość rachunkową. Ale przede wszystkim należy prowokować, zmuszać ucznia do własnego myślenia. Należy pamiętać o tym, że uczeń najwięcej się uczy nie wtedy, gdy my mu coś wyjaśniamy, ale wtedy, gdy samodzielnie (lub z niewielką naszą pomocą) musi znaleźć odpowiedź na nasze pytanie. George Polya daje nam ważną radę: uczeń ma samodzielnie rozwiązać taką część zadania, jaką jest w stanie. A nasza pomoc ma się ograniczać do takich tylko podpowiedzi, jakie naprawdę są niezbędne. Efekty, jak wspomniałem, przyjdą pewnego dnia; należy uzbroić się w cierpliwość. To wszystko, o czym piszę dalej, nie przynosi efektów od razu.

Już pierwszego dnia pracy z moimi uczniami mówię o różnicy między nauką w szkole podstawowej i w mojej klasie rozszerzonej w gimnazjum. Mówiąc najprościej, w szkole podstawowej na lekcjach matematyki najczęściej uczy się „jak jest". Ja chcę natomiast uczyć „dlaczego tak jest". Ale to znaczy, że nie ja mam moim uczniom wyjaśniać, dlaczego tak jest. Moim celem jest bezustanne zadawanie pytania „dlaczego". Dopiero, gdy uczniowie nie umieją samodzielnie znaleźć odpowiedzi, do pomocy wkracza nauczyciel. Jeśli gdziekolwiek dalej w poradniku piszę, że coś wyjaśniam uczniom, to trzeba pamiętać, że najpierw zadam pytanie „dlaczego?" z nadzieją, że ktoś będzie umiał wskazać choć jedną maleńką przyczynę. To w pewnym sensie odpowiada na pytanie, jak z uczniem zdolnym pracować. Taka metoda wydaje się być bardzo nieefektywną. O wiele łatwiej i szybciej sam coś wyjaśnię uczniom niż jeśli będę próbował z nich to wyciągnąć — a i tak na końcu sam będę musiał wyjaśnić. To tylko pozorna strata czasu. Na początku na pewno będzie wolniej; po jakimś czasie zobaczymy zysk. Zobaczymy go wtedy, gdy uczniowie, przyzwyczajeni do bezustannych pytań „dlaczego?", wreszcie zaczną odpowiadać. Uczniowie na początku sami też zadają pytanie „a co będzie, gdy...?" Odpowiadam: „zrób to i sam/sama się przekonaj". Zysk zobaczymy wtedy, gdy uczniowie nie będą już zadawać takich pytań, ale od razu spróbują sami znaleźć odpowiedź. Od tego momentu nauka nabierze przyspieszenia; potrzebna jest tylko cierpliwość.

Gdy mówimy o metodach pracy, trzeba poruszyć jeden ważny temat. Czy matematyki należy uczyć się na pamięć? Wiele osób uważa, że nauka matematyki jest zaprzeczeniem uczenia pamięciowego; należy matematykę przede wszystkim zrozumieć. Oczywiście matematykę należy rozumieć. Tylko, co to znaczy? Co to znaczy rozumieć twierdzenie matematyczne? Z jednej strony należy znać pojęcia w nim występujące, należy wiedzieć, co jest założeniem i co tezą, należy umieć je stosować. A czy do rozumienia konieczna jest znajomość dowodu? Jeśli uznamy, że tak, to po prostu tego dowodu trzeba się nauczyć na pamięć. Gdy zaczynam uczyć moich uczniów geometrii, podaję im podstawowe twierdzenia i każę nauczyć się ich na pamięć wraz z dowodami. Te dowody będą wzorcami rozumowania, które pojawią się później w rozwiązaniach zadań. Uważam, że uczeń potrafi sprawnie posługiwać się metodami dowodzenia, jeśli pamięta wzorce. Na początku, rozwiązując zadania, powtarza wyuczone rozumowania; potem tak bardzo się z nimi oswaja, że czyni to dość automatycznie.

Czy można nauczyć dowodzenia sprawniej? Pewnie można, jeśli się ma do czynienia z uczniami bardzo zdolnymi. W tym miejscu muszę podkreślić, że bardzo rzadko miałem do czynienia z uczniami naprawdę wybitnymi. Znacznie częściej uczyłem uczniów dość zdolnych i przy tym często pracowitych. Ci uczniowie nie umieli samodzielnie przeprowadzić poprawnego rozumowania matematycznego, ale uczyli się tego dość szybko. Po paru miesiącach i kilkudziesięciu zadaniach rozwiązanych i omówionych dokładnie w klasie, już sami potrafili rozwiązywać zadania z OMG. Wynika z tego, że ta metoda okazała się skuteczna. Zachęcam do niej tych nauczycieli, którzy zdecydują się z mojego poradnika skorzystać.

3. Cele i omówienie programu

W tym rozdziale wskażę cele, które chcę osiągnąć za pomocą mojego programu. George Polya w swojej książce [Polya-2] na stronie 291 pisze: „najpierw i przede wszystkim należy uczyć młodzież MYŚLEĆ”. Dalej, na stronie 308, Polya podaje 10 przykazań dla nauczycieli. Zacytuję kilka odnoszących się bezpośrednio do celów i sposobów nauczania:

6. Niech uczą się odgadywać.
7. Niech uczą się udowadniać.
8. Dostrzegać te cechy zadania, które mogą być użyteczne przy rozwiązywaniu innych zadań — starać się dostrzec w danej konkretnej sytuacji metodę ogólną.
9. Nie ujawniać od razu całego sekretu — niech uczniowie odgadną go, zanim zostanie ujawniony — niech znajdą sami tyle, ile jest to możliwe.
10. Sugerować, nie narzucając swego zdania.

Przykazania 6, 7 i 8 przybliżają nam to, co Polya miał na myśli pisząc, że należy uczyć młodzież myśleć. Myślenie matematyczne to między innymi odgadywanie, dowodzenie i wyciąganie wniosków ogólnych, uogólnianie. To wszystko powinno znaleźć się w dobrym programie nauczania. Musimy mieć zadania, które uczą odgadywania; odgadnięcie jest najważniejszą fazą rozwiązania zadania matematycznego. Musimy mieć zadania, które uczą dowodzenia; tak naprawdę to jest najważniejsza część mojego programu. Musimy zwracać uwagę uczniów na wnioski natury ogólnej wypływające z rozwiązań, a wybrane zadania powinny to umożliwiać.

Przykazania 9 i 10 dotyczą dydaktyki. Przykazanie 9 każe nam uczyć metodą dialogu, w którym nauczyciel stawia pytania, a uczeń odpowiada na tak wiele z nich, na ile umie. To bardzo powolna metoda uczenia; o wiele szybciej (niektórzy mówią wprost: o wiele efektywniej) jest podać uczniom całą prawdę od razu i kazać się jej nauczyć. Nie zawsze to, co najefektywniejsze, jest dla ucznia najlepsze. Nie chodzi tylko o to, by uczeń nauczył się dokładnie tego, czego uczymy, ale by nauczył się pewnych umiejętności, wśród nich samodzielnego rozumowania. Nie chcę tu jednak jednoznacznie krytykować takiego nauczania podającego; sam je stosuję, ale jest ono tylko fazą wstępną większego procesu. Będę o tym pisał dalej.

Przykazanie 10 powinno być mottem dla całego poradnika. Nie chcę twierdzić, że to wszystko, co piszę, jest jakąś ostateczną prawdą objawioną. Sugeruję Czytelnikom, by z moich doświadczeń korzystali; nie chcę niczego narzucać. Sugeruję, by każdy wybrał to, co uzna za ciekawe, odpowiadające jego własnemu sposobowi nauczania i spróbował to wdrożyć. Mam nadzieję, że dostrzeże korzyść.

Zagadnienia poruszone w poradniku zostały pogrupowane według działów matematyki. Uważałem, że tak będzie wygodniej dla nauczyciela korzystającego z poradnika. Jednak tu chcę zwrócić uwagę na to, że tak naprawdę poradnik powinien udzielić odpowiedzi na pewne podstawowe pytania dotyczące nauczania. Na niektóre pytania, natury bardziej ogólnej, odpowiem w tym rozdziale; na inne odpowiadam w poszczególnych rozdziałach. Przejdźmy do pierwszej kwestii: nauczenia myślenia.

Moim podstawowym celem jest nauczenie rozumowań matematycznych, rozwijanie myślenia matematycznego i uczenie poprawnego wnioskowania. Środkiem dla osiągnięcia tego celu jest znaczne zwiększenie roli zadań na dowodzenie. Już pierwsze zadania, które daję uczniom, wskazują ten cel. Są to zadania o łamigłówce Sudoku; piszę o nich w rozdziale 4. Uczniowie znają tę łamigłówkę i umieją ją rozwiązywać; nigdy dotychczas nie musiałem tłumaczyć zasad Sudoku. Po rozwiązaniu kilku przykładów przychodzą zadania właściwe: dlaczego w dane pole można wpisać daną cyfrę? Te zadania ilustrują na samym początku naszej pracy tę zasadniczą różnicę między szkołą podstawową i moim programem, o której pisałem. Pytanie „jak jest?” będzie nas interesować znacznie mniej niż pytanie „dlaczego tak jest?”. Uczniowie od pierwszej lekcji są przyzwyczajani do tego, że celem matematyki będzie uzasadnianie.

Szczególnie ważne miejsce w moim programie zajmuje geometria; dowód geometryczny nie ma charakteru czysto abstrakcyjnego, ale odwołuje się do konkretu, jakim jest rysunek. Dowody algebraiczne też mają swoje miejsce w moim programie, ale są przesunięte na później. Dowodzenie zaczynamy od geometrii. Zaczynam naukę geometrii w II semestrze I klasy. Opis tego, w jaki sposób uczę geometrii, znajduje się w rozdziale 8: Geometria trójkąta. Niektóre zadania uzupełniające są opisane w rozdziale 9: Papier w kratkę. Naukę geometrii kontynuuję w II klasie; wtedy uczę geometrii okręgu (rozdział 10: Geometria okręgu). Wreszcie do geometrii powracam w III klasie, gdy uczę twierdzenia Talesa i robię z uczniami zadania na podobieństwo trójkątów. Tych zadań nie opisuję w Poradniku; wybieram zadania olimpijskie lub zadania z powszechnie dostępnych zbiorów zadań.

Jak wspomniałem, dowody algebraiczne pokazuję uczniom później. To, jak rozszerzam zwykły szkolny program algebry, pokazuję w rozdziale 6. Główny pomysł rozszerzenia polega na tym, by pokazać uczniom rolę wzorów skróconego mnożenia. Te wzory przez wiele lat były w programie gimnazjum i pozostawiam je w moim programie. Przede wszystkim te wzory wyprowadzam; pokazuję, że tak naprawdę biorą się one z mnożenia. Można tych wzorów nie pamiętać i za każdym razem wykonać odpowiednie mnożenie. Ale — jak ktoś kiedyś mi powiedział — sztuczka, której użyłeś dwa razy, stała się metodą. To bardzo dobry *bon mot*. To powiedzenie uczy nas tego, że niektóre rzeczy warto zapamiętywać; te mianowicie, które w naszych rozważaniach pojawiają się często. Pokazuję uogólnienia tych wzorów i ich zastosowania. Pokazuję uczniom, że dzięki wzorom skróconego mnożenia umiemy łatwo rozwiązywać równania kwadratowe (nie wyprowadzam wzorów, ale pokazuję metodę uzupełniania do kwadratu) i niektóre proste układy równań kwadratowych. Umiemy rozkładać wyrażenia algebraiczne na czynniki; tłumaczę też, do czego to może być przydatne. Pokazuję wreszcie, w jaki sposób wykorzystuje się wzory skróconego mnożenia do dowodzenia nierówności. W tym rozdziale omawiam też kwestię biegłości rachunkowej. Biegłość rachunkowa jest — moim zdaniem — niezbędnym elementem wykształcenia matematycznego, dającym uczniowi poczucie pewności przy rozwiązywaniu zadań o podwyższonej złożoności obliczeniowej.

W tym miejscu chcę zająć stanowisko w sprawie rozszerzania programu i „wybiegania w przód”. Te zjawiska miały miejsce w polskich szkołach od dawna. Teraz regularnie dostaję uczniów, którzy byli uczeni w szkole podstawowej tego, czego podstawa programowa szkoły podstawowej nie przewiduje. Gdy rozpoczynam z uczniami rozwiązywanie zadań tekstowych (zob. rozdział 5: Zadania tekstowe), moi uczniowie dziwią się, że wymagam od nich rozwiązań bez równań. Twierdzą, że uczono ich równań i potrafią tę wiedzę wykorzystać. Czasem sprawdzam to: robię krótką kartkówkę, w której daję im do rozwiązania nietrudne równanie (wybrane z podręcznika gimnazjalnego) oraz daję jedno zadanie tekstowe. W klasie liczącej ponad 20 osób zazwyczaj nie więcej niż dwie lub trzy osoby potrafią bezbłędnie rozwiązać równanie i na ogół nikt nie potrafi poprawnie ułożyć równania do zadania tekstowego. Często natomiast zdarza się, że wielu uczniów umie ułożyć układ równań; z reguły jednak nikt nie potrafi rozwiązać tego układu. Oczywiście ci uczniowie byli tego wszystkiego uczeni w szkole podstawowej i z tej nauki niewiele zostało. Chcę podkreślić, że w klasach, w których uczyłem, byli uczniowie dobrzy z matematyki, uczniowie, którym nauka nie sprawiała trudności i którzy mieli najlepsze oceny. Wreszcie mogę z całą pewnością powiedzieć, że uczyłem wielu uczniów naprawdę zdolnych. Dlaczego w takim razie nie nauczyli się tych równań? Prawdopodobnie było to jednak za wcześnie; być może także nie wyjaśniono im dobrze, w jaki sposób trzeba takie równania układać i rozwiązywać.

Uważam, że rozszerzać program można tylko wtedy, gdy uczniowie doskonale nauczą się tego, co jest w programie nierozszerzonym. Nie powinno się przechodzić do nowego tematu, zanim uczniowie nie nauczą się bardzo dobrze poprzednich tematów. Program rozszerzony to nie jest jakiś cel, który musi być realizowany za wszelką cenę. Uczę tego, czego moich uczniów mogę nauczyć — przez cały czas sprawdzając, czy umieją to, czego ich uczyłem wcześniej. Na ogół okazywało się, że miałem na tyle dobrych uczniów, że mogli spełnić wiele moich oczekiwań. Przede wszystkim oczekiwałem od nich znacznie większej pracy i ci uczniowie, którzy to zrozumieli, odnosili potem sukcesy. Nigdy nie starałem się zrealizować „na siłę" więcej, niż było możliwe. Tę radę pozostawiam tym nauczycielom, którzy zechcą korzystać z mojego Poradnika.

Jest jeden temat, w którym rzeczywiście wyprzedzam program. Jest nim kombinatoryka. Wiele lat wykładałem wstęp do kombinatoryki na Uniwersytecie Warszawskim i mogę uważać się za specjalistę w tym zakresie. Tym bardziej jestem zmartwiony tym, w jaki sposób uczy się kombinatoryki w polskich liceach. Sprowadzenie kombinatoryki do kilku zaledwie wzorów na liczbę wybranych obiektów kombinatorycznych (permutacji, kombinacji i wariacji — z powtórzeniami lub bez powtórzeń) ogromnie zubaża tę dziedzinę matematyki. Okazuje się, że wielu uczniów nie potrafi poprawnie zliczać elementów zbiorów, jeśli to zliczanie nie podpada pod któryś ze znanych schematów; dokładniej: jeśli nie odpowiada któremuś z poznanych wzorów. Dobre uczenie kombinatoryki powinno zaczynać się od dwóch podstawowych reguł zliczania: dodawania i mnożenia. Dobre opanowanie tych reguł, wraz z dwiema podstawowymi zasadami zliczania (wszystkie elementy mają być policzone i żaden więcej niż jeden raz), pozwala uczniom rozwiązywać w zasadzie każde zadanie dotyczące zliczania. Wzory, których uczy się w polskich szkołach, niczego istotnego tak naprawdę nie wnoszą. Ucząc moich uczniów kombinatoryki, zwracam uwagę właśnie na to. Mogę powiedzieć, że wprawdzie uczę tego, co znajduje się w programie liceum, ale nie uczę tego tak, jak uczy się w liceach.

Chcę zatem jeszcze raz wyraźnie podkreślić, że nie jest moim celem wyprzedzanie programu i uczenie w gimnazjum tego, co znajduje się w programie liceum. Jeśli wprowadzam nowe treści, to przede wszystkim dlatego, że bez nich dany fragment matematyki byłby za bardzo zubożony. Drugi powód, to przygotowanie do olimpiad. Podstawowym celem programu jest rozszerzenie i pogłębienie tych wiadomości, które są w programie gimnazjum. Nieliczne wyjątki związane są z przygotowaniem do startu w OMG i w przyszłości w OM. Jednym z celów jest też przygotowanie gruntu pod nauczanie w liceum tych działów matematyki, które zazwyczaj sprawiają uczniom wiele trudności.

Powróćmy do omówienia programu. Jak wspomniałem, o algebrze piszę w rozdziale 6. Jeden temat, zazwyczaj uważany za typowo algebraiczny, mianowicie wartość bezwzględną oraz rozwiązywanie równań i nierówności z wartością bezwzględną, omawiam w sposób geometryczny. Ten sposób pokazuję w rozdziale 7, choć na ogół odkładam go na później: po wstępnej nauce geometrii.

Jak wspomniałem, geometrię płaszczyzny omawiam w trzech rozdziałach: 8, 9 i 10. W rozdziale 11 pokazuję kilka wstępnych ćwiczeń z geometrii przestrzennej. Ich celem jest wyrobienie u ucznia wyobraźni przestrzennej i oswojenie z różnymi nietypowymi sytuacjami w geometrii. Tych nietypowych sytuacji jest w programie gimnazjum stanowczo za mało.

W rozdziale 12 pokazuję, w jaki sposób uczę kombinatoryki i rachunku prawdopodobieństwa. O kombinatoryce pisałem wyżej. Tu chcę napisać parę słów o rachunku prawdopodobieństwa. Pierwsze dwa zadania, które rozwiązuję z uczniami, są bardzo mocno powiązane z rzeczywistością. Dotyczą one dwóch doświadczeń losowych, które wykonują wszyscy uczniowie mojej klasy. Chcę w ten sposób pokazać, że rachunek prawdopodobieństwa dotyczy rzeczywistości. Uczy on nas tego, że nawet w sytuacjach losowych, w których nie możemy przewidzieć wyniku, umiemy wyciągać poprawne wnioski ogólne. Rachunek prawdopodobieństwa uczy nas bowiem, jak postępować racjonalnie nawet w warunkach niepewności wywołanej losowością. Warto też tu wspomnieć (będę o tym pisał szerzej w rozdziale o realizacji programu), że warto z uczniami robić zadania wykorzystujące rzeczywiste dane. Robię to także, ucząc statystyki opisowej. Korzystam na przykład z autentycznych wyników egzaminów publikowanych przez Komisje Egzaminacyjne (Centralną i Okręgowe). Pokazuję na przykład, jak wyglądają wyniki szkoły (tu też korzystam z prawdziwych danych — oczywiście anonimowych, po usunięciu danych osobowych i wszystkiego, co mogłoby ułatwić identyfikację uczniów) na tle wyników ogólnopolskich czy wojewódzkich.

W rozdziale 13 omawiam funkcje. W gimnazjum uczeń powinien zetknąć się nie tylko z funkcjami liniowymi. Pokazuję moim uczniom znacznie bardziej skomplikowane funkcje i na tych przykładach uczę podstawowych pojęć. W szczególności uczę wyciągania wniosków z wykresu funkcji. Uczę również funkcji liniowych, omawiam ich wykresy oraz pokazuję proste zastosowania równania prostej do zadań geometrycznych.

Rozdział 14 dotyczy ważnego zagadnienia dydaktycznego: nauczania metodą projektów. Omawiam dwa rodzaje projektów matematycznych, które realizowałem z moimi uczniami. Oba dotyczyły związków matematyki ze sztuką. Jak pisałem, matematyka jest obecna wszędzie. To, że ma związek ze sztuką, jest szczególnie warte podkreślenia. Jakiż bowiem może być związek nauki tak ścisłej jak matematyka z dziedziną tak bardzo nieścisłą, opartą bardziej na fantazji niż rozumowaniu, jak sztuka? Okazuje się, że fascynacja matematyką miała wielki wpływ na sztukę. Omawiam dwa takie przykłady: różne rodzaje symetrii w sztuce oraz geometrię w sztuce gotyckiej.

W rozdziale 15 omawiam rolę wskazówek heurystycznych w nauczaniu matematyki. W kilku następnych rozdziałach piszę o prowadzeniu kółek i zajęć seminaryjnych oraz wykorzystaniu komputerów w nauczaniu matematyki. Jeden rozdział poświęcam kwestii używania bardziej sformalizowanego języka matematyki oraz języka naturalnego. Pokazuję także przykładowy rozkład materiału i uzyskane efekty nauczania w Gimnazjum im. Staszica w Warszawie. W ostatnim rozdziale omawiam ważny pomysł dydaktyczny: warsztaty matematyczne. Jest to istotne uzupełnienie kółka matematycznego, są to zajęcia, których jedynym celem jest przygotowanie do zawodów matematycznych.

Podział treści nauczania na semestry

Trzyletni cykl nauczania dzieli się na sześć semestrów. Zakładam, że wszystkie wymagane treści nauczania zostaną wystarczająco omówione w ciągu pierwszych pięciu semestrów. Semestr szósty jest przeznaczony na przygotowanie do egzaminu gimnazjalnego. Czas po egzaminie gimnazjalnym jest przeznaczony na przykład na przygotowanie własnego projektu. Podział treści nauczania na poszczególne semestry przedstawia się następująco:

- Klasa I, semestr I
  - Przypomnienie wiadomości o liczbach ze szkoły podstawowej. Zwracam tu uwagę na działania na ułamkach, rozkładanie liczb na czynniki pierwsze, szukanie NWD i NWW oraz dzielenie z resztą. Pokazuję też uczniom algorytm Euklidesa.
  - Zadania tekstowe.
  - Procenty. Tworzenie wykresów procentowych oraz elementy statystyki opisowej (o tym, jak uczę procentów, piszę w rozdziale o zadaniach tekstowych).
  - Wyrażenia algebraiczne. W pierwszym semestrze ograniczam się do podstawowych działań na wyrażeniach algebraicznych (dodawanie, odejmowanie i mnożenie przez jednomian). Wraz z omawianiem działań na jednomianach omawiam własności potęg o wykładnikach naturalnych. Mnożenie wyrażeń algebraicznych, wyłączanie wspólnego czynnika poza nawias, rozkładanie wyrażeń algebraicznych na czynniki i wzory skróconego mnożenia omawiam w drugim semestrze.
  - Równania pierwszego stopnia z jedną niewiadomą.
  - Proporcjonalność.
  - Początki geometrii; wprowadzenie podstawowych figur geometrycznych (płaszczyzna, prosta, półpłaszczyzna, półprosta, odcinek, łamana, kąt, wielokąty, figury wypukłe i wklęsłe), wzajemne położenie prostych (równoległość, prostopadłość), kąty przy siecznej przecinającej dwie proste (kąty odpowiadające, kąty naprzemianległe), kąty przyległe i wierzchołkowe.
- Klasa I, semestr II
  - Geometria trójkąta; przystawanie trójkątów, cechy przystawania, podstawowe twierdzenia (suma kątów trójkąta, trójkąty równoramienne, nierówności między bokami i kątami, nierówność trójkąta).
  - Geometria na papierze w kratkę; wprowadzenie do układu współrzędnych. Pojęcie wektora. Zapis ruchu na papierze w kratkę za pomocą wektorów.
  - Rzut punktu i odcinka na prostą, odległość punktu od prostej, czwarta cecha przystawania trójkątów prostokątnych. Pola wielokątów.
  - Symetrie; klasyfikacja „szlaczków” i „tapet”.
  - Nierówności pierwszego stopnia z jedną niewiadomą.
  - Wartość bezwzględna — interpretacja geometryczna; rozwiązywanie najprostszych równań i nierówności z wartością bezwzględną metodą geometryczną (np. równań i nierówności typu $|x-a|=r$ czy $|x-a|+|x-b|\geq r$).
  - Mnożenie wyrażeń algebraicznych, wzory skróconego mnożenia, dowodzenie tożsamości i nierówności algebraicznych, porównywanie liczb zapisanych za pomocą pierwiastków. Grupowanie i rozkładanie wyrażeń algebraicznych na czynniki. Reszty z dzielenia liczb całkowitych przez liczby naturalne, własności reszt przy dodawaniu i mnożeniu liczb całkowitych.

- Klasa II, semestr I

  Naukę w tym semestrze rozpoczynamy od przygotowania do konkursów matematycznych. Przez 6–7 tygodni (tj. do ok. 20 października) omawiam z uczniami rozwiązania zadań konkursowych i olimpijskich. Po tym czasie, a więc po starcie w Konkursie Wojewódzkim i oddaniu zadań olimpijskich (z zawodów pierwszego stopnia), zaczynam systematyczną naukę według podręcznika.
  - Potęgi. Własności potęg o wykładnikach naturalnych zostały już omówione w I klasie przy okazji omawiania własności jednomianów. Teraz nastąpi krót-

kie powtórzenie i omówienie własności potęg o wykładnikach ujemnych. Potęgi liczb całkowitych. Rozkład liczby naturalnej na iloczyn potęg liczb pierwszych, reszty z dzielenia potęg liczb naturalnych, podstawowe nierówności dotyczące potęg liczb naturalnych i rzeczywistych.
  - Pierwiastki dowolnego stopnia. Własności pierwiastków. Liczby niewymierne, kilka różnych dowodów niewymierności.
  - Układy równań.
  - Dokończenie geometrii trójkąta (zestawy zadań V i VI).
  - Twierdzenie Pitagorasa i podstawowe wnioski z niego. Pierwiastek kwadratowy. Wnioski z twierdzenia Pitagorasa (korzystające z pojęcia pierwiastka). Długość przekątnej kwadratu, wysokość trójkąta równobocznego.
  - Podstawowe własności okręgu; promień, średnica, cięciwa, sieczna i styczna, koło.
  - Geometria okręgu i koła. Łuk i wycinek. Kąt środkowy i wpisany oraz zależność między nimi. Kąt między styczną i cięciwą. Zależności metryczne w okręgu wynikające z twierdzenia Pitagorasa. Długość okręgu i łuku, pole koła i wycinka. Wzajemne położenie dwóch okręgów. Wspólne styczne.
- Klasa II, semestr II
  - Geometria w układzie współrzędnych. Odległość punktów.
  - Wielokąty i okręgi. Okrąg opisany na trójkącie i okrąg wpisany w trójkąt. Warunki konieczne i wystarczające na to, by na czworokącie można było opisać okrąg i w czworokąt można było wpisać okrąg. Wielokąty foremne i własności miarowe kilku podstawowych wielokątów foremnych (kwadratu, sześciokąta foremnego, ośmiokąta foremnego).
  - Konstrukcje geometryczne. Zadania konstrukcyjne, które można łatwo rozwiązać metodą analizy bez konieczności odwoływania się do pojęcia podobieństwa i jednokładności.
  - Wprowadzenie do geometrii przestrzennej. Sześcian i jego siatki. Różne kostki do gry, rysowanie siatek kostki.
  - Położenie prostych i płaszczyzn w przestrzeni. Proste równoległe i skośne. Proste prostopadłe w przestrzeni. Prosta równoległa i prostopadła do płaszczyzny. Płaszczyzny równoległe i prostopadłe. Twierdzenie o trzech prostopadłych (na przykładach, bez dowodu).
  - Podstawowe wielościany (przypomnienie ze szkoły podstawowej): sześcian, prostopadłościan, graniastosłupy, ostrosłupy. Graniastosłupy i ostrosłupy nieprawidłowe. Rysowanie wielościanów.
  - Siatki wielościanów. Siatki ostrosłupów trójkątnych i czworokątnych.
  - Przekroje sześcianu, graniastosłupów i ostrosłupów. Rysowanie (także konstrukcyjne) przekrojów.
  - Przekątne graniastosłupa i ścian graniastosłupa. Wzajemne położenie prostych i płaszczyzn na przykładzie krawędzi i przekątnych oraz ścian graniastosłupów i ostrosłupów.
  - Pole powierzchni i objętość graniastosłupów i ostrosłupów.
  - Elementy statystyki opisowej, średnia i mediana.
  - Elementy kombinatoryki; podstawowe zasady zliczania. Zadania na zliczanie.
  - Zdarzenia losowe, wprowadzenie do rachunku prawdopodobieństwa. Omówienie wykonanych doświadczeń losowych.

- Klasa III, semestr I
  - Elementy kombinatoryki — dokończenie.
  - Funkcje i ich podstawowe własności. Przykłady funkcji. Wykresy funkcji. Tworzenie i badanie wykresów funkcji za pomocą programów komputerowych.
  - Funkcja liniowa i jej wykres. Równanie prostej. Proste równoległe i proste prostopadłe w układzie współrzędnych. Wprowadzenie do geometrii analitycznej.
  - Trójkąty podobne. Twierdzenie Talesa i różne postaci twierdzenia odwrotnego do twierdzenie Talesa. Cechy podobieństwa trójkątów. Własności metryczne figur podobnych. Figury jednokładne.
  - Konstrukcje geometryczne wykorzystujące podobieństwo i jednokładność.
  - Powtórzenie wiadomości o graniastosłupach i ostrosłupach; zadania o podwyższonym stopniu trudności.
  - Bryły obrotowe. Walec, stożek, kula. Objętość brył obrotowych, reguła Guldina w najprostszych przypadkach.
- Klasa III, semestr II
  - Powtórzenie materiału do egzaminu gimnazjalnego.
  - Po egzaminie gimnazjalnym: przygotowanie projektu oraz omówienie wybranych zagadnień z historii matematyki, jej zastosowań i tych jej działów, które nie są omawiane zazwyczaj w szkole, a które mogą być opowiedziane uczniom na tym poziomie.

4. Sudoku

Na pierwszej lekcji matematyki z moją klasą w gimnazjum mówię moim uczniom, że jedną z najważniejszych różnic między nauką w tej klasie a nauką w szkole podstawowej będzie to, iż w szkole podstawowej zwracano głównie — jeśli nie wyłącznie — uwagę na to jak jest, ja zaś będę o wiele częściej pytał, dlaczego tak jest. Różnicę między pytaniem „jak” i pytaniem „dlaczego” ilustruję już pierwszym zadaniem, jakie realizuję w klasie. Daję uczniom dwa diagramy Sudoku:

		9			1	4	8	
			8		4	6		
8			2	6				
5	8	7				1		9
		2	7	1	3			
6	3				5		2	4
2	1			3			4	
		8	1	4				3
		4	6		7	2		

Diagram 1

6	7			9		5	2	3
	2		5			8		
		8		2	7	4		
			3	7		2		
			9				4	6
3	5				6		8	9
		3		8	9			
				6			3	4
	4	9	2	3	5	6		

Diagram 2

Uczniowie rozwiązują je bez trudu; ja nie muszę nawet podawać zasad. Okazuje się, że wszyscy już kiedyś tę łamigłówkę widzieli; ci, którzy nie pamiętają, o co chodzi, dowiadują się w parę minut od kolegów. Obok podaję rozwiązanie pierwszego zadania. Dla pewności porównujemy to rozwiązanie z rozwiązaniami uczniów. Drugiego zadania już nie muszę porównywać. To były zadania wstępne, przygotowawcze, dane uczniom tylko po to, byśmy wszyscy mieli pewność, że znamy zasady Sudoku. Teraz przychodzi czas na zadania właściwe. Oto pierwsze z nich:

7	6	9	3	5	1	4	8	2
1	2	3	8	7	4	6	9	5
8	4	5	2	6	9	3	7	1
5	8	7	4	2	6	1	3	9
4	9	2	7	1	3	8	5	6
6	3	1	9	8	5	7	2	4
2	1	6	5	3	8	9	4	7
9	7	8	1	4	2	5	6	3
3	5	4	6	9	7	2	1	8

Diagram 1a

Zadanie 1.
Wyjaśnij, dlaczego w pole oznaczone gwiazdką można wpisać jedynkę (jako pierwszą cyfrę wpisywaną do diagramu Sudoku):

	5	8	*			6	2	
			9		7			
7	1			2			4	9
		3	2		5	8		
6								1
		9	6		4	5		
3	6			9			5	4
			4		1			
	8	4				9	1	

Diagram 3

Rozwiązanie. Popatrzmy na kolumnę czwartą, zawierającą pole z gwiazdką. W polu trzecim od góry nie można wpisać jedynki, bo w trzecim wierszu już jest jedynka (w drugiej kolumnie). W polu piątym od góry nie można wpisać jedynki, bo w piątym wierszu już jest jedynka (w kolumnie dziewiątej). W polach siódmym i dziewiątym od góry nie można wpisać jedynki, bo w dolnym bloku już jest jedynka (w ósmym wierszu i szóstej kolumnie). Jedynym polem w czwartej kolumnie, w które można wpisać jedynkę, jest zatem pole z gwiazdką.

Inne rozwiązanie: Popatrzmy na blok górny. W dolnym wierszu tego bloku (czyli w wierszu trzecim) nie może stać jedynka, bo w tym wierszu już jest (w kolumnie drugiej). W prawej kolumnie tego bloku (czyli w kolumnie szóstej) nie może stać jedynka, bo w tej kolumnie już jest (w wierszu ósmym). Popatrzmy następnie na blok środkowy. W nim jedynka nie może stać w wierszu środkowym (czyli piątym), bo w tym wierszu już jest (w kolumnie dziewiątej). Zatem w bloku środkowym jedynka musi stać w kolumnie środkowej (czyli piątej). Stąd wynika, że w bloku górnym jedynka nie może stać w tej kolumnie i pozostaje tylko jedno miejsce, w które można wpisać jedynkę.

Ćwiczenie. Przeprowadź podobne rozumowanie dotyczące pierwszego wiersza (zastanów się, w które pola pierwszego wiersza nie można wpisać jedynki).

Uczniowie piszą rozwiązanie tego zadania na kartkach, które mi później oddają. Po zebraniu rozwiązań pokazuję oba moje rozwiązania; zostają one na lekcji starannie omówione. Chcę tu zwrócić uwagę na to, że rozwiązanie zadania 1 zawiera rozumowanie niewprost. Tak naprawdę pokazuję nie to, że w dane pole mam wpisać jedynkę, ale to, że w żadne inne nie mogę; pozostaje to jedno. Teraz daję drugie zadanie.

Zadanie 2

Wyjaśnij, dlaczego w pole oznaczone gwiazdką można wpisać jedynkę (jako pierwszą cyfrę wpisywaną do diagramu Sudoku):

		1		6	9			4
			3				5	1
		3						
2	4				1	7		
				9				
		5	7				2	3
						8		
9	1				6			
8			9	7		6	*	

Diagram 4

Rozwiązanie. Dwa rozwiązania dotyczące diagramu z zadania 2 naśladują pokazane wyżej rozwiązania zadania 1. W pierwszym rozwiązaniu rozważamy wiersz dziewiąty. W tym wierszu jedynka nie może stać w kolumnach drugiej i trzeciej, bo w bloku lewym dolnym już jest jedynka. Nie może stać też w kolumnach szóstej i dziewiątej, bo w tych kolumnach już są jedynki. Pozostaje tylko miejsce oznaczone gwiazdką. W drugim rozwiązaniu rozważamy blok prawy dolny i wykorzystujemy położenie jedynki w bloku dolnym (musi ona stać w górnym wierszu tego bloku). W rozwiązaniu trzecim rozważamy ósmą kolumnę i kończymy niepowodzeniem: nie umiemy wykluczyć położenia jedynki w wierszu piątym.

Jeszcze raz zbieram rozwiązania napisane przez uczniów. W domu starannie porównuję oba rozwiązania każdego ucznia. Jestem ciekaw, jak to, że pierwsze rozwiązanie zostało omówione na tablicy, wpłynęło na drugie rozwiązanie. Jest to pierwsza lekcja i już na niej dostaję istotne informacje o moich uczniach. Dowiaduję się, jak szybko chwytają oni to, czego ich uczę. To bardzo ważna informacja. Pokazuje mi ona, jak szybko będę mógł z daną klasą pracować. Następne zadania będą te pierwsze informacje o uczniach potwierdzać lub korygować.

Teraz przychodzi pora na zadania domowe. Są one tylko pozornie trudniejsze. W pierwszych dwóch zadaniach pisałem wyraźnie, jaką cyfrę można wpisać w pole oznaczone gwiazdką. Tym razem uczniowie mają sami tę cyfrę znaleźć. Trudność jest tylko pozorna. Przecież uczniowie i tak umieją Sudoku rozwiązać i zobaczą, o jaką cyfrę chodzi. A oto te zadania:

Zadania domowe.

Sprawdź, jaką cyfrę można wpisać w pola oznaczone gwiazdkami w następujących diagramach Sudoku. Wyjaśnij, dlaczego w te pola można wpisać akurat te cyfry.

7			5		8			
9	8			7			5	3
	5				4		8	6
8						3		7
	6	7	$\ast$	4	9			2
		2	7	6				8
4		5	2				3	
6				8		2		
	2		3			6	4	

Diagram 5

	9	4			5			2
2				9		1		
1	8	5	2				6	
3				8	2		9	6
					6	7	1	8
	4		9		1		3	
	$\ast$	2		5				1
		1	3					9
4						6	2	3

Diagram 6

	5			3			6	
1	2			5				9
		9		4		8		2
				7	5		8	
	6	8	1	2	3	7	$\ast$	
2			9	8			1	
		1		6	2		7	3
		2	5	9		6		
	7		3	1			2	8

Diagram 7

		1		6	9			4
			3				5	1
		3						
2	4			$\ast$	1	7		
				9				
		5	7				2	3
						8		
9	1				6			
8			9	7		6		

Diagram 8

Rozwiązania zadań domowych sprawdzam w domu i znów patrzę, jak poprzednie rozwiązania zmieniły sposób myślenia uczniów.

Oczywiście Sudoku to tylko łamigłówka. Nie wiem, czy rozwiązywanie takich łamigłówek jest matematyką, czy nie jest. W tej kwestii nie chcę wdawać się w dyskusję do niczego konstruktywnego nieprowadzącą. Uważam natomiast, że zadanie polegające na wyjaśnieniu, **dlaczego** w dane pole można wpisać daną cyfrę, już jest matematyką. Nie potrafię pewnie podać przekonujących każdego argumentów. Pozostańmy zatem tylko przy tym moim zapewnieniu.

5. Zadania tekstowe

Jak wspomniałem we wstępie, podstawowym celem nauczania matematyki w gimnazjum powinno być nauczenie uczniów prowadzenia własnych rozumowań. Na początku I klasy rozwiązuję z uczniami szereg zadań, w których wymagam od nich nie tyle zastosowania być może znanych im metod standardowych (np. układania równań, o których — jak się okazuje — słyszeli w szkole podstawowej), ale zastosowania jakichkolwiek własnych sposobów dojścia do rozwiązania. Uczniowie otrzymują zestaw kilkunastu zadań tekstowych i mają rozwiązać te zadania bez używania równań, tzn. bez użycia metod algebraicznych. Oto ten zestaw zadań.

Zadania tekstowe bez równań

1. W ogrodzie mandaryna były bażanty i króliki. Miały razem 35 głów i 94 nogi. Ile było bażantów, a ile królików?

2. Mandaryn hoduje siedmionogi i jedenastonogi. Mają one razem 35 głów i 329 nóg. Ile ma on siedmionogów i ile jedenastonogów?

3. Ile kilogramów solanki trzydziestoprocentowej i ile solanki dziesięcioprocentowej należy zmieszać, by otrzymać 10 kg solanki o stężeniu 24%?

4. Ile kilogramów solanki trzydziestoprocentowej i ile solanki dziesięcioprocentowej należy zmieszać, by otrzymać 100 kg (**lub:** 10 kg) solanki o stężeniu 19,4%?

5. Ile kilogramów solanki dwudziestoczteroprocentowej i ile solanki dziesięcioprocentowej należy zmieszać, by otrzymać 8 kg solanki dwudziestoprocentowej?

6. Grześ i jego młodszy brat Bartek zbierali kasztany. Grześ zebrał 3 razy więcej kasztanów niż jego brat. Wtedy Grześ dał bratu 15 kasztanów i teraz mają po tyle samo kasztanów. Ile kasztanów zebrał każdy z braci?

7. Grześ i jego młodszy brat Bartek zbierali kasztany. Grześ zebrał 7 razy więcej kasztanów niż jego brat. Wtedy Grześ dał bratu 6 kasztanów i teraz ma 5 razy więcej niż Bartek. Ile kasztanów zebrał każdy z braci?

8. Za pięć lat Grześ będzie 4 razy starszy niż był 4 lata temu. Ile lat ma Grześ teraz?

9. Za pięć lat Grześ będzie 5 razy starszy niż był 4 lata temu. Ile lat ma Grześ teraz?

10. Za pięć lat Grześ będzie 12 razy starszy niż był 4 lata temu. Ile lat ma Grześ teraz?

11. Trzy lata temu tata był 5 razy starszy od Grzesia. Za trzy lata będzie 3 razy starszy. Ile lat ma Grześ teraz?

12. Dziadek Grzesia ma 5 razy tyle lat, ile tata Grzesia miał wtedy, kiedy dziadek miał tyle lat, ile tata ma teraz. Dziadek i tata Grzesia mają razem 136 lat. Ile lat ma dziadek Grzesia i ile lat ma tata Grzesia?

13. Dwukrotnie byłem w cukierni. Za pierwszym razem za 2 bułeczki i jedno ciastko zapłaciłem 4,10 zł. Za drugim razem za 3 bułeczki i dwa ciastka zapłaciłem 7 zł. Ile kosztuje bułeczka, a ile ciastko?

14. Dwukrotnie byłem w cukierni. Za pierwszym razem za 4 bułeczki i 6 ciastek zapłaciłem 15 zł. Za drugim razem za 6 bułeczek i 4 ciastka zapłaciłem 14 zł. Ile kosztuje bułeczka, a ile ciastko?

15. Dwukrotnie byłem w cukierni. Za pierwszym razem za 4 bułeczki i 5 ciastek zapłaciłem 13,30 zł. Za drugim razem za 7 bułeczek i 3 ciastka zapłaciłem 13,50 zł. Ile kosztuje bułeczka, a ile ciastko?

16. Grześ wybrał się na długą wędrówkę. W jedną stronę szedł 3 godziny i 3 godziny jechał na rowerze. W drodze powrotnej godzinę jechał na rowerze i 11 godzin szedł. Ile razy szybciej jechał na rowerze niż szedł?

17. Statek płynął z prądem rzeki dwie godziny i wracał pod prąd trzy godziny. Ile razy większa była prędkość statku od prędkości rzeki?

Ten zestaw zadań wykorzystujemy kilkakrotnie:

1) na początku I klasy rozwiązujemy te zadania bez równań;
2) w drugiej połowie I semestru, gdy uczę wyrażeń algebraicznych; wtedy te zadania, ale z danymi w postaci ogólnej, rozwiązujemy jeszcze raz poznanymi metodami i wynik zapisujemy w postaci wzoru, za pomocą odpowiedniego wyrażenia algebraicznego;
3) w II semestrze I klasy rozwiązujemy te zadania za pomocą równań liniowych; na przykładzie tych zadań uczę różnych sposobów układania równań;
4) pod koniec I klasy rozwiązujemy te zadania za pomocą równań, ale z danymi w postaci ogólnej; inaczej mówiąc, układamy i rozwiązujemy równania ze współczynnikami zapisanymi w postaci ogólnej (z parametrami);
5) w II klasie rozwiązujemy te zadania za pomocą układów równań;
6) w II klasie jeszcze raz rozwiązujemy te zadania za pomocą układów równań, ale z danymi w postaci ogólnej (z parametrami).

Omówię teraz na wybranych przykładach, w jaki sposób rozwiązuję z uczniami powyższe zadania. Zacznę od zadania 1. Jest to stare chińskie zadanie, przytaczane w wielu zbiorach zadań. Standardowe rozwiązanie oczywiście polega na ułożeniu narzucającego się układu równań:

$$\begin{cases} b + k = 35, \\ 2b + 4k = 94. \end{cases}$$

Przypominam jednak, że na początku I klasy użycie równań i układów równań (nawet, jeśli uczniowie je znają) jest zakazane! Najczęstszą metodą rozwiązywania tego zadania jest metoda systematycznego przeszukiwania lub metoda prób i błędów. Uczniowie próbują kolejno wszystkich możliwości aż do znalezienia rozwiązania lub szukają tego rozwiązania za pomocą mniej lub bardziej ukierunkowanych poszukiwań. Rozwiązanie zadania którąkolwiek z tych metod, mimo iż może to budzić różne zastrzeżenia formalne (na przykład to, czy w ten sposób zostaną znalezione wszystkie rozwiązania), zaspokaja moje wymagania. Takie rozwiązanie jest bowiem wynikiem samodzielnego rozumowania ucznia, a o to mi przede wszystkich chodziło. Co ważne, pokazuję w ten sposób, że do rozwiązania zadania można dochodzić wieloma metodami; nie ma jednej, „właściwej” metody.

Na początku w nowej szkole (było tak zarówno w liceum jak i w gimnazjum) uczniowie często mnie pytają o to, czy dane zadanie będzie „wolno” na moich lekcjach rozwiązywać metodą, którą kiedyś wcześniej poznali. Chodzi mi o to, by uczniowie bardzo wcześnie zobaczyli, że „wolno”: każde zadanie wolno rozwiązywać różnymi metodami — byle poprawnymi. Jedyne ograniczenia mogą wynikać z tego, że czasem chcę nauczyć konkretnej metody i wtedy wymagam rozwiązywania zadania tą właśnie metodą (dotyczy to także klasówek, nie tylko zadań domowych i rozwiązywanych na lekcji). We wszystkich innych przypadkach liczy się tylko jedno kryterium: jest nim poprawność.

Rozwiązanie metodą systematycznego przeszukiwania może wyglądać następująco:

liczba królików	liczba bażantów	liczba nóg
0	35	70
1	34	72
2	33	74
3	32	76
4	31	78
5	30	80
6	29	82
7	28	84
8	27	86
9	26	88
10	25	90
11	24	92
12	23	94

Po znalezieniu rozwiązania uczniowie zaprzestają analizowania dalszych przypadków. Najczęściej nie jest to spowodowane tym, że są oni przekonani, iż następnych rozwiązań nie ma (bo liczby w ostatniej kolumnie rosną i nigdy już nie pojawi się w niej liczba 94). Po prostu znaleźli oni rozwiązanie. Nie przychodzi im na ogół do głowy myśl, że może być więcej rozwiązań; zadanie w ich pojęciu opisuje pewną sytuację rzeczywistą, a rzeczywistość jest konkretna, jednoznaczna. Do tego problemu powracam z uczniami później. Inne rozwiązanie może wyglądać następująco:

liczba królików	liczba bażantów	liczba nóg
0	35	70
10	25	90
20	15	110
15	20	100
13	22	96
12	23	94

Uczniowie próbują różnych danych, przybliżając się mniej lub bardziej świadomie do rozwiązania. Zdarzają się też rozwiązania całkowicie chaotyczne, w których rozwiązanie zostaje znalezione chyba rzeczywiście przypadkowo; zdarzają się też takie rozwiązania, w których chaotyczne poszukiwania nie zostają doprowadzone do końca, rozwiązanie się urywa bez jakiegokolwiek komentarza i zadanie pozostaje bez odpowiedzi.

Są uczniowie, którzy znajdują rozwiązanie dzięki rozumowaniu. Najczęściej to rozumowanie wygląda następująco: gdyby mandaryn miał tylko bażanty (byłoby ich 35), to miałyby one razem tylko 70 nóg. Ale zwierzęta mandaryna mają o 24 nogi więcej. Każdy królik ma o dwie nogi więcej od bażanta, więc mandaryn ma 12 królików. Zatem ma 23 bażanty. To rozwiązanie omawiam z uczniami dokładnie. Najczęściej „ubarwiam” je w nieco makabryczny sposób: nieostrożny ogrodnik, strzygąc trawnik, obciął każdemu królikowi dwie nogi. Teraz wszystkie zwierzęta mandaryna mają po dwie nogi, więc razem mają 70 nóg. To znaczy, że na trawniku zostały obcięte 24 nogi, a więc ogrodnik obciął je dwunastu królikom. Jak się okazuje, to makabryczne ubarwienie powoduje, że uczniowie lepiej zapamiętują rozwiązanie; mają wyraźny punkt odniesienia i łatwiej później to rozwiązanie uczniom przypomnieć. Podobny sposób rozumowania polega na rozważeniu sytuacji, w której mandaryn ma wyłącznie króliki. Wówczas 35 królików miałoby łącznie

140 nóg, to jest o 46 nóg za dużo. Każdy posiadany bażant zmniejsza łączną liczbę nóg o dwie. Stąd wynika, że mandaryn ma 23 bażanty, a więc 12 królików.

Zadanie 2 jest tylko innym wariantem zadania 1 i uczniowie najczęściej bez problemu samodzielnie znajdują podobne rozwiązanie. W przyszłości pokażę uczniom jeszcze kilka podobnych zadań; omówię je dalej. Zadanie 3, dzięki temu, że ma rozwiązanie w liczbach całkowitych, też może być łatwo rozwiązane metodą prób i błędów. Trudniej znaleźć tą metodą rozwiązanie zadania 4, a prawie niemożliwe jest rozwiązanie metodą prób i błędów zadania 5. Tu już wyższość metody rozumowania jest oczywista. Uczniowie jednak nie zauważają, że zadania 3, 4 i 5 są właściwie tylko nieistotną modyfikacją zadania 1. Popatrzmy jednak na wypisane obok siebie rozwiązania obu zadań (solankę dziesięcioprocentową nazwę solanką uboższą, trzydziestoprocentową zaś bogatszą):

Zadanie 1	Zadanie 3
Przypuśćmy, że mandaryn ma tylko 35 bażantów; mają one wtedy 70 nóg.	Przypuśćmy, że mamy tylko 10 kg solanki uboższej; jest w niej wtedy 1 kg soli.
Ale zwierzęta mandaryna mają razem 94 nogi.	Ale w 10 kg solanki 24-procentowej ma być 2,4 kg soli.
Zwierzęta mandaryna mają więc 24 nogi więcej.	Brakuje 1,4 kg soli.
Jeden królik ma o dwie nogi więcej od bażanta.	W 1 kg solanki bogatszej jest o 0,2 kg soli więcej niż w 1 kg solanki uboższej.
Mandaryn ma zatem $24 : 2 = 12$ królików.	Potrzebujemy zatem $1{,}4 : 0{,}2 = 7$ kg solanki bogatszej.
Mandaryn ma także 23 bażanty.	Potrzebujemy 3 kg solanki uboższej.

Takie porównanie rozwiązań ostatecznie przekonuje uczniów, że mamy do czynienia pięciokrotnie z tym samym zadaniem. Chcę tu zwrócić uwagę na to, że niektórzy uczniowie znajdują powyższą metodę rozwiązania samodzielnie, inni uczą się jej na przykładzie tych pięciu zadań. Uczenie się rozumowań jest oczywiście najbardziej efektywne, jeśli uczeń potrafi takie rozumowanie wymyślić samodzielnie. Najczęściej jednak tak się nie dzieje; nawet uczniowie uzdolnieni nie potrafią wielu rozumowań przeprowadzić całkowicie samodzielnie. Uczą się ich wtedy poprzez obserwację zadań tak rozwiązywanych i poprzez zapamiętywanie odpowiednich sposobów rozwiązania. Tak właśnie postępuję z uczniami na początku I klasy. Wtedy także okazuje się, którzy uczniowie potrafią szybko się takich rozumowań nauczyć; okazuje się także, którzy z nich zaczynają rozwijać się znacznie szybciej od kolegów.

Jest jeszcze jeden sposób zapisywania rozwiązania zadań tego typu. Mianowicie każde działanie, które wykonujemy, poprzedzamy pytaniem. To pytanie ma wskazywać, co w danym działaniu obliczamy. Uczniowie, którzy nauczą się zapisywać takie pytania, znacznie lepiej rozumieją całe rozwiązanie. W tej postaci zapiszę rozwiązanie jednego z następnych zadań, w których zajmę się kwestią istnienia i liczby rozwiązań. Podaję uczniom uogólnienie zadania o zwierzętach mandaryna. Tym razem mandaryn hoduje smoki: te, jak wiadomo, mają wiele głów i wiele nóg. Popatrzmy na takie zadanie i jego przykładowe rozwiązanie:

Zadanie 1 o smokach. Mandaryn hoduje smoki zielone i czerwone. Smok zielony ma 2 głowy i 9 nóg. Smok czerwony ma 3 głowy i 13 nóg. Smoki mandaryna mają razem 63 głowy i 276 nóg. Ile mandaryn ma smoków każdego gatunku?

Rozwiązanie. Na jedną głowę smoka zielonego przypada $4\frac{1}{2}$ nóg; na jedną głowę smoka czerwonego przypada $4\frac{1}{3}$ nóg. Gdyby mandaryn miał same smoki czerwone, to miałyby one razem

$$63 \cdot \frac{13}{3} = 273$$

nogi. Ale smoki mandaryna mają razem o 3 nogi więcej. Jedna głowa smoka zielonego daje nadwyżkę $\frac{1}{6}$ nogi. Takich nadwyżek mamy zatem 18; jest więc 18 głów smoków zielonych, czyli 9 całych takich smoków.
Odpowiedź. Mandaryn ma 9 zielonych i 15 czerwonych smoków.

Inaczej mówiąc, rozcinamy smoki na kawałki tak, by każdy kawałek miał jedną głowę i pewną liczbę — być może niecałkowitą — nóg. Wtedy mamy zwykłe zadanie o zwierzętach mandaryna (lub, ze względu na liczby niecałkowite, o solankach). Oczywiście musi się na końcu okazać, że odpowiedź jest liczbą całkowitą. A nieszczęście może się zdarzyć w wielu miejscach.

Zadanie 2 o smokach. Mandaryn hoduje smoki zielone i czerwone. Smok zielony ma 14 głów i 35 nóg. Smok czerwony ma 15 głów i 33 nogi. Smoki mandaryna mają razem:

a) 200 głów i 482 nogi;
b) 200 głów i 430 nóg;
c) 200 głów i 510 nóg;
d) 200 głów i 450 nóg;
e) 200 głów i 470 nóg;
f) 200 głów i 461 nóg.

Ile mandaryn ma smoków każdego gatunku?

Rozwiązanie. Tniemy smoki na kawałki. Każdy kawałek ma jedną głowę i tyle samo nóg (dla smoków jednego gatunku). Zatem jeden kawałek smoka zielonego ma 1 głowę i $\frac{35}{14} = \frac{5}{2}$ nóg; jeden kawałek smoka czerwonego ma 1 głowę i $\frac{33}{15} = \frac{11}{5}$ nóg. Zatem jeden kawałek smoka zielonego ma o $\frac{5}{2} - \frac{11}{5} = \frac{3}{10}$ nóg więcej.

a) 200 głów i 482 nogi.
Ile nóg miałoby 200 kawałków smoków czerwonych?

$$200 \cdot \frac{11}{5} = 440.$$

Ilu nóg brakowałoby wtedy?

$$482 - 440 = 42.$$

Ile jest kawałków smoków zielonych?

$$42 : \frac{3}{10} = 140.$$

Ile jest smoków zielonych?

$$140 : 14 = 10.$$

Ile jest kawałków smoków czerwonych?

$$200 - 140 = 60.$$

Ile jest smoków czerwonych?

$$60 : 15 = 4.$$

Odpowiedź. Mandaryn ma 10 smoków zielonych i 4 smoki czerwone.

b) 200 głów i 430 nóg.
Ile nóg miałoby 200 kawałków smoków czerwonych?

$$200 \cdot \tfrac{11}{5} = 440.$$

Sprzeczność. Smoki mają za mało nóg.

c) 200 głów i 515 nóg.
Ile nóg miałoby 200 kawałków smoków czerwonych?

$$200 \cdot \tfrac{11}{5} = 440.$$

Ilu nóg brakowałoby wtedy?

$$515 - 440 = 75.$$

Ile jest kawałków smoków zielonych?

$$75 : \tfrac{3}{10} = 250.$$

Sprzeczność. Smoki mają za dużo nóg.

d) 200 głów i 450 nóg.
Ile nóg miałoby 200 kawałków smoków czerwonych?

$$200 \cdot \tfrac{11}{5} = 440.$$

Ilu nóg brakowałoby wtedy?

$$450 - 440 = 10.$$

Ile jest kawałków smoków zielonych?

$$10 : \tfrac{3}{10} = 33\tfrac{1}{3}.$$

Sprzeczność. Liczba kawałków smoków zielonych nie jest całkowita.

e) 200 głów i 470 nóg.
Ile nóg miałoby 200 kawałków smoków czerwonych?

$$200 \cdot \tfrac{11}{5} = 440.$$

Ilu nóg brakowałoby wtedy?

$$470 - 440 = 30.$$

Ile jest kawałków smoków zielonych?

$$30 : \tfrac{3}{10} = 100.$$

Ile jest smoków zielonych?

$$100 : 14 = 7\tfrac{1}{7}.$$

Sprzeczność. Liczba smoków zielonych nie jest całkowita.

f) 200 głów i 461 nóg.
Ile nóg miałoby 200 kawałków smoków czerwonych?

$$200 \cdot \tfrac{11}{5} = 440.$$

Ilu nóg brakowałoby wtedy?

$$461 - 440 = 21.$$

Ile jest kawałków smoków zielonych?

$$21 : \tfrac{3}{10} = 70.$$

Ile jest smoków zielonych?

$$70 : 14 = 5.$$

Ile jest kawałków smoków czerwonych?

$$200 - 70 = 130.$$

Ile jest smoków czerwonych?

$$130 : 15 = 8\tfrac{2}{3}.$$

Sprzeczność. Liczba smoków czerwonych nie jest całkowita.

Jak widzimy, zadanie może nie mieć rozwiązania z wielu powodów. Uczniowie często dziwią się, jak to jest możliwe: przecież zadanie powinno opisywać rzeczywistość, a w niej sprzeczność nie jest możliwa. Jedno wytłumaczenie jest takie, że mandaryn w swoich obliczeniach gdzieś się pomylił. Ale, czy zadanie o smokach opisuje jakąkolwiek rzeczywistość? Może się też okazać, że dane w zadaniu są niewystarczające do podania jednoznacznej odpowiedzi. Następne zadanie ma wiele rozwiązań:

Zadanie 3 o smokach. Mandaryn hoduje smoki zielone i czerwone. Smok zielony ma 5 głów i 10 nóg. Smok czerwony ma 6 głów i 12 nóg. Smoki mandaryna mają razem 300 głów i 600 nóg. Ile mandaryn ma smoków każdego gatunku?

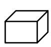
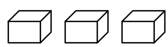
Rozwiązanie. Zadanie ma 11 rozwiązań. Oto one:

- 60 smoków zielonych, 0 smoków czerwonych,
- 54 smoki zielone, 5 smoków czerwonych,
- 48 smoków zielonych, 10 smoków czerwonych,
- 42 smoki zielone, 15 smoków czerwonych,
- 36 smoków zielonych, 20 smoków czerwonych,
- 30 smoków zielonych, 25 smoków czerwonych,
- 24 smoki zielone, 30 smoków czerwonych,
- 18 smoków zielonych, 35 smoków czerwonych,

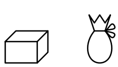
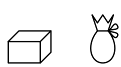
- 12 smoków zielonych, 40 smoków czerwonych,
- 6 smoków zielonych, 45 smoków czerwonych,
- 0 smoków zielonych, 50 smoków czerwonych.

Uczniowie dość szybko zauważają, że oba gatunki smoków są w zasadzie identyczne: mają po dwie nogi na jedną głowę. Ponieważ nie można ich rozróżnić, więc tak naprawdę mamy tylko jedną informację o nich, mianowicie o liczbie głów. Informacja o liczbie nóg jest dokładnie taka sama: po prostu liczba nóg jest dwa razy większa. Musimy zatem znaleźć możliwe rozwiązania tylko dla liczby głów i to jest właśnie te 11 rozwiązań. W dalszym ciągu nie będę analizował z uczniami kwestii niejednoznaczności; powrócę do niej dopiero przy okazji układów równań (układy nieoznaczone). Będziemy natomiast analizowali kwestię rozwiązalności niektórych zadań.

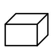
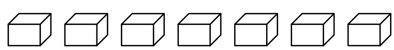
Teraz przechodzę do następnych zadań; polegają one na rozróżnieniu i wykorzystaniu dwóch pojęć: „o ile więcej” i „ile razy więcej”. W zadaniu 6 łatwo zauważamy, że Grześ zebrał **3 razy więcej** kasztanów niż Bartek i **o 30 kasztanów więcej** niż Bartek. Teraz chwili zastanowienia wymaga odpowiedź, ile kasztanów zebrał Bartek. Często uczniowie dzielą 30 przez 3, a powinni dzielić przez 2. Skoro kasztany Grzesia to 3 porcje kasztanów Bartka, więc różnica to dwie porcje kasztanów Bartka. Podobnie, gdyby Grześ zebrał **7 razy więcej kasztanów** niż Bartek i **o 120 kasztanów więcej**, to Bartek zebrałby $120 : 6 = 20$ kasztanów. Rozwiązanie tego zadania można też przedstawić graficznie. Grześ zebrał 3 razy więcej kasztanów niż Bartek; Bartek swoje kasztany włożył do pudełeczka, Grześ ma trzy takie pudełeczka kasztanów:

Kasztany Bartka	Kasztany Grzesia
	

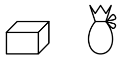
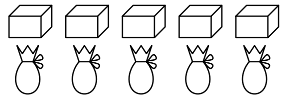
Następnie Grześ 15 swoich kasztanów przesypał do woreczka i ten woreczek dał Bartkowi. Teraz Grześ ma tyle samo kasztanów co Bartek, a więc obaj mają jedno pudełeczko i jeden woreczek:

Kasztany Bartka	Kasztany Grzesia
	

Porównując liczby pudełeczek i woreczków w obu sytuacjach, stwierdzamy, że w pudełeczku jest tyle samo kasztanów co w woreczku; zatem Bartek zebrał 15 kasztanów. Analogiczne dwa rysunki dla zadania 7 wyglądają następująco. Przed oddaniem kasztanów było tak:

Kasztany Bartka	Kasztany Grzesia
	

a po oddaniu tak:

Kasztany Bartka	Kasztany Grzesia
	

Nietrudno zauważyć, że do sześciu woreczków przesypano kasztany z dwóch pudełek; w jednym pudełku jest zatem 18 kasztanów.

Zadania 8, 9 i 10 też polegają na rozumieniu różnicy między zwrotami „o ile więcej” i „ile razy więcej”. W zadaniu 8 mamy tak naprawdę dwóch Grzesiów: Grześ młodszy (tzn. Grześ 4 lata temu) i Grześ starszy (tzn. Grześ za 5 lat). Grześ starszy jest o 9 lat starszy od Grzesia młodszego i 4 razy starszy od Grzesia młodszego. Grześ młodszy ma zatem $9 : 3 = 3$ lata; dzisiaj Grześ ma 7 lat. Zadania 11 i 12 wymagają tylko nieco bardziej złożonych rozumowań; nie będę ich tu przytaczał.

Omówię teraz krótko zadania 13, 14 i 15. W zadaniu 13 najczęściej uczniowie zauważają, o ile więcej kupiłem za drugim razem i o ile więcej zapłaciłem. Stwierdzają, że 1 bułeczka i 1 ciastko kosztują 2,90 zł, a następnie, że jedna bułeczka kosztuje 1,20 zł. Nieco bardziej skomplikowane rozumowania przeprowadzają w zadaniu 14 i bardzo często gubią się w zadaniu 15. Omawiam z nimi wtedy metodę „zrównywania” zakupów — jest to dobre wprowadzenie do rozwiązywania układów równań metodą przeciwnych współczynników. Oto rozwiązanie: zwiększam pierwszy zakup trzykrotnie i drugi pięciokrotnie:

- za 12 bułeczek i 15 ciastek zapłaciłbym 39,90 zł,
- za 35 bułeczek i 15 ciastek zapłaciłbym 67,50 zł.

Za 23 bułeczki zapłaciłbym zatem 27,60 zł, czyli za jedną 1,20 zł. Można zadać pytanie, czym ta metoda rozwiązania różni się od rozwiązania za pomocą układu równań. Otóż moim zdaniem algebra polega na wprowadzaniu symboli, które pozwalają nam oderwać się od rzeczywistości. Po wprowadzeniu symboli, nie ma znaczenia, co one oznaczały wcześniej. Metoda rozwiązywania polega na formalnym przekształcaniu wyrażeń. Taki jest zresztą cel algebry. Rozumowanie algebraiczne jest rozumowaniem formalnym, oderwanym od rzeczywistości. To samo rozumowanie może oznaczać zupełnie różne rzeczy, odnosić się do zupełnie innej treści zadania. O to chodzi w algebrze. Ułożenie równania to stworzenie matematycznego modelu rzeczywistości. Dalsze rozumowanie jest rozumowaniem wewnętrznym w matematyce i dopiero ostateczny wynik ma być zinterpretowany w rzeczywistości, którą modelowaliśmy. Metoda, którą proponuję tutaj, wiąże ucznia cały czas z rzeczywistością. To jest moim zdaniem ogromna różnica. Na razie rozmawiamy tylko o rzeczywistości, choć robimy to samo, co w przyszłości będziemy robić z symbolami. Pozwala to w przyszłości dostrzegać nie tylko formalną stronę obliczeń algebraicznych, ale też pamiętać, że za tym formalizmem kryje się rzeczywistość. W szczególności uczniowie mają większą świadomość tego, że symbole algebraiczne oznaczają coś konkretnego; liczbę czegoś, co istnieje naprawdę.

Rozwiązanie zadania 15 zapiszę jeszcze raz, tym razem zgodnie z zasadą: do każdego działania odpowiednie pytanie. Oto rozwiązanie:

Rozwiązanie. Ile zapłaciłbym za pierwszym razem za 12 bułeczek i 15 ciastek?

$$3 \cdot 13{,}30 = 39{,}90.$$

Ile zapłaciłbym za drugim razem za 35 bułeczek i 15 ciastek?

$$5 \cdot 13{,}50 = 67{,}50.$$

O ile bułeczek więcej bym kupił?

$$35 - 12 = 23.$$

O ile więcej bym zapłacił?

$$67{,}50 - 39{,}90 = 27{,}60.$$

Ile kosztuje jedna bułeczka?

$$27{,}60 : 23 = 1{,}20.$$

Ile kosztują 4 bułeczki?

$$4 \cdot 1{,}20 = 4{,}80.$$

Ile kosztuje 5 ciastek?

$$13{,}30 - 4{,}80 = 8{,}50.$$

Ile kosztuje jedno ciastko?

$$8{,}50 : 5 = 1{,}70.$$

Odpowiedź: Jedna bułeczka kosztuje 1,20 zł, a jedno ciastko 1,70 zł.

Tak zapisywano rozwiązania podobnych zadań w czasach, gdy ja chodziłem do szkoły podstawowej. Wówczas, w siedmioletniej szkole podstawowej, nie uczono algebry. Oznaczenia literowe, wyrażenia algebraiczne i równania pojawiały się dopiero w klasie VIII, tzn. w pierwszej klasie liceum. A jednak zadania tekstowe rozwiązywaliśmy. Metoda, którą nazwałem metodą „zrównywania” zakupów, była powszechnie stosowana do podobnych zadań tekstowych. Tak też chcę, by umieli je rozwiązać moi uczniowie w I klasie gimnazjum. Widać, że algebra nie jest do tego potrzebna. Okazuje się przy tym, że uczniowie, którzy taki sposób rozwiązywania zadań opanują, nie mają potem trudności z układaniem i rozwiązywaniem (a zwłaszcza układaniem) równań i układów równań. Być może i tak nie mieliby trudności, ale tego nie wiem. Moje doświadczenie pokazuje, że czas „stracony” na uczenie rozwiązywania zadań bez użycia algebry „zwraca się” przy uczeniu układania równań, a więc rozwiązywaniu zadań z użyciem algebry. Rozwiązywanie zadań bez algebry uczy bowiem lepszego zrozumienia tekstu matematycznego, wynajdywania w nim istotnych informacji i zapisywania ich później w sposób sformalizowany.

Interesujące są dwa ostatnie zadania. Uczniowie rozwiązujący je algebraicznie wprowadzają w naturalny sposób dwie niewiadome (oznaczające dwie prędkości: pieszo i na rowerze w zadaniu 16 oraz statku i prądu rzeki w zadaniu 17) i umieją ułożyć tylko jedno równanie. Niemożność ułożenia drugiego równania powoduje, że wielu z nich rezygnuje z dalszego rozwiązania tego zadania. Chodzi jednak o to, że w zadaniach tych nie proszę o obliczenie obu prędkości, ale tylko o obliczenie stosunku prędkości. Do tego, jak się okazuje, jedno równanie wystarczy. Ale najpierw rozwiążemy te zadania bez równań.

W zadaniu 16 zapiszmy drogę Grzesia w obie strony (p oznacza godzinę drogi pieszo, r godzinę drogi na rowerze). Przyjmijmy, że w drodze „tam” Grześ najpierw szedł, a potem jechał na rowerze, a w drodze powrotnej (czytanej od prawej strony do lewej) najpierw jechał na rowerze, a potem szedł pieszo:

tam:	p	p	p							r	r	r
z powrotem:	p	p	p	p	p	p	p	p	p	p	p	r

Zauważmy, że tę samą odległość, którą Grześ szedł w drodze powrotnej 8 godzin, w drodze „tam” przejechał na rowerze w dwie godziny. Zatem jechał cztery razy szybciej niż szedł.

W zadaniu 17 spróbujmy zapisać drogę statku z prądem i pod prąd. Litera s oznacza drogę statku przez godzinę, p drogę, jaką przebywa rzeka przez godzinę. Przyjmijmy jednak, że statek płynie na stojącej wodzie, za każdym razem w tym samym kierunku. Drogę z prądem przedstawimy jako dwie godzinne drogi statku (czyli s) i cudowne przesunięcie o dwie drogi p w kierunku ruchu statku. Odpowiada ono temu, że prąd rzeki „pomógł” statkowi przesunąć się o ten dystans dwóch p. Drogę pod prąd przedstawimy jako najpierw drogę dwóch s, potem jeszcze jednego s i wreszcie cudowne przesunięcie o trzykrotne p w kierunku przeciwnym do ruchu statku. Tym razem bowiem prąd przeciwdziałał staraniom statku i cofnął go aż trzy razy (bo podróż pod prąd trwała 3 godziny). Mamy wtedy w pierwszej linijce dwie drogi s i dwa cudowne przesunięcia w tę samą stronę o p, w drugiej linijce mamy trzykrotne przesunięcie o s, a w trzeciej cudowne cofnięcie o trzy p. Obie podróże muszą się skończyć w tym samym miejscu; dlatego w drugiej linijce zapisaliśmy trzecie s za trzema p w trzeciej linijce. Można to odczytać tak: przepływamy dwa s, potem cofamy się o trzy p i jeszcze trzeci raz przepływamy godzinną drogę s.

z prądem:	s	s	p	p				
pod prąd:	s	s						s
cofnięcie:					p	p	p	

Widzimy teraz, że jedna droga s jest równa pięciu cudownym przesunięciom p (równoważy dwa cudowne przesunięcia do przodu i trzy do tyłu), a więc statek płynie 5 razy szybciej od prądu rzeki.

Po raz drugi rozwiązujemy zadania tekstowe w postaci ogólnej. Chodzi teraz o to, by sytuację rzeczywistą, wyrażoną w treści zadania, opisać za pomocą wyrażenia algebraicznego. Uczniowie znają już sposób dochodzenia do rozwiązania zadania. Teraz ich celem jest zapisanie tego rozwiązania za pomocą wyrażenia algebraicznego; wynikiem ma być wzór na rozwiązanie zadania. Chodzi o to, by powtarzając całe rozumowanie, tworzyli coraz to nowe wyrażenia opisujące kolejne wielkości obliczane w zadaniu. Na tym tak naprawdę polega algebra: rozumowanie, które umiemy przeprowadzić na konkretnych liczbach, zapisujemy w postaci ogólnej, za pomocą liter.

Mamy wtedy następujący zestaw sześciu zadań; przypominam, że w zestawie oryginalnym niektóre zadania się powtarzały, różniły się tylko danymi. Nieco upraszczam zadania o zbieraniu kasztanów i opuszczam trudniejsze zadania dotyczące wieku (zadanie 11 i 12). Opuszczam także zadanie o drodze pieszo i jeździe na rowerze, pozostawiając tylko zadanie o statku płynącym z prądem i pod prąd. Jeśli rozwiązania tych zadań okażą się bardzo łatwe dla uczniów, to oczywiście mogę dodać opuszczone zadania; mogę dodać także zadanie o smokach.

Zadania tekstowe — wzory ogólne

1. Mandaryn hodował k-nogi i m-nogi (gdzie $k < m$). Jego zwierzątka miały razem g głów i n nóg. Ile miał zwierząt każdego gatunku?
2. Grześ zmieszał dwie solanki: p-procentową i q-procentową (gdzie $p < q$). Otrzymał w ten sposób m kg solanki r-procentowej (gdzie $p < r < q$). Ile każdej solanki miał Grześ?
3. Grześ zebrał m razy więcej kasztanów niż Bartek i stwierdził, że ma o n kasztanów więcej. Ile kasztanów zebrał każdy z chłopców?
4. Za m lat Grześ będzie k razy starszy niż był n lat temu. Ile lat ma Grześ teraz?
5. Za a bułeczek i b ciastek zapłaciłem m zł. Za c bułeczek i d ciastek zapłaciłem n zł. Ile kosztuje bułeczka, a ile ciastko?
6. Statek płynął z prądem m godzin, a pod prąd n godzin. Ile razy szybciej płynął statek od prądu rzeki?

Zaczynamy od wspólnego rozwiązania zadań o zwierzętach hodowanych przez mandaryna i mieszaniu solanek. Solankę p-procentową nazywamy solanką uboższą, a solankę q-procentową nazywamy solanką bogatszą (z założenia mamy bowiem $p < q$).

Zadanie 1	Zadanie 2
Przypuśćmy, że mandaryn hoduje tylko k-nogi; jest ich g, mają one wtedy kg nóg.	Przypuśćmy, że Grześ wziął tylko m kg solanki uboższej. Ma ona wtedy $\frac{p}{100} \cdot m$ kg soli.
Ale zwierzęta mandaryna mają razem n nóg.	Ale w m kg solanki r-procentowej ma być $\frac{r}{100} \cdot m$ kg soli.
Zwierzęta mandaryna mają więc $n - kg$ nóg więcej.	Grzesiowi brakuje $\frac{r}{100} \cdot m - \frac{p}{100} \cdot m$ kg soli.
Jeden m-nóg ma o $m - k$ nóg więcej od k-noga.	W 1 kg solanki bogatszej znajduje się o $\frac{q}{100} - \frac{p}{100}$ kg soli więcej niż w 1 kg solanki uboższej.
Mandaryn ma zatem $\frac{n-kg}{m-k}$ m-nogów.	Grześ potrzebuje $\frac{\frac{r}{100} \cdot m - \frac{p}{100} \cdot m}{\frac{q}{100} - \frac{p}{100}}$ kg solanki bogatszej.
Mandaryn ma także $g - \frac{n-kg}{m-k}$ k-nogów.	Grześ potrzebuje $m - \frac{\frac{r}{100} \cdot m - \frac{p}{100} \cdot m}{\frac{q}{100} - \frac{p}{100}}$ kg solanki uboższej.

Ułamki w rozwiązaniu zadania 2 mogą wyglądać dość przerażająco. Biorą się one z metody rozwiązywania zadań na procenty, której uczę. Mimo niedogodności w zapisie, jest ona bardzo skuteczna. Mówię uczniom, że obliczanie procentu jakiejś liczby jest to mnożenie. Dokładniej: to, że liczba b jest równa p procent liczby a, zapisujemy w postaci $b = \frac{p}{100} \cdot a$. Z tego wzoru otrzymujemy wzory na rozwiązania trzech podstawowych typów zadań na procenty. Mianowicie mamy:

1) Oblicz p procent liczby a. Rozwiązaniem jest liczba $b = \frac{p}{100} \cdot a$.
2) Ile procent liczby a stanowi liczba b? Rozwiązaniem jest liczba $p = \frac{100b}{a}$.
3) Oblicz liczbę, której p procent jest równe b. Rozwiązaniem jest liczba $a = \frac{100b}{p}$.

Następnie trzeba zapamiętać, że zwiększenie o p procent, to mnożenie przez liczbę $1+\frac{p}{100}$ (czyli przez ułamek $\frac{100+p}{100}$), a zmniejszenie o p procent, to mnożenie przez liczbę $1-\frac{p}{100}$ (czyli przez ułamek $\frac{100-p}{100}$). Uświadomienie sobie tego, że obliczenie procentu jest mnożeniem przez ułamek, usuwa wątpliwości, które uczniowie miewają przy rozwiązywaniu zadań podobnych do następującego:

Zadanie. Dwie pary butów kosztowały tyle samo. Pierwsza para najpierw zdrożała o 10%, a potem o 20%, druga najpierw zdrożała o 20%, a potem o 10%. Które buty kosztowały więcej po tych dwóch podwyżkach cen?

Ponieważ mnożenie przez liczby $\frac{110}{100}$ i $\frac{120}{100}$ jest przemienne, więc po podwyżkach obie pary butów kosztują tyle samo. Bez zrozumienia tego, czym naprawdę jest obliczanie procentu, uczniowie wielokrotnie wdawali się w rozważania, czy otrzymamy więcej, gdy obliczymy mniejszy procent od większej liczby, czy większy procent od mniejszej; klasa dzieliła się na ogół na dwie mniej więcej równoliczne grupy zwolenników każdego z tych dwóch poglądów. Natomiast prawie nigdy nie było zwolenników trzeciego poglądu, że ceny będą równe. Wydaje się, że występowanie w otrzymywanych wzorach ułamków o mianowniku 100 jest niewielką ceną, jaką płacimy za sprawność w rozwiązywaniu zadań na procenty.

W zadaniu na procenty można pozbyć się ułamków, mnożąc licznik i mianownik przez 100, a także można uniknąć takich ułamków od początku, jeśli zmienimy jednostki i masę solanki będziemy wyrażać nadal w kilogramach, a masę soli w dekagramach. Mamy wtedy takie rozwiązania:

Zadanie 1	Zadanie 2
Przypuśćmy, że mandaryn hoduje tylko k-nogi; jest ich g, mają one wtedy kg nóg.	Przypuśćmy, że Grześ wziął tylko m kg solanki uboższej; ma ona wtedy pm dag soli.
Ale zwierzęta mandaryna mają razem n nóg.	Ale w m kg solanki r-procentowej ma być rm dag soli.
Zwierzęta mandaryna mają więc $n-kg$ nóg więcej.	Grzesiowi brakuje $rm-pm$ dag soli.
Jeden m-nóg ma o $m-k$ nóg więcej od k-noga.	W 1 kg solanki bogatszej jest o $q-p$ dag soli więcej niż w 1 kg solanki uboższej.
Mandaryn ma zatem $\frac{n-kg}{m-k}$ m-nogów.	Grześ potrzebuje $\frac{rm-pm}{q-p}$ kg solanki bogatszej.
Mandaryn ma także $g-\frac{n-kg}{m-k}$ k-nogów.	Grześ potrzebuje $m-\frac{rm-pm}{q-p}$ kg solanki uboższej.

W zadaniu 3 mamy od razu odpowiedź: Bartek zebrał $\frac{n}{m-1}$ kasztanów. Pamiętamy bowiem, że liczba kasztanów Grzesia, to porcje Bartka i jeszcze $m-1$ takich porcji, składających się na nadwyżkę n kasztanów. Oczywiście Grześ zebrał $m \cdot \frac{n}{m-1}$ kasztanów.

W zadaniu 4 rozważamy dwóch Grzesiów: Grześ młodszy to Grześ n lat temu, Grześ starszy to Grześ za m lat. Grześ starszy jest starszy od Grzesia młodszego k razy i jest starszy o $m+n$ lat. Tak jak w zadaniu poprzednim, Grześ młodszy ma $\frac{m+n}{k-1}$ lat, a więc obecnie Grześ ma $n + \frac{m+n}{k-1}$ lat.

W rozwiązaniu zadania 5 wykorzystamy metodę „zrównywania” zakupów. Zacznijmy jednak od krótkiej analizy danych, wyprzedzając tym samym nieco tok rozumowania. Analizą danych zajmę się bowiem po rozwiązaniu wszystkich sześciu zadań. Przyjmiemy najpierw, że wszystkie liczby a, b, c i d są różne od zera (a nawet są dodatnie). Uczniowie zwracają uwagę, że powinny też być całkowite; jednak ja próbuję oponować — twierdzę, że można zupełnie dobrze wyobrazić sobie kupno połowy bułeczki czy połowy ciastka. Teraz zrównajmy zakup ciastek. Pierwszy zakup powtórzę d razy, drugi b razy. Wówczas:

- za ad bułeczek i bd ciastek zapłaciłem dm złotych;
- za bc bułeczek i bd ciastek zapłaciłem bn złotych.

Teraz widzimy, że za każdym razem kupiliśmy tyle samo ciastek. Powstaje jednak problem: co od czego odjąć? Gdy dane były konkretnymi liczbami, odejmowaliśmy od większej liczby mniejszą. Widać też było, że jeśli kupiliśmy tyle samo ciastek, ale więcej bułeczek, to zapłaciliśmy więcej. A czy tu jest tak samo? Czy dane zostały dobrane dobrze: jeśli ad jest większe od bc, to czy dm jest większe od bn? A co by to znaczyło, gdyby było na odwrót? Bardzo mnie cieszy, gdy uczniowie sami stawiają takie pytania; jeśli nawet tak się nie stanie, to ja prowokuję rozmowę na ten temat. To bardzo ważne, by uczniowie dobrze zrozumieli, co się dzieje. W szczególności ważne jest, by dobrze zastanowili się nad przypadkiem, gdy $ad = bc$. Sami dobierają takie czwórki liczb, by zachodziła równość $ad = bc$ i rozwiązują zadanie na tych konkretnych danych. Widzą, co się dzieje: dane są proporcjonalne, a więc tak naprawdę dwukrotnie dostajemy tę samą informację o cenach. A do rozwiązania zadania potrzebne są dwa różne, niezależne zestawy danych.

Takie dyskusje są niemożliwe w przypadku rozwiązania algebraicznego. Algebra polega na tym, że zrywa więź między rzeczywistością a obliczeniami. Jak już pisałem, takie same równania czy układy równań mają pasować do wielu zadań, obliczenia będą natomiast takie same. Dopiero po zakończeniu rozwiązania można (czy raczej trzeba) zastanowić się nad tym, czy otrzymane rozwiązanie odpowiada rzeczywistości. Dyskusje, które uczniowie tu prowadzą, są bardzo cenne: pomagają one lepiej zrozumieć sens równań, które w przyszłości do tych zadań zostaną ułożone. Bardzo ważne też jest dla mnie to, by uczniowie na początku nauki w gimnazjum jak najczęściej byli zmuszani do samodzielnych rozumowań, wypowiadania wniosków, dociekania, co się dzieje i jaki jest sens tego, co nam wyszło. Odkrycie, że jest wszystko jedno, co od czego się odejmie, nie jest łatwe, a jest bardzo cenne. Zrozumienie, że jeśli za 7 bułeczek zapłacę 14 zł, to bułeczka kosztuje 2 zł, jest trywialne; zrozumienie, że jeśli za -7 bułeczek zapłacę -14 zł (i co to wszystko ma znaczyć), to nadal bułeczka kosztuje 2 zł, jest znacznie trudniejsze. A co to znaczy, że kupiłem więcej bułeczek, ale mniej zapłaciłem?

Po zrozumieniu wszystkich takich subtelności, w szczególności po zrozumieniu, że nie ma znaczenia, co od czego odejmujemy, otrzymujemy wzór. Bułeczka kosztuje $\frac{dm-bn}{ad-bc}$ złotych. Cenę ciasteczka obliczamy podobnie. Wzory te warto zapamiętać.

W zadaniu 6 uczniowie bardzo szybko zauważają, że $n-m$ prędkości statku jest równoważne $n+m$ cudownym przesunięciom (m przesunięć z prądem i n przesunięć pod prąd). Zatem statek płynie $\frac{m+n}{n-m}$ razy szybciej niż prąd rzeki. Zdarza się jednak, że uczniowie tylko dostrzegają ten wzór i nie potrafią go uzasadnić. Zdarza się też, że dostrzegają wzór ogólny po kilku próbach rozwiązania zadania z różnymi danymi: wyciągają wniosek ogólny z różnych danych. Takie rozumowania też bardzo cenię, ale jednak chciałbym, by zrozumieli zadanie do końca. Robię im na tablicy diagramy, zaznaczając liczbę przepłynięć godzinnych i cudownych przesunięć (używając liter m i n). Z takiego rysunku widać, że liczby przepłynięć się odejmują, a liczby cudownych przesunięć dodają.

W zadaniach z danymi w postaci ogólnej rozważamy także warunki rozwiązalności, pamiętając o trudnościach, z jakimi zetknęliśmy się przy okazji zadań o smokach. Popatrzmy na taką analizę danych w zadaniu 1.

Zadanie 1	Warunki rozwiązalności
Przypuśćmy, że mandaryn hoduje tylko k-nogi; jest ich g, mają one wtedy kg nóg.	
Ale zwierzęta mandaryna mają razem n nóg.	
Zwierzęta mandaryna mają więc $n-kg$ nóg więcej.	Musi być $n \geq kg$.
Jeden m-nóg ma o $m-k$ nóg więcej od k-noga.	W założeniach zadania mieliśmy $k < m$.
Mandaryn ma zatem $\frac{n-kg}{m-k}$ m-nogów.	Liczba całkowita $n-kg$ musi być podzielna przez liczbę całkowitą $m-k$.
Mandaryn ma także $g-\frac{n-kg}{m-k}$ k-nogów.	Musi być $g \geq \frac{n-kg}{m-k}$.

O warunkach rozwiązalności zadania 5 pisałem wyżej. Powrócimy do nich w II klasie, omawiając dokładniej warunki rozwiązalności układu dwóch równań liniowych z dwiema niewiadomymi.

Następnym razem omawiamy zadania tekstowe przy nauce równań liniowych. Rozwiązywanie równań jest czynnością dość rutynową. Uczę, co to są równania równoważne (mają te same rozwiązania) i w jaki sposób z jednego równania możemy otrzymać równanie równoważne:

1) po każdej stronie równania możemy wykonać działania, w tym redukcję wyrazów podobnych;
2) do obu stron równania możemy dodać tę samą liczbę (pamiętajmy, że niewiadoma, a także każde wszędzie określone wyrażenie algebraiczne przedstawia liczbę);
3) obie strony równania możemy pomnożyć przez tę samą liczbę różną od zera (pamiętajmy, że np. x jest liczbą, ale nie wiemy, czy nie jest przypadkiem równa zeru; nie wolno zatem mnożyć równania przez x lub $\frac{1}{x}$).

Zwracam uwagę, że odejmowanie jest dodawaniem liczby przeciwnej, a dzielenie jest mnożeniem przez liczbę odwrotną. Wynika z tego, że czynności 2) i 3) obejmują również odejmowanie i dzielenie. Nie dowodzę, że te czynności prowadzą rzeczywiście do równań równoważnych. Rozwiązanie z uczniami kilkunastu przykładowych równań w zasadzie wystarczy i następne równania rozwiązują oni bez problemu. Ważne jest natomiast układanie równań. Na przykładzie zadania 15 pokazuję, że do wielu zadań możemy ułożyć wiele równań.

Po pierwsze, możemy na dwa sposoby wybrać niewiadomą. Po drugie, w różnej kolejności możemy wykorzystać dwie informacje o cenach: z pierwszego i drugiego zakupu. Popatrzmy na przykład. Możemy ułożyć 6 różnych równań do tego zadania.

Równanie 1.

$$\begin{aligned}
x &= \text{cena jednej bułeczki (w złotych)},\\
4x &= \text{cena czterech bułeczek},\\
13{,}30 - 4x &= \text{cena pięciu ciastek},\\
\frac{13{,}30 - 4x}{5} &= \text{cena jednego ciastka}.
\end{aligned}$$

Równanie ma postać

$$7x + 3 \cdot \frac{13{,}30 - 4x}{5} = 13{,}50.$$

Równanie 2.

$$\begin{aligned}
x &= \text{cena jednej bułeczki (w złotych)},\\
7x &= \text{cena siedmiu bułeczek},\\
13{,}50 - 7x &= \text{cena trzech ciastek},\\
\frac{13{,}50 - 7x}{3} &= \text{cena jednego ciastka}.
\end{aligned}$$

Równanie ma postać

$$4x + 5 \cdot \frac{13{,}50 - 7x}{3} = 13{,}30.$$

Równanie 3.

$$\begin{aligned}
x &= \text{cena jednej bułeczki (w złotych)},\\
4x &= \text{cena czterech bułeczek},\\
13{,}30 - 4x &= \text{cena pięciu ciastek},\\
\frac{13{,}30 - 4x}{5} &= \text{cena jednego ciastka},\\
7x &= \text{cena siedmiu bułeczek},\\
13{,}50 - 7x &= \text{cena trzech ciastek},\\
\frac{13{,}50 - 7x}{3} &= \text{cena jednego ciastka}.
\end{aligned}$$

Równanie ma postać

$$\frac{13{,}30 - 4x}{5} = \frac{13{,}50 - 7x}{3}.$$

Zauważmy, że w każdym równaniu niewiadoma x była ceną jednej bułeczki. Zawsze wymagam od uczniów, by wyraźnie napisali na początku, w jaki sposób wybierają jednostkę.

Gdyby niewiadoma x wyrażała cenę bułeczki w groszach, to równania wyglądałyby inaczej, np. zamiast 13,30 mielibyśmy 1330. Ponadto wymagam zawsze od uczniów, by w opisie niewiadomych wyraźnie pisali, że są one liczbami; niewiadoma x nie jest zatem bułeczką, ale ceną bułeczki. Moim zdaniem nie jest to przesadna dokładność. Uważam, że matematyka powinna uczyć wyrażania się precyzyjnie, choć precyzyjnie nie znaczy formalnie. Możemy zamiast symboliki logicznej używać języka naturalnego, ale nie powinniśmy używać (czy nadużywać) żargonu. Należy jednak pamiętać o tym, że nawet poprawne rozumienie niektórych zwrotów języka naturalnego jest różne od tak samo brzmiących ścisłych wyrażeń matematycznych. Tą kwestią zajmę się w innym miejscu.

Zauważmy, że pierwsze dwa równania różnią się kolejnością wykorzystywania informacji: w pierwszym cenę jednego ciastka wyznaczamy z pierwszej informacji (tzn. informacji o pierwszym zakupie), a druga informacja daje nam równanie; w drugim cenę jednego ciastka wyznaczamy z drugiej informacji, a równanie tworzymy z pierwszej. Wreszcie trzecie równanie otrzymujemy wyznaczając dwoma sposobami (korzystając z obu informacji) cenę jednego ciastka i przyrównując otrzymane wyrażenia. W podobny sposób możemy ułożyć 3 równania, w których niewiadoma x będzie oznaczać cenę jednego ciastka (także w złotych lub groszach). Napisanie tych równań pozostawiam jako łatwe ćwiczenie.

Wymagam od uczniów, by do każdego zadania umieli napisać w taki sposób po kilka równań. Zazwyczaj robię dwie klasówki z równań liniowych. Pierwsza polega na rozwiązywaniu równań. Uczniowie dostają na niej kilka równań do rozwiązania. W jednym z tych równań wymagam od uczniów dokładnego zapisania słowami, co w każdym kroku robią (np. „do obu stron równania dodaję $2x$" czy „obie strony równania dzielę przez 17"), w następnych pozwalam na opuszczanie takich komentarzy lub (jeśli rzeczywiście im to pomaga) zapisywanie ich w sposób skrótowy (z pionową kreską na prawo od równania). Wyniki pierwszej klasówki są na ogół dobre już za pierwszym razem; drugą zaś z reguły muszę powtórzyć. Jednak na ogół uczniowie, którzy dobrze nauczyli się rozwiązywać zadania bez równań, potrafią bez kłopotu odnaleźć w tekście potrzebne informacje i umieją skorzystać z nich w odpowiedniej kolejności. Nie mają kłopotu z rozróżnianiem tych informacji i rozumieją dobrze, co to znaczy, że możemy je wykorzystać w tej czy innej kolejności. Tu widzę zasadniczą korzyść z takiej właśnie kolejności nauczania.

Układamy również równania (a także je rozwiązujemy) do zadań w postaci ogólnej. Zróbmy to w przypadku zadania 1 o k-nogach i m-nogach hodowanych przez mandaryna. Ułożymy jedno równanie, w którym niewiadomą będzie liczba m-nogów. Po rozwiązaniu równania będziemy mogli porównać wynik z wynikiem otrzymanym wcześniej bez pomocy równań.

$$
\begin{aligned}
x &= \text{liczba } m\text{-nogów}, \\
g - x &= \text{liczba } k\text{-nogów}, \\
mx &= \text{liczba nóg } m\text{-nogów}, \\
k(g - x) &= \text{liczba nóg } k\text{-nogów}.
\end{aligned}
$$

Otrzymujemy równanie

$$mx + k(g - x) = n.$$

Przekształcamy to równanie w sposób równoważny (nie będę zapisywał, jakie czynności wykonujemy; na ogół w tej fazie nauczania nie jest to już potrzebne uczniom):

$$mx + kg - kx = n,$$

$$mx - kx = n - kg,$$
$$(m - k)x = n - kg,$$
$$x = \frac{n - kg}{m - k}.$$

Oczywiście w ostatnim kroku $m - k \neq 0$, gdyż w założeniach zadania mieliśmy $k < m$. Podobnie rozwiązujemy inne równania; pozostawiam to tutaj jako ćwiczenie.

Do zadań tych dwóch zestawów powracamy przy okazji uczenia układów równań. Uczenie układania równań z dwiema niewiadomymi jest już bardzo proste; uczniowie od razu widzą, jakie niewiadome przyjąć i jak każdą informację w zadaniu przekształcić w równanie. Nie ma przy tym znaczenia, czy zadanie miało dane liczbowe, czy zapisane było w postaci ogólnej. Podobnie jest z rozwiązywaniem takich układów równań. Oczywiście kłopot może sprawić dyskusja rozwiązalności w przypadku ogólnym. Czasami, po wyprowadzeniu wzorów na rozwiązanie ogólne układu równań liniowych z dwiema niewiadomymi, wprowadzam pojęcie wyznacznika 2×2 i zapisuję rozwiązanie za pomocą wyznaczników. Wówczas dyskusja rozwiązalności jest bardzo prosta. Decyzję o tym, czy tak zrobić w danej klasie, podejmuję na podstawie dotychczasowych postępów uczniów. W klasie, w której operacje formalne nie sprawiają już uczniom kłopotu, pozwalam sobie na to.

Na zakończenie chciałbym podsumować argumenty, które skłoniły mnie do takiej kolejności nauczania i które nadal przekonują mnie o słuszności tej decyzji.

1. Jak wspomniałem wcześniej, widzę trzy podstawowe powody, dla których uczymy matematyki w szkole (a przynajmniej, dla których ja uczę matematyki). Są to:

- Matematyka jest użyteczna.
- Matematyka porządkuje nasz sposób myślenia.
- Matematyka jest piękna.

Użyteczność matematyki wymaga uczenia tego, co później może się przydać. Naturalne jest oczekiwanie, by uczyć zatem metod ostatecznych, najlepszych, najdoskonalszych, najlepiej prowadzących do rozwiązania. Bardzo często są to metody schematyczne, algorytmiczne. W wielu przypadkach zostały nawet tak skomputeryzowane, że wiele zadań możemy z pomocą komputera rozwiązać niemal bezmyślnie. W szkole uczenie takich metod stoi jednak w sprzeczności z powodem drugim. Porządkowanie myślenia wymaga bowiem między innymi tego, by uczeń nie tyle podążał za wyuczonym schematem, ale by rozumiał problem i rozumiał, dlaczego rozwiązuje się go w taki właśnie sposób.

Musimy zatem uczyć wielu schematów i musimy pokazywać, skąd one się wzięły. Wielokrotnie musimy zatem przebyć z uczniami drogę, na której nie znajdziemy wprawdzie przydatnych później metod rozwiązywania problemów, ale której przebycie wzbogaci sposób myślenia ucznia, pomoże mu dostrzec istotę problemu, pomoże też zrozumieć metody, których będziemy go uczyć później. Znana jest zasada: „droga jest celem". Na tej właśnie drodze stoją, moim zdaniem, rozwiązania zadań bez równań.

W szkole potrzebne są te schematy, będące przecież wynikiem trwającego całe tysiąclecia rozwoju matematyki, w tym przez matematyków znacznie od nas wybitniejszych (Newton, Euler, Gauss, Lebesgue, Hilbert i inni). Ale potrzebne są też zwykłe ćwiczenia umysłu, takie gamy, preludia i etiudy dla naszych szarych komórek. Zadania, o których tu pisałem, są właśnie takimi ćwiczeniami. A bez gam i etiud nigdy nie zagramy koncertu z orkiestrą.

2. Chcę rozwinąć tu myśl o tym, że wielokrotnie niewskazane dydaktycznie jest uczenie sposobów najlepszych, doskonałych. Potrzebne jest odpowiednie wprowadzenie do wielu z nich. Nie będziemy rozwiązywać z uczniami zadań optymalizacyjnych za pomocą rachunku różniczkowego, zanim nie pokażemy zadania optymalizacyjnego rozwiązywanego elementarnie (minimum funkcji kwadratowej, najkrótsza droga w geometrii). Nie będę badał z uczniami monotoniczności funkcji za pomocą pochodnych, zanim nie pokażę wprost z definicji, gdzie funkcja kwadratowa jest rosnąca i gdzie jest malejąca. Nie będę stosował twierdzenia cosinusów, zanim nie pokażę uczniom, że w przypadku wielu trójkątów (np. z kątami $30°$, $45°$ czy $60°$) potrafię obliczyć długość trzeciego boku trójkąta bezpośrednio z twierdzenia Pitagorasa. Nie będę wyprowadzać wzoru na rozwiązania równania kwadratowego, zanim nie rozwiążę z uczniami kilku równań metodą uzupełniania do kwadratu. Nie wszyscy nauczyciele podzielają te poglądy. Wielu uważa uczenie rzeczy „niepotrzebnych” za stratę czasu; przechodzą oni jak najszybciej do rozwiązania ostatecznego; nierzadko przechodzą do matematyki „wyższej”, zanim uczeń odpowiednio zrozumiał matematykę elementarną.

Dla mnie rozwiązywanie bez równań zadań tekstowych nie jest rzeczą „niepotrzebną”. Uczeń uczy się odczytywania tekstu matematycznego, wyszukiwania w nim potrzebnych informacji, dostrzegania związków między wielkościami występującymi w tym tekście i tak dalej. To wszystko będzie mu potrzebne w przyszłości, chociażby wtedy, gdy będzie układał równania do tych zadań.

3. Porządkowanie myślenia ucznia oznacza w szczególności to, że pozwala się jemu rozwijać własne sposoby myślenia, poddawać je krytycznej analizie i doskonalić je. Każde rozwiązanie zadania tekstowego metodą nieschematyczną jest wynikiem indywidualnego podejścia ucznia do zadania. Znalezienie rozwiązania jest zawsze wynikiem jakiegoś **samodzielnego rozumowania** ucznia. Chcę, nawet w sposób sztuczny, stwarzać okazje zmuszające ucznia do samodzielnego rozumowania. Uczniowie na ogół znajdują kilka sposobów rozwiązania zadania. W ten sposób uczą się na przykładzie własnym i swoich kolegów, że każde zadanie może być rozwiązane wieloma sposobami i wielokrotnie te różne sposoby są poprawne.

Porządkowanie myślenia polega też na umiejętności odróżniania rozumowania poprawnego od błędnego. Uczniowie dowiadują się, że wyłącznie poprawność matematyczna jest podstawą do zaakceptowania rozwiązania. Bardzo często uczniowie, którzy pewne zadania widzieli już w szkole podstawowej i teraz widzą je ponownie, rozwiązane przez nauczyciela inaczej, pytają, czy na klasówce **wolno** będzie rozwiązać zadanie sposobem innym niż pokazany teraz. Zmiana nastawienia ucznia trwa nierzadko bardzo długo; nazywam ją „odtruciem ucznia”. Uczeń musi kiedyś przekonać się, że każde zadanie może być rozwiązane wieloma sposobami i musi nauczyć się odróżniać rozwiązanie poprawne od niepoprawnego. Wreszcie, jak wspomniałem, musi przyjąć do wiadomości, że o zaakceptowaniu rozwiązania decyduje jego poprawność, a nie to, jakie rozwiązanie było pokazane przez nauczyciela na tablicy.

Naturalnie pojawiająca się metoda „prób i błędów” staje się właśnie takim innym sposobem rozwiązania zadania. Jednocześnie prowokuje ona do dyskusji o poprawności rozwiązania. W szczególności po raz pierwszy pojawia się naturalne pytanie o to, czy zadanie ma tylko jedno rozwiązanie. Przy metodzie algebraicznej rozwiązanie jest wynikiem jednoznacznych obliczeń i nie widać miejsca na pytanie o to, czy jest to jedyne rozwiązanie. Taka wątpliwość pojawia się naturalnie wtedy, gdy metodą prób i błędów zostało znalezione jedno rozwiązanie i pytamy o to, czy mogą istnieć inne rozwiązania i czy należy kontynuować poszukiwania ich.

4. Rozwiązania algebraiczne uczą postępowania według wyuczonych schematów. Przedwczesna i nadmierna algebraizacja szkolnego programu matematyki doprowadziła do tego, że uczniowie na lekcjach matematyki myślą coraz rzadziej, zastępując myślenie wkuwaniem gotowych schematów postępowania, a właściwie gotowych schematów obliczeń.

5. Warto przypomnieć tutaj nieco już zapomnianą dawną prawdę dydaktyczną: lepiej rozwiązać jedno zadanie wieloma sposobami niż wiele zadań tym samym sposobem lub wiele zadań, z których każde jednym, właściwym dla niego, sposobem.

6. Rozwiązania metodami nietypowymi, opisowymi, wymagają od ucznia napisania wielu komentarzy. Uczniowie przychodzący do gimnazjum ze szkoły podstawowej często są przyzwyczajeni tylko do zapisywania wykonywanych obliczeń, bez słowa wyjaśnienia. Wprowadzono nawet specjalną symbolikę pozwalającą usunąć komentarz słowny z tekstu matematycznego. Na przykład pionowa kreska na prawo od równania algebraicznego, po której jest napisane na przykład $+2x$, oznacza: „do obu stron równania dodajemy $2x$”. W rozwiązaniach niealgebraicznych często taki komentarz jest niezbędny i uczniowie na początku nie wiedzą, jak go zapisać. Pamiętam zdumienie mojego ucznia, który z niedowierzaniem dopytywał: czy ja to wszystko mam zapisać **słowami**? To, że w rozwiązaniu zadania matematycznego będą nie tylko obliczenia, ale także opis słowny tego, co uczeń robi, nie mieści mu się w głowie. A przecież niedługo taki słowny zapis rozwiązania będzie konieczny; na przykład wtedy, gdy ten uczeń zacznie rozwiązywać zadania geometryczne na dowodzenie. Chcę uczyć, jak zapisuje się przeprowadzone rozumowanie. Zaczynam już w gimnazjum, zdając sobie sprawę z tego, że będzie to trwać bardzo długo. Ale nie chciałbym, by moi uczniowie, tak jak nawet niektórzy moi magistranci, nie umieli napisać poprawnie po polsku tego, co właśnie udowodnili.

6. Algebra

W tym rozdziale chcę zająć się wyrażeniami algebraicznymi. Algebra — jak się powszechnie uważa — to nauka o równaniach. Oczywiście nie można temu zaprzeczyć. Równania są na pewno centralnym punktem algebry i one stanowią motywację dla wszystkiego, co później algebrą było nazywane. Ale należy pamiętać również o tym, że algebra to także pewien sposób patrzenia na matematykę, sposób, w którym odrywamy się od konkretnych liczb i rozumowania dotyczące liczb zastępujemy rozważaniami ogólnymi. Wprowadzamy litery oznaczające liczby, a później zajmujemy się strukturami, które wywodzą się od struktur liczbowych.

W tym rozdziale w zasadzie nie będę zajmował się równaniami. O równaniach pierwszego stopnia pisałem w rozdziale o zadaniach tekstowych. Tam też wspomniałem o układach równań. Tu dodam tylko, że w zasadzie wszystko, czego uczę o równaniach, można znaleźć w dowolnym podręczniku gimnazjalnym. Tu natomiast chcę zająć się wyrażeniami algebraicznymi. Chcę rozszerzyć to, co pisałem w rozdziale o zadaniach tekstowych: pokażę więcej przykładów tworzenia wyrażeń i opisywania za ich pomocą zależności matematycznych. Chcę wspomnieć o tym, w jaki sposób uczę czynności rutynowych: działań na wyrażeniach. W szczególności chcę podkreślić, że uważam za ważne uczenie rozkładania wyrażeń na czynniki. Wiele miejsca poświęcę wzorom skróconego mnożenia i zastosowaniom tych wzorów. Rozdział ten zakończę omówieniem chyba najważniejszego zastosowania: użycia wzorów skróconego mnożenia do dowodzenia nierówności.

Tworzenie wzorów

Pokazywałem już, w jaki sposób za pomocą wyrażeń algebraicznych opisuję przebieg rozwiązania (bezpośredniego, bez równań) zadania tekstowego, a także w jaki sposób układamy równania do zadań z danymi w postaci ogólnej i jak takie równania rozwiązujemy — otrzymując w efekcie wzór ogólny na rozwiązanie. Teraz chcę pokazać kilka zadań prostszych, które na ogół rozwiązuję z uczniami wcześniej. Pierwsze dotyczy tzw. ułamków prostych.

Ułamek prosty to ułamek o liczniku równym 1. Takie ułamki były używane w starożytnym Egipcie; stąd często nazywamy je ułamkami egipskimi. Egipcjanie zapisywali inne ułamki w postaci sum ułamków prostych o **różnych** mianownikach. Tego dotyczy nasze pierwsze zadanie.

1. Liczbę $\frac{2}{13}$ przedstaw w postaci sumy ułamków o liczniku 1 i różnych mianownikach.

Rozwiązanie można znaleźć dość łatwo:

$$\frac{2}{13} = \frac{1}{7} + \frac{1}{91}.$$

Jednak wielu uczniów tego rozkładu nie znajduje. Zadanie daję uczniom na samym początku roku szkolnego, zazwyczaj w pierwszym zestawie zadań domowych. Uczniowie nie widzą żadnej metody, w szkole podstawowej nie rozwiązywano z nimi żadnego zadania podobnego typu. Nieliczni uczniowie decydują się na zgadywanie, tzn. na metodę prób i błędów. Ale dla wielu uczniów ten sposób myślenia jest nie do przyjęcia.

Kiedyś jedna z moich uczennic (zresztą bardzo dobra uczennica, w II klasie była finalistką OMG) zapytała mnie wprost, dlaczego ja namawiam uczniów do zgadywania. Przecież w szkole podstawowej uczono ją, że zgadywanie nie jest metodą rozwiązywania zadań matematycznych. W zadaniu do rozwiązania należy dojść poprzez obliczenia (lub rozumowania) prowadzące od danych do wyniku: od tego, co na początku rozwiązania jest zapisane jako „dane” do tego, co jest zapisane jako „szukane”. A rozwiązania odgadnięte nie były uznawane.

Matematyka, w odróżnieniu od rutynowych rachunków, polega przede wszystkim na odgadnięciach i tego właśnie musimy naszych uczniów nauczyć. Jeśli rozwiązanie nie wymaga żadnego odgadnięcia, to znaczy, że nie wymagało od ucznia myślenia. Polegało tylko na przypomnieniu sobie, jak takie zadanie było rozwiązane w klasie i powtórzeniu ciągu czynności już raz wykonanych. Jeśli rozwiązanie ma w jakimkolwiek momencie odbiegać od wyuczonego schematu, to znaczy, że uczeń musi wymyślić (a nazywając rzecz po imieniu: odgadnąć), co, w którym miejscu i jak należy zmienić. Odgadnięcie jest najważniejszym elementem rozumowania matematycznego. W tym zadaniu uczymy bardzo prostych odgadnięć.

Większość uczniów, jak wspomniałem, nie potrafi rozwiązać tego zadania. Wtedy, nie pokazując rozwiązania znalezionego przez tych nielicznych pozostałych, daję uczniom wskazówkę: spróbujcie rozwiązać najpierw kilka prostszych zadań:

2. Spróbuj odgadnąć, jak liczby $\frac{2}{3}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{2}{7}$, $\frac{2}{9}$, $\frac{2}{11}$ można przedstawić w postaci sumy ułamków o liczniku 1 i różnych mianownikach. Zobacz, czy widzisz jakąś wspólną regułę i zastosuj ją do kilku następnych ułamków tej postaci.

Teraz już wielu uczniów znajduje rozwiązanie:

$$\frac{2}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6},$$
$$\frac{2}{5} = \frac{1}{3} + \frac{1}{15},$$
$$\frac{2}{7} = \frac{1}{4} + \frac{1}{28},$$
$$\frac{2}{9} = \frac{1}{5} + \frac{1}{45}$$

i tak dalej. Teraz już widzą, że

$$\frac{2}{13} = \frac{1}{7} + \frac{1}{7 \cdot 13} = \frac{1}{7} + \frac{1}{91},$$

a także, że

$$\frac{2}{29} = \frac{1}{15} + \frac{1}{15 \cdot 29} = \frac{1}{15} + \frac{1}{435}.$$

Pierwsze przykłady były odgadnięte, następne są wynikiem rozumowania opartego na wynikach odgadnięć. Niektórzy uczniowie mają trudności wynikające z innego odgadnięcia. Na przykład mamy dwa różne rozkłady

$$\frac{2}{9} = \frac{1}{5} + \frac{1}{45} = \frac{1}{6} + \frac{1}{18}.$$

Ten drugi rozkład powstał z rozkładu

$$\frac{2}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6}$$

przez podzielenie obu stron przez 3. To oczywiście utrudnia znalezienie rozwiązania ogólnego, ale wielu uczniów radzi sobie nawet z takimi trudnościami.

W pierwszych tygodniach nauki na tym poprzestaję. Wracam do tego zadania, gdy zaczynamy zajmować się wyrażeniami algebraicznymi. Wtedy zapisujemy rozwiązanie ogólne na przykład w postaci

$$\frac{2}{2n-1} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n(2n-1)}$$

dla $n \geq 1$.

Interesujące są wyniki klasówki. Często daję zadanie:

3. Liczbę $\frac{3}{13}$ przedstaw w postaci sumy **trzech** ułamków o liczniku 1 i różnych mianownikach.

Chyba najprostsze rozwiązanie polega na skorzystaniu ze znanego rozwiązania poprzedniego zadania:

$$\frac{3}{13} = \frac{1}{7} + \frac{1}{13} + \frac{1}{91}.$$

Zdumiewające jest, jak wielu uczniów tego rozwiązania nie znajduje.

Uczniowie często pytają mnie, czy każdy ułamek daje się w ten sposób przedstawić. Mówię im, że tak i nawet pokazuję metodę (czasami nazywaną algorytmem Fibonacciego) dobrą dla ułamków właściwych: od danego ułamka odejmij największy ułamek prosty mniejszy od niego, potem od różnicy odejmij największy ułamek prosty mniejszy od niej i tak dalej. To działa, chociaż oczywiście nie dowodzę tego w klasie.

Tu jednak pokażę dowód. Weźmy ułamek nieskracalny $\frac{a}{b}$ taki, że $1 < a < b$. Podzielmy b przez a z resztą: $b = am + r$, gdzie $0 < r < a$. Niech następnie $n = m + 1$. Mamy wówczas:

$$\frac{a}{b} - \frac{1}{n} = \frac{an-b}{bn} = \frac{am+a-b}{bn} = \frac{a-(b-am)}{bn} = \frac{a-r}{bn}.$$

Ponieważ $0 < r < a$, więc $0 < a - r < a$. Zatem licznik otrzymanego ułamka jest mniejszy od licznika naszego danego ułamka. Po pierwszym odjęciu zmniejszył się licznik, po następnym zmniejszy się jeszcze bardziej i tak dalej. Możemy wykonać tylko skończenie wiele takich odejmowań i w końcu dostaniemy ułamek prosty.

Warto zobaczyć na kilku przykładach, jak ten algorytm działa:

$$\frac{3}{7} = \frac{1}{3} + \frac{1}{11} + \frac{1}{231},$$
$$\frac{3}{13} = \frac{1}{5} + \frac{1}{33} + \frac{1}{2145}.$$

Ale czasem odejmowanie kończy się szybciej:

$$\frac{3}{5} = \frac{1}{2} + \frac{1}{10},$$
$$\frac{3}{11} = \frac{1}{4} + \frac{1}{44}.$$

Inne zadanie związane z zapisywaniem wzorów także polega na odgadnięciu. Oto ono:

4. Liczby znajdujące się w prawej kolumnie są wartościami pewnego wyrażenia algebraicznego, w którym n jest numerem kolejnej liczby (ten numer znajduje się w lewej kolumnie):

1	2
2	5
3	10
4	17
5	26
6	37
7	50
8	65
9	82

Nietrudno zauważyć, że wyrażeniem algebraicznym opisującym liczby w prawej kolumnie może być $n^2 + 1$ (nie jest to jedyne takie wyrażenie!). Spróbuj znaleźć wyrażenie algebraiczne opisujące liczby w prawej kolumnie następującej tabelki:

1	3
2	8
3	15
4	24
5	35
6	48
7	63
8	80
9	99

Czasami takie zadanie poprzedzam zadaniem, w którym proszę o dopisanie kilku następnych wyrazów ciągu, zgodnie z odgadniętą regułą tworzenia ciągu. Na przykład podaję ciągi:

$$1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, \ldots$$
$$1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55, \ldots$$
$$2, 6, 12, 20, 30, 42, 56, 72, 90, 110, \ldots$$
$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, \ldots$$

Pierwszy ciąg, to oczywiście ciąg kwadratów i uczniowie zapisują go wzorem nawet zanim zaczniemy lekcje o wyrażeniach algebraicznych. Interesujące jest porównanie drugiego i trzeciego ciągu. W drugim ciągu (tzw. liczb trójkątnych) uczniowie łatwo znajdują regułę (kolejne różnice są równe $2, 3, 4, 5, \ldots$), choć na ogół nie znajdują wzoru. W trzecim ciągu (podwojonych liczb drugiego ciągu) część uczniów znajduje wzór $n(n+1)$, podczas gdy inni znajdują regułę: kolejne różnice są kolejnymi liczbami parzystymi $4, 6, 8, 10, \ldots$. Wreszcie w ciągu Fibonacciego niektórzy uczniowie dostrzegają regułę, a zaskakujący wzór ogólny poznają w liceum na kółku olimpijskim lub na studiach.

Uczniowie na ogół szybko znajdują wzór $n^2 - 1$, a po rozwiązaniu kilku prostych zadań tego typu znajdują również wzór $\frac{n(n-1)}{2}$ lub $\frac{n^2-n}{2}$ w zadaniu następującym:

5. W tabelce 1 liczby znajdujące się w prawej kolumnie są wartościami pewnego wyrażenia algebraicznego, w którym n jest numerem kolejnej liczby (ten numer znajduje się w lewej kolumnie). Nietrudno zauważyć, że wyrażeniem algebraicznym opisującym liczby w prawej kolumnie może być n^2+1 (nie jest to jedyne takie wyrażenie!). Spróbuj znaleźć wyrażenie algebraiczne opisujące liczby w prawej kolumnie tabelki 2:

tabelka 1

1	2
2	5
3	10
4	17
5	26
6	37
7	50
8	65
9	82

tabelka 2

1	0
2	1
3	3
4	6
5	10
6	15
7	21
8	28
9	36

Czynności rutynowe

Po nauce zapisywania i odgadywania wzorów przystępujemy do działań na wyrażeniach algebraicznych. Tu ograniczę się tylko do kilku uwag. Zestawy zadań algebraicznych zostaną dołączone do poradnika w postaci pliku w formacie pdf; kilka przykładowych zadań podaję dalej.

Wielu uczniom pomaga zapisywanie sum algebraicznych rzeczywiście w postaci sumy; na przykład, zamiast

$$5ab-3a^2c-2abc+4bc-3bc^2$$

piszą

$$5ab+(-3)a^2c+(-2)abc+4bc+(-3)bc^2.$$

Przy odejmowaniu sum algebraicznych najpierw zmieniamy znaki wewnątrz nawiasów, a potem dodajemy:

$$\begin{aligned}(a+b-2c)-(3a+b-4c) &= \big(a+b+(-2)c\big)-\big(3a+b+(-4)c\big)=\\ &= \big(a+b+(-2)c\big)+\big((-3)a+(-1)b+4c\big)=\\ &= a+b+(-2)c+(-3)a+(-1)b+4c=\\ &= a+b-2c-3a-b+4c=\\ &= -2a+2c.\end{aligned}$$

Podobną sztuczkę stosuję przy mnożeniu przez jednomiany. Zamiast

$$a(2a+b)-b(3a-2ab+b)+b(ab-b^2)-ab(ab-a^2)$$

piszemy

$$a(2a+b)+(-b)\big(3a+(-2)ab+b\big)+b\big(ab+(-1)b^2\big)+(-ab)\big(ab+(-1)a^2\big).$$

Potem mnożymy każdą sumę w nawiasach przez odpowiedni jednomian i otrzymane wielomiany dodajemy. To zmniejsza początkowo liczbę błędów przy działaniach na wielomianach (sumach algebraicznych). Wreszcie uczniowie dostają ode mnie kilka dużych zestawów zadań na mnożenie wielomianów. Zaczynamy od mnożenia, po którym nie następuje redukcja wyrazów podobnych. W takich przykładach można łatwo prześledzić kolejność działań i sprawdzić, czy nie ma błędów. Przy okazji za każdym razem zastanawiamy się, ile składników ma mieć iloczyn; to się bardzo przyda później. Potem uczniowie mnożą takie sumy, w których wystąpi redukcja wyrazów podobnych. Wreszcie ostatnie przykłady to mnożenie wielomianów wyższych stopni (na przykład 4, 5 lub 6) z jedną zmienną. Uczniowie dość szybko nabierają wprawy i po kilku tygodniach na klasówce (na której daję około 10 mnożeń, w tym kilka przykładów mnożenia wielomianów stopni 3, 4 lub 5), bezbłędnie rozwiązują prawie wszystkie przykłady (zdecydowana większość klasy robi nie więcej niż 1 błąd). Wtedy przechodzimy do rozkładania na czynniki.

W tym miejscu chcę napisać parę uwag na temat biegłości rachunkowej. Uważam ją za bardzo ważny element wykształcenia matematycznego. W przyszłości nasi uczniowie będą musieli umieć przeprowadzić nawet bardzo długie obliczenia. Jeszcze w trakcie przygotowania do Olimpiady Matematycznej w liceum namawiam uczniów do nauczenia się geometrii analitycznej tak, by mogli dowodzić twierdzenia metodą analityczną (wprowadzenie do takich metod zamieszczam w rozdziale o funkcjach). Rozwiązanie zadania geometrycznego metodą analityczną nierzadko zajmuje kilka stron; są to obliczenia nie na konkretnych liczbach, ale na wyrażeniach algebraicznych. Mianowicie, współrzędne punktów na ogół nie są konkretnymi liczbami, ale mają postać ogólną, np. (a, b). Obliczenia te muszą być przeprowadzone bezbłędnie; na ogół nie widać źródeł ewentualnych błędów i rozwiązanie błędne trudno poprawić. Na studiach takich obliczeń jest więcej, zwłaszcza na studiach technicznych (warto tu sobie przypomnieć szukanie ekstremów za pomocą mnożników Lagrange'a).

Daję moim uczniom w I klasie kilkanaście zadań rachunkowych (nazywam je „tasiemcami"); przykładowym takim zadaniem jest:

6. Oblicz: $$\frac{\left(\left(\frac{1}{6}+0{,}1+\frac{1}{15}\right):\left(\frac{1}{6}+0{,}1-\frac{1}{15}\right)\right)\cdot 2{,}52}{\left(\left(0{,}5-\frac{1}{3}+0{,}25-\frac{1}{5}\right):\left(0{,}25-\frac{1}{6}\right)\right)\cdot\frac{7}{13}}$$

Takie zadania biorę ze znakomitego rosyjskiego zbioru zadań [Skanavi]. Wymagania wobec uczniów dotyczące rozwiązywania „tasiemców" są proste: uczniowie mają najpierw rozwiązać pierwsze cztery zadania. Jeśli uczeń rozwiąże wszystkie bezbłędnie (sprawdzam tylko wyniki, prawdopodobieństwo uzyskania poprawnego wyniku mimo błędów rachunkowych jest bliskie zeru), to ma temat zaliczony. W przeciwnym przypadku za każde zadanie rozwiązane błędnie rozwiązuje dwa następne. Uczniowie bardzo szybko rozumieją, że naprawdę opłaca się niezwykle dokładnie sprawdzić wszystkie obliczenia. Zresztą doradzam im, jak rozwiązywać takie zadania: wykonywać kolejne działania oddzielnie, nie przepisując całego wyrażenia. Bardzo wiele błędów bierze się bowiem z niepotrzebnego przepisywania. Kolejne obliczenia mogą więc wyglądać następująco:

$$\frac{1}{6}+0{,}1+\frac{1}{15}=\frac{5}{30}+\frac{3}{30}+\frac{2}{30}=\frac{10}{30}=\frac{1}{3},$$
$$\frac{1}{6}+0{,}1-\frac{1}{15}=\frac{5}{30}+\frac{3}{30}-\frac{2}{30}=\frac{6}{30}=\frac{1}{5},$$
$$\frac{1}{3}:\frac{1}{5}=\frac{1}{3}\cdot\frac{5}{1}=\frac{5}{3},$$
$$\frac{5}{3}\cdot 2{,}52=\frac{5}{3}\cdot\frac{252}{100}=\frac{84}{20}=\frac{21}{5},$$
$$0{,}5-\frac{1}{3}+0{,}25-\frac{1}{5}=\frac{30}{60}-\frac{20}{60}+\frac{15}{60}-\frac{12}{60}=\frac{13}{60},$$

$$0{,}25 - \frac{1}{6} = \frac{3}{12} - \frac{2}{12} = \frac{1}{12},$$
$$\frac{13}{60} : \frac{1}{12} = \frac{13}{60} \cdot \frac{12}{1} = \frac{13}{5},$$
$$\frac{13}{5} \cdot \frac{7}{13} = \frac{7}{5},$$
$$\frac{21}{5} : \frac{7}{5} = \frac{21}{5} \cdot \frac{5}{7} = \frac{21}{7} = 3.$$

Zauważmy, że wszystkie liczby w tych obliczeniach zostały zamienione na ułamki zwykłe, czasem niewłaściwe. To polecam moim uczniom: obliczenia wykonujcie na ułamkach zwykłych, nie przejmując się tym, że niektóre będą niewłaściwe. Wymuszana przez wielu nauczycieli zamiana ułamków zwykłych na liczby mieszane jest wielokrotnie przyczyną różnych błędów rachunkowych. Zamiana na ułamki dziesiętne prowadzi natomiast do obliczeń przybliżonych. Ale powróćmy do zasadniczego tematu. Uczniowie rozwiązują „tasiemce" do skutku (najczęściej pierwsze cztery z jednym lub dwoma błędami; w następnej serii znów mają jeden lub dwa błędy, a w trzeciej lub czwartej kolejce błędów już nie ma). Z reguły zestaw 15 tasiemców wystarcza; w zbiorze zadań jest ich zresztą więcej.

W przypadku wyrażeń algebraicznych już nie stosuję tak drastycznych metod, jednak daję uczniom zestawy wielu zadań i sprawdzam wyniki. Robię dwie klasówki: jedną bez mnożenia wyrażeń algebraicznych, drugą — dużo później — poświęconą wyłącznie mnożeniu wyrażeń. Przed każdą klasówką robię również dwie lub trzy kartkówki — tak, by pokazać uczniom, czego mogą się spodziewać na klasówce. Przed każdą klasówką daję również uczniom zestaw przygotowawczy, zawierający zadania podobne do tych, które będą na klasówce. Jak wspomniałem wyżej, wyniki klasówek są już na ogół zadowalające. A teraz obiecanych kilka przykładów zadań. Najpierw działania wstępne, jeszcze bez mnożenia wyrażeń algebraicznych. Załączam przykładowy zestaw przygotowawczy do klasówki.

Wyrażenia algebraiczne — przygotowanie do klasówki

7. Wykonaj mnożenie jednomianów i zapisz wynik w postaci uporządkowanej:

a) $(-2a^3b^2c)^3 \cdot (-3a^2b^5c^2)^2$,
b) $(-2abbaacbaacbc)^4 \cdot (-5aabcbccabbacaabcbbc)^3$.

8. Dokonaj redukcji wyrazów podobnych:

a) $3x^3 - 5x^2 + 2x + 4x^3 - 5 + 2x - 4x^2 + 5x^3 - 7x - 14 + 3x$,
b) $3a^2b - 5ab^2 - 3aba + 6aab - 4abba + 12bab - 4baa + 3aabb$.

9. Wykonaj działania na następujących sumach algebraicznych:

$$a = 2x + 1,$$
$$b = 3x - 2,$$
$$c = x + 4,$$
$$d = x^2 - x + 1,$$
$$e = 2 - x - x^2.$$

a) $a - \Big(b - \big(c - (d - e)\big)\Big)$,
b) $\big((a - b) - (c - d)\big) + e$.

10. Wykonaj działania:

a) $-2(2x-3+x^2)+3x(2x-1-x^2)-5(x^3-2x-3)+3x^2(3-2x)$,
b) $2x(3a-4b)-a(2x-y)+3b(2y-x)-2y(-a+4b)$.

Następnie zestaw kilkunastu przykładów na mnożenie, wybranych z zestawów, które daję uczniom.

11. Wykonaj mnożenie wyrażeń algebraicznych:

a) $(2a-5b)(3c+d)$
b) $(5x-y)(3z+2t)$
c) $(2x+1)(3x-1)$
d) $(3a-b)(2a+b)$
e) $(x+3)(x^2-2)$
f) $(x-5)(x^2+2x)$
g) $(x-1)(2x^2+3x-5)$
h) $(x+2)(x^2-x-1)$
i) $(x^2-2x-3)(x^2+4x-1)$
j) $(x^2+x+1)(x^2-3x-2)$
k) $(x+1)(x+2)(x+3)$
l) $(a+b)(a-2b)(3a-b)$
m) $(x+2y-z)(2x+3y-5z)$
n) $(3x-y+z)(2x+y+2z)$
o) $(2x^2-x+3)(x^3-3x^2-2x+5)$
p) $(x^4+2x^3-3x^2+5x-3)(x^3-3x^2+x-2)$

A oto odpowiedzi do ostatniego zadania:

11. Wykonaj mnożenie wyrażeń algebraicznych:

a) $(2a-5b)(3c+d)$ $\quad 2ac+2ad-15bc-5bd$
b) $(5x-y)(3z+2t)$ $\quad 15xz+10xt-3yz-2yt$
c) $(2x+1)(3x-1)$ $\quad 6x^2+x-1$
d) $(3a-b)(2a+b)$ $\quad 6a^2+ab-b^2$
e) $(x+3)(x^2-2)$ $\quad x^3+3x^2-2x-6$
f) $(x-5)(x^2+2x)$ $\quad x^3-3x^2-10x$
g) $(x-1)(2x^2+3x-5)$ $\quad 2x^3+x^2-8x+5$
h) $(x+2)(x^2-x-1)$ $\quad x^3+x^2-3x-2$
i) $(x^2-2x-3)(x^2+4x-1)$ $\quad x^4+2x^3-12x^2-10x+3$
j) $(x^2+x+1)(x^2-3x-2)$ $\quad x^4-2x^3-4x^2-5x-2$
k) $(x+1)(x+2)(x+3)$ $\quad x^3+6x^2+11x+6$
l) $(a+b)(a-2b)(3a-b)$ $\quad 3a^3-4a^2b-5ab^2+2b^3$
m) $(x+2y-z)(2x+3y-5z)$ $\quad 2x^2+6y^2+5z^2+7xy-13yz-7zx$
n) $(3x-y+z)(2x+y+2z)$ $\quad 6x^2-y^2+2z^2+xy-yz+8zx$
o) $(2x^2-x+3)(x^3-3x^2-2x+5)$ $\quad 2x^5-7x^4+2x^3+3x^2-11x+15$
p) $(x^4+2x^3-3x^2+5x-3)(x^3-3x^2+x-2)$
$x^7-x^6-8x^5+14x^4-25x^3+20x^2-13x+6$

Rozkładanie na czynniki

Uczniowie dobrze rozumieją, po co uczą się mnożenia wyrażeń algebraicznych. Jest to po prostu wykonanie działań zapisanych w zadaniu. Ale czynność odwrotna? Po co komu takie „cofanie się”? Zaczynam od tego, że pokazuję uczniom zalety postaci iloczynowej.

Pierwsze korzyści widzimy już przy rozkładaniu liczb naturalnych na czynniki. Ułamek $\frac{2876}{4453}$ umiemy skrócić, jeśli umiemy rozłożyć na czynniki licznik i mianownik:

$$\frac{2867}{4453} = \frac{47 \cdot 61}{73 \cdot 61} = \frac{47}{73}.$$

W tym przypadku nie musimy trudzić się szukaniem rozkładu (co jest dość czasochłonne), bo mamy prosty sposób: algorytm Euklidesa. Ale widzimy zaletę rozkładu na czynniki. Inny przykład: ile dzielników ma liczba 72? Rozłóżmy ją na czynniki pierwsze:

$$72 = 8 \cdot 9 = 2^3 \cdot 3^2.$$

Wszystkie dzielniki liczby 72 muszą mieć w swoich rozkładach na czynniki pierwsze co najwyżej liczby 2 i 3; z tym, że nie mogą mieć więcej niż 3 dwójki i nie więcej niż 2 trójki. A więc są to liczby postaci

$$2^k \cdot 3^l,$$

gdzie $0 \leq k \leq 3$ oraz $0 \leq l \leq 2$. Takie liczby możemy wypisać w tabelce:

$$\begin{array}{ccc}
2^0 \cdot 3^0 & 2^0 \cdot 3^1 & 2^0 \cdot 3^2 \\
2^1 \cdot 3^0 & 2^1 \cdot 3^1 & 2^1 \cdot 3^2 \\
2^2 \cdot 3^0 & 2^2 \cdot 3^1 & 2^2 \cdot 3^2 \\
2^3 \cdot 3^0 & 2^3 \cdot 3^1 & 2^3 \cdot 3^2
\end{array}$$

Widzimy więc, że liczba 72 ma 12 dzielników. Ogólnie, liczba n postaci $n = p^k \cdot q^l$ (gdzie p i q są liczbami pierwszymi) ma $(k+1)(l+1)$ dzielników. Jeszcze ogólniej, jeśli

$$n = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot \ldots \cdot p_m^{k_m},$$

to liczba n ma

$$(k_1 + 1) \cdot (k_2 + 1) \cdot \ldots \cdot (k_m + 1)$$

dzielników. Na przykład liczba $60 = 2^2 \cdot 3^1 \cdot 5^1$ ma

$$(2 + 1) \cdot (1 + 1) \cdot (1 + 1) = 12$$

dzielników. A liczba $45000 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^4$ ma $4 \cdot 3 \cdot 5 = 60$ dzielników. Tu zalety rozkładu na czynniki są wyraźne. Przejdźmy do wyrażeń algebraicznych.

Nietrudno obliczyć, że

$$(x - 1)(x - 2)(x - 3) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6.$$

Równanie

$$(x - 1)(x - 2)(x - 3) = 0$$

ma oczywiste rozwiązania: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ i $x_3 = 3$. Wynika to oczywiście z tego, że iloczyn jest równy 0 wtedy i tylko wtedy, gdy któryś czynnik jest równy 0. Natomiast równanie

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$$

nie ma tak oczywistych rozwiązań. Oczywiście my już umiemy je rozwiązać, bo znamy rozkład na czynniki. Ale jeśli nie znamy takiego rozkładu na czynniki, to rozwiązanie równania może być niebanalne.

Będziemy zatem uczyć się rozkładania na czynniki; w gimnazjum oczywiście możemy spodziewać się tylko dość prostych przykładów. Zaczynamy od wyłączania wspólnego czynnika poza nawias, potem stosujemy proste grupowanie, by wreszcie przejść do przykładów trudniejszych (w tym z wykorzystaniem wzorów skróconego mnożenia). Popatrzmy na kilka zadań.

12. Wyłącz wspólny czynnik poza nawias:

a) $5ax + 3ay$
b) $25abx^2 - 35a^2cx + 85ab^2x^3$
c) $2(a + b)^2 + 2b(a - b) + a^2$
d) $2x(x - 3) + 3x(3 - x)$
e) $5(a + x)(b - y)^2 + 3(a + x)^2(b - y)$
f) $a(a + b + c) + b(a + b + c) - c(a + b + c)$
g) $(2x + 3y)(x - y) - (3x - 4y)(x - y)$
h) $(3x - 5y)(2x - 7y) - (4x + y)(7y - 2x)$

13. Rozłóż następujące wyrażenia algebraiczne na czynniki:

a) $ab - cd - ad + bc$
b) $x^2y^2 - 1 - y^2 + x^2$
c) $ax^2 - ax + bx^2 - bx$
d) $4x^3 - 4xy^2 - 6x^2 + 6y^2$
e) $ab - cd^2 - ad^2 + bc$
f) $35ac - 91ad - 55bc + 143bd$
g) $x^3 - 3x^2 + 3x - 9$
h) $20pm - 15qn + 12qm - 25pn$

14. Rozłóż następujące wyrażenia na czynniki:

a) $ax - by + az + bz - ay + bx$
b) $mx - my + nx - ny + px - py$
c) $2a^2 - a + 2ab - b - 2ac + c$
d) $px^2 + qx + q^2y + pqxy + p^2qx + pq^2$
e) $qx^2 + pqy - pxy - py^2 + pqx + qxy$
f) $2qz - 2qy + pz + px + 2qx - py$

15. Rozłóż następujące wyrażenia na czynniki:

a) $a^2 + ab - ac - 6b^2 + 2bc$
b) $a^2 - 2b^2 + ab - ac - 2bc$
c) $2ab - 2ac + 3b^2 + c^2 - 4bc$
d) $2x^2 + 5xy - xz + 3y^2 - yz$
e) $-z^2 - x^2 + zy - xy + 2zx$
f) $2a^2 + 3b^2 - 7ab + 3ac - 9bc$
g) $-4x^2y + 2xy^2 + 2x^2 - y^2 + xy$
h) $4yz + 5xy - 2y^2 + 2xz + 3x^2$

Zadanie 12 polega na wyłączaniu wspólnego czynnika. W pierwszym przykładzie oczywiście wspólnym czynnikiem jest a. W trzecim przykładzie wspólny czynnik zobaczymy po wykonaniu działań, a w czwartym możemy albo wykonać działania i wyłączyć x, albo od razu dostrzec ten czynnik, albo wreszcie dostrzec czynnik $(x-3)$. Zwłaszcza na tę trzecią możliwość trzeba zwrócić uwagę. Dalsze przykłady mają utwierdzić ucznia w tym, że wspólny czynnik nie musi być jednomianem; może być bardziej złożoną sumą algebraiczną.

Zadanie 13 polega na grupowaniu. Mamy 4 składniki i spodziewamy się iloczynu dwóch sum po dwa składniki; w taki sposób będziemy grupować. Mamy mieć dwie grupy po dwa składniki. W pierwszym przykładzie możemy grupować na dwa sposoby:

$$ab-cd-ad+bc=(ab-ad)+(bc-cd)=a(b-d)+c(b-d)=(a+c)(b-d),$$
$$ab-cd-ad+bc=(ab+bc)+(-ad-cd)=b(a+c)-d(a+c)=(a+c)(b-d).$$

W zadaniu 14 możemy grupować w dwie grupy po 3 składniki lub w 3 grupy po 2 składniki. Uczniowie, po obejrzeniu kilku przykładów, nie mają większych trudności z tymi zadaniami.

Wreszcie przychodzi zadanie 15. Mamy 5 składników, a więc prawdopodobnie mieliśmy do czynienia z mnożeniem dwóch wyrażeń: jednego z dwoma składnikami i drugiego z trzema składnikami, ale nastąpiła redukcja wyrazów podobnych. Oczekuję, że te przykłady uczniowie rozwiążą metodą dopasowywania lub po prostu metodą prób i błędów. Popatrzmy na pierwszy przykład:

$$a^2+ab-ac-6b^2+2bc.$$

Składnik a^2 sugeruje, że w obu wyrażeniach wystąpi a. Podobnie $6b^2$ sugeruje, że w obu wystąpi b, z odpowiednimi współczynnikami. Wreszcie w jednym wyrażeniu wystąpi c. Nasze mnożenie wygląda zatem następująco:

$$a^2+ab-ac-6b^2+2bc=(\bullet a+\bullet b)\cdot(\bullet a+\bullet b+\bullet c),$$

gdzie znak $\bullet$ oznacza nieznane współczynniki liczbowe. Składnik a^2 ze znakiem plus pokazuje, że w obu nawiasach znaki przy a są jednakowe. Możemy przyjąć, że są równe 1 (bowiem możemy pomnożyć wszystkie współczynniki przez -1). Mamy zatem:

$$a^2+ab-ac-6b^2+2bc=(a+\bullet b)\cdot(a+\bullet b+\bullet c).$$

Widzimy, że redukcja wyrazów podobnych nastąpiła przy ab i nie nastąpiła przy ac. Zatem współczynnik przy c jest równy -1:

$$a^2+ab-ac-6b^2+2bc=(a+\bullet b)\cdot(a+\bullet b-c).$$

Dalej jest już łatwo: współczynnik przy b w pierwszym nawiasie jest równy -2 i w drugim nawiasie jest równy 3:

$$a^2+ab-ac-6b^2+2bc=(a-2b)\cdot(a+3b-c).$$

Nietrudne sprawdzenie pokazuje, że znaleźliśmy poprawny rozkład.

Następne zadanie polega na odgadywaniu rozkładu na czynniki trójmianu kwadratowego. Uczniowie zauważają, że

$$(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab.$$

Zatem, aby znaleźć rozkład trójmianu

$$x^2 + px + q$$

na czynniki, wystarczy odgadnąć takie liczby a i b, by

$$a + b = p, \quad ab = q.$$

W prostych przypadkach takie odgadnięcie nie sprawia uczniom kłopotu. W przyszłości uczniowie poznają metodę znajdowania takich liczb a i b.

16. Rozłóż następujące wyrażenia na czynniki:

a) $x^2 - 2x - 3$
b) $x^2 + 5x + 4$
c) $x^2 - 5x + 6$
d) $x^2 + 7x + 10$
e) $x^2 - 3x + 2$
f) $x^2 + x - 2$

Do zadań na rozkładanie na czynniki powracam po wzorach skróconego mnożenia. Poniżej podaję rozwiązania powyższych pięciu zadań.

12. Wyłącz wspólny czynnik poza nawias:

a) $5ax + 3ay$ — $a(5x + 3y)$
b) $25abx^2 - 35a^2cx + 85ab^2x^3$ — $5ax(5bx - 7ac + 17b^2x^2)$
c) $2(a + b)^2 + 2b(a - b) + a^2$ — $3a(a + 2b)$
d) $2x(x - 3) + 3x(3 - x)$ — $(x - 3)(2x - 3x) = -x(x - 3)$
e) $5(a + x)(b - y)^2 + 3(a + x)^2(b - y)$ — $(a + x)(b - y)\big(5(b - y) + 3(a + x)\big)$
f) $a(a + b + c) + b(a + b + c) - c(a + b + c)$ — $(a + b + c)(a + b - c)$
g) $(2x + 3y)(x - y) - (3x - 4y)(x - y)$ — $(x - y)(-x + 7y)$
h) $(3x - 5y)(2x - 7y) - (4x + y)(7y - 2x)$ — $(2x - 7y)(7x - 4y)$

13. Rozłóż następujące wyrażenia algebraiczne na czynniki:

a) $ab - cd - ad + bc$ — $(a + c)(b - d)$
b) $x^2y^2 - 1 - y^2 + x^2$ — $(x^2 - 1)(y^2 + 1) = (x - 1)(x + 1)(y^2 + 1)$
c) $ax^2 - ax + bx^2 - bx$ — $x(x - 1)(a + b)$
d) $4x^3 - 4xy^2 - 6x^2 + 6y^2$ — $2(x - y)(x + y)(2x - 3)$
e) $ab - cd^2 - ad^2 + bc$ — $(a + c)(b - d^2)$
f) $35ac - 91ad - 55bc + 143bd$ — $(7a - 11b)(5c - 13d)$
g) $x^3 - 3x^2 + 3x - 9$ — $(x - 3)(x^2 + 3)$
h) $20pm - 15qn + 12qm - 25pn$ — $(5p + 3q)(4m - 5n)$

14. Rozłóż następujące wyrażenia na czynniki:

a) $ax - by + az + bz - ay + bx$ — $(a + b)(x + z - y)$
b) $mx - my + nx - ny + px - py$ — $(m + n + p)(x - y)$
c) $2a^2 - a + 2ab - b - 2ac + c$ — $(a + b - c)(2a - 1)$
d) $px^2 + qx + q^2y + pqxy + p^2qx + pq^2$ — $(xp + q)(x + qy + qp)$
e) $qx^2 + pqy - pxy - py^2 + pqx + qxy$ — $(xq - yp + pq)(x + y)$
f) $2qz - 2qy + pz + px + 2qx - py$ — $(p + 2q)(x + z - y)$

15. Rozłóż następujące wyrażenia na czynniki:

a) $a^2 + ab - ac - 6b^2 + 2bc$ $\qquad (a-2b)(a+3b-c)$
b) $a^2 - 2b^2 + ab - ac - 2bc$ $\qquad (a-b-c)(a+2b)$
c) $2ab - 2ac + 3b^2 + c^2 - 4bc$ $\qquad (b-c)(2a+3b-c)$
d) $2x^2 + 5xy - xz + 3y^2 - yz$ $\qquad (x+y)(2x+3y-z)$
e) $-z^2 - x^2 + zy - xy + 2zx$ $\qquad (z-x)(x+y-z)$
f) $2a^2 + 3b^2 - 7ab + 3ac - 9bc$ $\qquad (a-3b)(2a-b+3c)$
g) $-4x^2y + 2xy^2 + 2x^2 - y^2 + xy$ $\qquad (x+y-2xy)(2x-y)$
h) $4yz + 5xy - 2y^2 + 2xz + 3x^2$ $\qquad (x+2y)(3x-y+2z)$

16. Rozłóż następujące wyrażenia na czynniki:

a) $x^2 - 2x - 3$ $\qquad (x-3)(x+1)$
b) $x^2 + 5x + 4$ $\qquad (x+1)(x+4)$
c) $x^2 - 5x + 6$ $\qquad (x-3)(x-2)$
d) $x^2 + 7x + 10$ $\qquad (x+2)(x+5)$
e) $x^2 - 3x + 2$ $\qquad (x-2)(x-1)$
f) $x^2 + x - 2$ $\qquad (x-1)(x+2)$

Wzory skróconego mnożenia

Wzory skróconego mnożenia, tradycyjnie omawiane przy okazji mnożenia wyrażeń algebraicznych, to jeden z tematów, które w ostatniej reformie programowej zostały usunięte z gimnazjum i przeniesione do liceum. To w zasadzie oznacza, że nie powinniśmy tego tematu w gimnazjum poruszać, nawet z uczniami zdolnymi. Z drugiej strony, wiele zadań, w których korzystamy ze wzorów skróconego mnożenia, można zakwalifikować jako zadania na mnożenie wyrażeń algebraicznych. Od początku ostatniej reformy uważałem, że o ile przeniesienie pewnych treści do liceum oznacza, że tych tematów nie będziemy wymagać na egzaminie od wszystkich gimnazjalistów, to jednak nie oznacza, że w programie rozszerzonym, przeznaczonym dla uczniów zdolnych, nie można tego zamieścić. Moim zdaniem, wzory skróconego mnożenia pozwalają na konstruowanie tak wielu niezwykle pożytecznych zadań i sprawne prowadzenie tak wielu ważnych rozumowań, że nie można z nich rezygnować. Dlatego w moim programie rozszerzonym te wzory zawsze były, są i — mam nadzieję — zawsze będą. A teraz chcę pokazać, co takiego ważnego w tych wzorach widziałem i jakie zadania dawałem uczniom.

Zaczynamy od tego, że wzory te nie biorą się z niczego; są one wynikiem mnożeń, które w naturalny sposób będą się pojawiać w różnych rozumowaniach matematycznych. Ponadto te wzory coś znaczą, mają treść (na przykład geometryczną), którą uczeń powinien rozumieć. Nawet ci uczniowie, którzy poznali te wzory już wcześniej, bardzo często popełniają jeden z wielu podstawowych błędów, polegających na wykonywaniu obliczeń tak jakby według wzorów:

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2, \quad (a-b)^2 = a^2 - b^2, \quad \sqrt{a^2+b^2} = a+b, \quad \sqrt{a^2-b^2} = a-b, \quad \text{(!!!)}$$

nawet wtedy, gdy zapytani o odpowiednie wzory, podają je poprawnie. Widziałem klasówkę, w której kilkakrotnie poprawnie zastosowano wzory skróconego mnożenia (w tym również z pierwiastkami) i w której ponadto w dwóch różnych zadaniach znalazły się następujące obliczenia:

$$\sqrt{17} = \sqrt{16+1} = \sqrt{4^2+1^2} = 4+1 = 5, \qquad \text{(!!!)}$$
$$\sqrt{35} = \sqrt{36-1} = \sqrt{6^2-1^2} = 6-1 = 5. \qquad \text{(!!!)}$$

W takich przypadkach za całą klasówkę stawiam ocenę niedostateczną; uprzedzam wcześniej uczniów, że w trakcie nauki pojawi się pojęcie tak zwanego „błędu kardynalnego" — błędu, którego nie wolno popełnić i za popełnienie którego uczeń otrzymuje ocenę niedostateczną, niezależnie od tego, co poza tym na klasówce zrobił. Takim błędem kardynalnym jest m.in. niepoprawne podniesienie do kwadratu (czyli na przykład skorzystanie ze „wzoru" $(a+b)^2 = a^2 + b^2$) lub niepoprawne wyciągnięcie pierwiastka (czyli na przykład skorzystanie ze wzoru $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$). W omawianym przypadku dodatkowo wyjaśniłem, że ocena niedostateczna jest spowodowana niekonsekwencją. Powiedziałem: zdecyduj się, jaka liczba ma pierwiastek równy 5. Czy ma to być 17, czy może 35, czy wreszcie po prostu 25? Ale nie mogą to być dwie różne liczby z tych trzech.

Tyle anegdot. Dlaczego jednak nawet dobrzy uczniowie, nierzadko doskonale radzący sobie z zadaniami naprawdę trudnymi i potrafiący nauczyć się rzeczy trudnych, robią tak kardynalne błędy? W przypadku ucznia słabego, niedouczonego, odpowiedź wydaje się prosta: właśnie to niedouczenie powoduje błędy. To nie jest pełne wyjaśnienie, bo nie odpowiada na pytanie, dlaczego akurat te, tak częste błędy. Ala taka odpowiedź jest zupełnie niezadowalająca w przypadku uczniów dobrych, którzy jednak też robią takie błędy. Być może moja odpowiedź też nie będzie zadowalająca, ale wydaje mi się pewnym przybliżeniem do ostatecznej odpowiedzi. Jedną z przyczyn jest prostota. Uczniowie, zwłaszcza dobrzy, dostrzegają wielką właściwość matematyki — jest nią prostota i elegancja. Rozwiązanie proste jest zazwyczaj poprawne, rozwiązanie długie i zawiłe jest narażone na błędy. Elegancja wyniku jest zazwyczaj gwarancją poprawności. A czyż może być coś prostszego niż

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2?$$

Tym bardziej, że jeśli dodawanie zastąpimy mnożeniem, wzór będzie poprawny. Kiedyś słyszałem anegdotę — nie wiem, czy prawdziwą, ale, jak się często mówi, jeśli nawet nieprawdziwą, to dobrze wymyśloną — o badaniach wśród uczniów pewnej szkoły. Na pytanie o to, jakiemu wyrażeniu jest równe wyrażenie $(a+b)^2$, wszyscy uczniowie, dobrze przecież wyuczeni, odpowiedzieli prawidłowo. Na pytanie, czemu jest równe wyrażenie $(a+b)^3$ już tylko nieliczni odpowiedzieli poprawnie. Wszyscy uczniowie natomiast napisali, że $(a+b)^4 = a^4 + b^4$. Bo przecież wzoru na czwartą potęgę sumy nie było, a wtedy zadziałał zdrowy rozsądek: dla każdego n powinno być $(a+b)^n = a^n + b^n$, ale z niejasnych powodów dla wykładnika 2 (nieliczni wiedzą jeszcze, że tak jest też dla wykładnika 3) akurat jest wyjątek i ten wyjątek jest omawiany w szkole aż do znudzenia. Zresztą poświęcenie tak długiego czasu jednej sprawie nadaje jej charakter wyjątku.

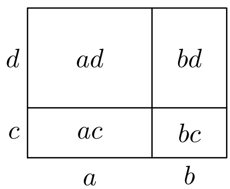
Jak wspomniałem, nie wiem, czy takie badania rzeczywiście były prowadzone, czy jest to tylko zgrabna dykteryjka. Zauważyłem jednak skłonność do nadmiernego upraszczania rozumowań nawet u dobrych uczniów. Einsteinowi przypisuje się powiedzenie: „wszystko należy upraszczać jak tylko jest to możliwe, ale nie bardziej". Chodzi właśnie o to „nie bardziej". Naturalna intuicja ucznia domaga się maksymalnego uproszczenia; naszym obowiązkiem jest pokazać granice tego uproszczenia. Matematyka jest prosta i elegancka, ale czasem ta prostota jest bardziej wyrafinowana. Naszym zadaniem jest pokazać, na czym ta prawdziwa prostota naprawdę polega. Jak widać, nie rozwiązuje to problemu do końca, błędy będą się zdarzać. Myślę jednak, że rzadziej niż wtedy, gdybyśmy tej pełnej, wyrafinowanej prostoty matematyki dobrze nie pokazali.

Jednym ze sposobów zilustrowania tej bardziej złożonej prawdy jest pokazanie jej interpretacji geometrycznej. Obraz działa na uczniów mocniej niż wzór, a dwa różne wyjaśnienia tego samego zagadnienia znaczą więcej niż jedno. Drugim sposobem jest ukazanie wzoru w całym jego kontekście — w tym przypadku jako jednego z wielu podobnych wzorów — i wyjaśnienie istoty całego zagadnienia. Okazuje się, że to zagadnienie w całej ogólności jest wystarczająco proste, by uczeń mógł je ogarnąć. Uprośćmy to tak, jak tylko się da, ale nie bardziej niż to konieczne — nie do zredukowania problemu tylko do jednego wykładnika, ponieważ to uprości zagadnienie bardziej niż umysł ucznia tego potrzebuje.

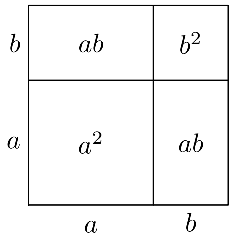
Zacznijmy od interpretacji geometrycznej. W wielu podręcznikach widziałem interpretację geometryczną prawa mnożenia „każdy wyraz przez każdy"

$$(a+b)(c+d) = ac + bc + ad + bd,$$

(zob. rys. 6.1) czy wzoru na kwadrat sumy (zob. rys. 6.2):



Rys. 6.1

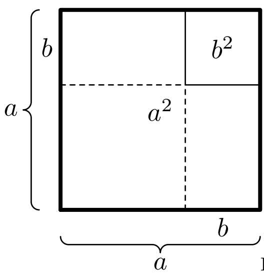


Rys. 6.2

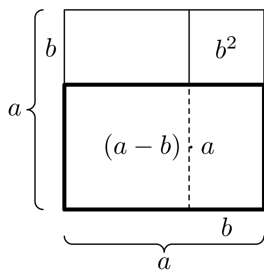
Rzadziej spotyka się interpretację wzoru na różnicę kwadratów, a zupełnie nie widzi się interpretacji analogicznych wzorów dla wykładnika 3. Mamy na przykład

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b) = (a-b)\cdot a + (a-b)\cdot b$$

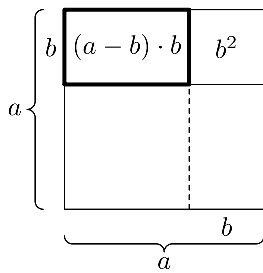
z interpretacją geometryczną na rysunkach 6.3, 6.4 i 6.5:



Rys. 6.3



Rys. 6.4



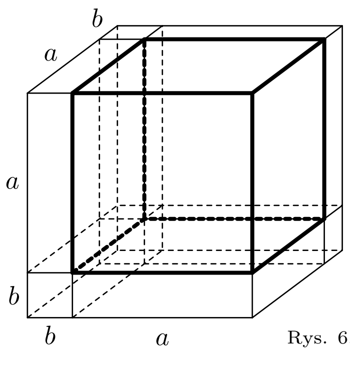
Rys. 6.5

Popatrzmy też na interpretację geometryczną wzoru na sześcian sumy

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

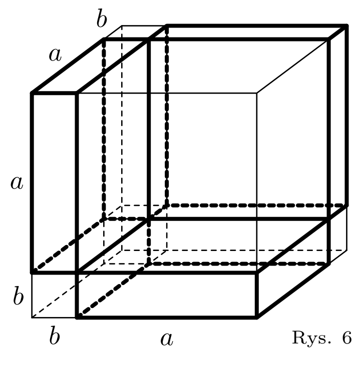
na rysunkach 6.6, 6.7, 6.8 i 6.9:

a^3 :



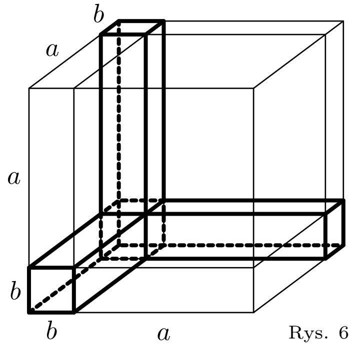
Rys. 6.6

$3a^2b$:



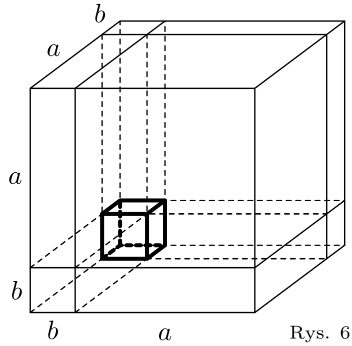
Rys. 6.7

$3ab^2$:



Rys. 6.8

b^3 :



Rys. 6.9

W podobny sposób można pokazać interpretację geometryczną wzoru

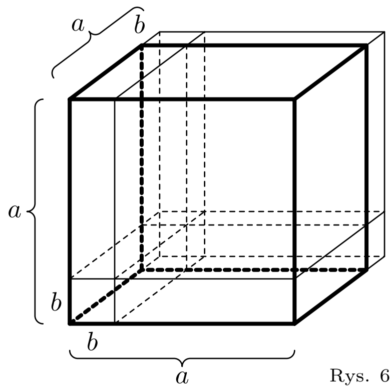
$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2) = (a-b)\cdot a^2 + (a-b)\cdot ab + (a-b)\cdot b^2$$

na trzech rysunkach. Tym razem cały sześcian ma krawędź równą a; mały sześcianik w rogu ma krawędź równą b. Bryłę powstałą przez usunięcie małego sześcianika z dużego dzielimy na trzy prostopadłościany o objętościach odpowiednio:

$$(a-b)\cdot a^2, \qquad (a-b)\cdot ab, \qquad (a-b)\cdot b^2.$$

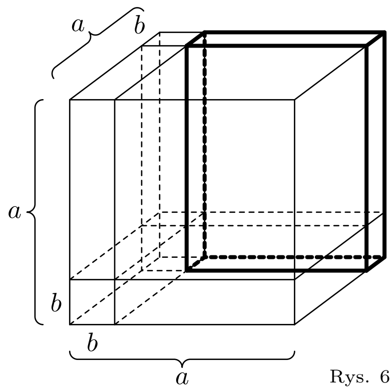
Na rysunku 6.10 widzimy prostopadłościan o jednej krawędzi równej $a-b$ i dwóch krawędziach równych a, na rysunku 6.11 widzimy prostopadłościan o krawędziach równych $a-b$, a i b, a na rysunku 6.12 — prostopadłościan o jednej krawędzi równej $a-b$ i dwóch krawędziach równych b:

$(a-b)\cdot a^2$:



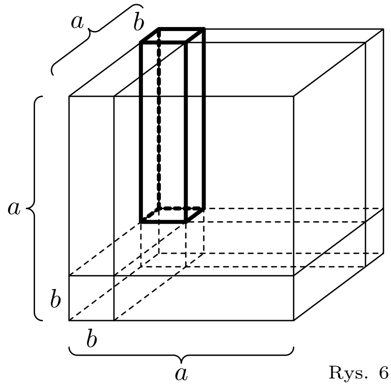
Rys. 6.10

$(a-b)\cdot ab$:



Rys. 6.11

$(a - b) \cdot b^2$:



Rys. 6.12

Teraz zajmijmy się wzorami ogólnymi. Proszę uczniów o wykonanie obliczeń:

17. Oblicz: $(a+b)^3$, $(a+b)^4$, $(a+b)^5$, $(a+b)^6$, $(a+b)^7$, $(a+b)^8$.

Proponuję także metodę: obliczajcie po kolei, następny wynik otrzymacie mnożąc poprzedni przez $a+b$. Uczniowie na ogół otrzymują wyniki poprawne:

$$
\begin{aligned}
&(a+b)^1 = a + b,\\
&(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,\\
&(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3,\\
&(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4,\\
&(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5,\\
&(a+b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6,\\
&(a+b)^7 = a^7 + 7a^6b + 21a^5b^2 + 35a^4b^3 + 35a^3b^4 + 21a^2b^5 + 7ab^6 + b^7,\\
&(a+b)^8 = a^8 + 8a^7b + 28a^6b^2 + 56a^5b^3 + 70a^4b^4 + 56a^3b^5 + 28a^2b^6 + 8ab^7 + a^8.
\end{aligned}
$$

Wtedy zauważamy regułę. Rozwinięcie $(a+b)^n$ zaczyna się od a^n i kończy b^n. Po drodze mamy składniki, w których potęgi a maleją, a potęgi b rosną. Istotne są tylko współczynniki. Tabela współczynników tworzy trójkąt Pascala:

1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1

Uczniowie dostrzegają zasadę tworzenia trójkąta Pascala: każdy wiersz zaczyna się i kończy jedynką; wyrazy pośrednie są sumami wyrazów sąsiadujących z nimi wiersz wyżej. Te reguły formułujemy wyraźnie — tak, aby uczniowie mogli je zapamiętać. Oczywiście nie przeprowadzam dowodu. To jest tylko obserwacja, którą potwierdzam: dalej też tak będzie, to jest reguła ogólna.

Wreszcie wprowadzam oznaczenie $\binom{n}{k}$ współczynników dwumianowych występujących w trójkącie Pascala. Liczba n, stojąca na górze, oznacza wykładnik; liczba k, stojąca na dole, wskazuje, przy której potędze b znajduje się ten współczynnik. Te współczynniki dwumianowe pojawią się oczywiście jeszcze raz, na lekcjach kombinatoryki. Na razie nie podaję wzoru na obliczanie współczynnika dwumianowego. Te współczynniki pochodzą z trójkąta Pascala i tylko w taki sposób na razie będziemy je obliczać.

W tym miejscu konieczny jest komentarz dydaktyczny. Po pierwsze, jak wspomniałem wcześniej, wprowadzenie wzoru ogólnego

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n,$$

a także sposób jego uzyskania przez kolejne mnożenia, uzmysławia uczniom rzeczywisty sens wzoru. Widzą, że wzięta „z sufitu” reguła $(a+b)^n = a^n + b^n$ nie ma żadnego uzasadnienia i że prawdziwa reguła jest inna. To oczywiście nie zapobiega błędom popełnianym w przyszłości. Na klasówce będą często zapominać o wzorach i zwycięży zły odruch. Ale może u niektórych uczniów te rozważania ogólne wytwarzają inne odruchy?

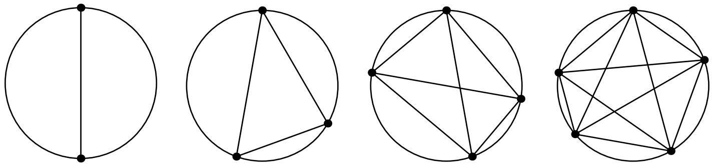
To nie jest jedyny powód dla wprowadzenia wzoru ogólnego. Chcę, by uczniowie uczyli się dostrzegania ogólnych prawidłowości w serii przykładów. Otrzymane wzory dla niewielkich wykładników pozwalają na uogólnienia. Chcę zmusić uczniów do wypowiedzenia tej reguły ogólnej — tak, by ostatecznie móc sformułować wzór ogólny. Ta reguła ogólna zmusza nas do wprowadzenia nowego pojęcia: współczynnika dwumianowego. Widzimy, że jedyne, co rozróżnia poszczególne wzory (poza jedną rzeczą oczywistą: wykładnikami potęg), to właśnie współczynniki. To skłania nas do przyjrzenia się im, dostrzeżenia ich struktury i wprowadzenia oznaczenia umożliwiającego zapisanie wzoru w postaci ogólnej.

Uogólnianie — wyciąganie wniosków ogólnych z obserwowanych przykładów — to bardzo ważny element myślenia matematycznego. Oczywiście trzeba pamiętać o tym, że jest to element zawodny. Zdarza się, że takie uogólnienia zawodzą, ale często prowadzą do poprawnych hipotez. Umiejętność stawiania hipotez jest przecież jedną z ważniejszych umiejętności badawczych, nie tylko w matematyce. Należy uczniom uzmysłowić, że postawienie trafnej hipotezy to dopiero pierwszy krok do rozwiązania problemu. Potrzebne jest rozumowanie potwierdzające hipotezę; w matematyce takim rozumowaniem jest dowód (w naukach przyrodniczych może nim być doświadczenie). Nie zawsze dowód jest dostępny dla uczniów w tym wieku; wtedy wkracza autorytet nauczyciela. Ale to nie jest autorytet, który może oznajmić: ja wam mówię, że tak jest. To nie wystarczy. Ma być: ja wam mówię, że tę hipotezę można udowodnić. Czasem nawet może dodać: i ja znam dowód (chociaż nie jest to konieczne; mówię uczniom o wielkim twierdzeniu Fermata, a nie mam nawet nadziei, że dowód poznam i zrozumiem).

Podsumowując: uczmy naszych uczniów stawiania hipotez na podstawie obserwowanych prawidłowości i potwierdzajmy hipotezy trafnie postawione, mówiąc, że w istocie są one twierdzeniami; jeśli to możliwe pokazujmy dowody. Pokazujmy jednak również hipotezy nietrafne. Wspaniały przykład takiej nietrafnej hipotezy polega na zliczaniu, na ile części cięciwy dzielą okrąg. Dokładniej, popatrzmy na zadanie:

18. Na okręgu wybrano n punktów i poprowadzono wszystkie cięciwy o końcach w tych punktach. Punkty te są wybrane tak, by żadne trzy cięciwy nie przecięły się w jednym punkcie. Na ile części te cięciwy dzielą koło?

Popatrzmy na cztery przypadki (dla $n = 2, 3, 4, 5$) pokazane na rysunku 6.13:



Rys. 6.13

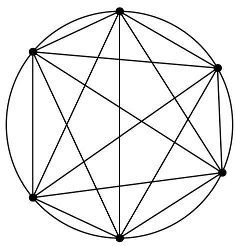
Dla $n = 2$ mamy 2 części, dla $n = 3$ mamy 4 części, dla $n = 4$ mamy 8 części, dla $n = 5$ mamy 16 części. Zbierzmy wyniki razem w jednej tabelce:

n	liczba części
2	2
3	4
4	8
5	16

Widzimy, że liczba części jest potęgą dwójki i odgadujemy wzór:

$$\text{liczba części} = 2^{n-1}.$$

Popatrzmy, czy dla sześciu punktów nasza hipoteza się potwierdzi:



Rys. 6.14

Nietrudno policzyć, że na rysunku 6.14 mamy tylko 31 części, zatem nasza hipoteza się nie potwierdziła. To powinno nas przekonać, że hipoteza postawiona na podstawie kilku przypadków może nie być ogólnie prawdziwa; potrzebny jest dowód. W tym przypadku prawidłowy wzór jest inny:

$$\text{liczba części} = 1 + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} = \frac{n^4 - 6n^3 + 23n^2 - 18n + 24}{24}.$$

Dowód nie jest bardzo trudny, chociaż zdecydowanie nie na poziomie gimnazjum. Wzór można uczniom pokazać jako ciekawostkę, ale ja dowodu nie pokazuję. Dowód polega na następującej obserwacji. Rysujemy kolejne cięciwy. Każda nowa cięciwa rozcina obszar, przez który zaczyna przechodzić, do pierwszego punktu przecięcia. Następnie rozcina obszar, przez który przechodzi po każdym punkcie przecięcia. Stąd wniosek, że każda cięciwa dodaje jeden nowy obszar plus tyle obszarów, ile na niej leży punktów przecięcia; zatem liczba obszarów jest równa 1 (całe koło na początku) plus liczba cięciw plus liczba punktów przecięcia. Oczywiście liczba cięciw jest równa $\binom{n}{2}$, a liczba punktów przecięcia jest równa $\binom{n}{4}$ (każdy punkt przecięcia wyznacza jednoznacznie cztery punkty na okręgu: końce obu przecinających się cięciw).

Rozumowanie przez postawienie trafnej hipotezy jest bardzo ważnym sposobem rozwiązywania zadań. Na XVI Olimpiadzie Matematycznej było następujące zadanie:

19. Znajdź wszystkie takie liczby pierwsze p, że $4p^2+1$ i $6p^2+1$ są również liczbami pierwszymi.

Rozwiązanie zaczniemy od obliczenia $4p^2+1$ i $6p^2+1$ dla kolejnych liczb pierwszych p, w nadziei, że dostrzeżemy jakąś prawidłowość:

p	$4p^2+1$	$6p^2+1$
2	17	25
3	37	55
5	101	151
7	197	295
11	485	727
13	677	1015
17	1157	1735
19	1445	2167

Zauważmy, że w każdym wierszu jedna z liczb ma na końcu cyfrę 5, a więc jest podzielna przez 5. Możemy zadać naturalne pytanie, czy wynika to z tego, że liczba stojąca w pierwszej kolumnie jest pierwsza, czy ma to charakter ogólniejszy. Postawmy hipotezę, że dla każdej liczby naturalnej n co najmniej jedna z liczb: n, $4n^2+1$ i $6n^2+1$ dzieli się przez 5. Spróbujmy zatem obliczyć liczby $4n^2+1$ i $6n^2+1$ dla kolejnych liczb n, niekoniecznie pierwszych:

n	$4n^2+1$	$6n^2+1$	n	$4n^2+1$	$6n^2+1$	n	$4n^2+1$	$6n^2+1$
1	5	7	8	257	385	15	901	1351
2	17	25	9	325	487	16	1025	1537
3	37	55	10	401	601	17	1157	1735
4	65	97	11	485	727	18	1297	1945
5	101	151	12	577	865	19	1445	2167
6	145	217	13	677	1015	20	1601	2401
7	197	295	14	785	1177	21	1765	2647

Nasza hipoteza, jak dotąd, potwierdza się. Przypomnijmy ją:

- dla każdej liczby naturalnej n co najmniej jedna z liczb n, $4n^2+1$ i $6n^2+1$ jest podzielna przez 5.

Tak sformułowana hipoteza okazuje się prawdziwa i można ją udowodnić kilkoma sposobami. Udowodnienie jej oczywiście kończy rozwiązanie zadania. Jedyną taką liczbą pierwszą p jest 5; dla każdej innej liczby pierwszej p co najmniej jedna z liczb $4p^2+1$ oraz $6p^2+1$ jest złożona, bo dzieli się przez 5 i jest większa od 5. A dla $p=5$ obie liczby 101 i 151 są pierwsze (co można łatwo sprawdzić ręcznie). Udowodnijmy naszą hipotezę.

Sposób I. Rozpatrujemy kilka przypadków w zależności od tego, jaka jest ostatnia cyfra liczby n.

1. Ostatnią cyfrą liczby n jest 0 lub 5. Wtedy liczba n jest podzielna przez 5.

2. Ostatnią cyfrą liczby n jest 1 lub 9. Wtedy ostatnią cyfrą liczby n^2 jest 1, a więc ostatnią cyfrą liczby $4n^2+1$ jest 5. Liczba $4n^2+1$ jest zatem podzielna przez 5.
3. Ostatnią cyfrą liczby n jest 2 lub 8. Wtedy ostatnią cyfrą liczby n^2 jest 4, a więc ostatnią cyfrą liczby $6n^2+1$ jest 5. Zatem liczba $6n^2+1$ jest podzielna przez 5.
4. Ostatnią cyfrą liczby n jest 3 lub 7. Wtedy ostatnią cyfrą liczby n^2 jest 9, a więc ostatnią cyfrą liczby $6n^2+1$ jest 5. Stąd wynika, że liczba $6n^2+1$ jest podzielna przez 5.
5. Ostatnią cyfrą liczby n jest 4 lub 6. Wtedy ostatnią cyfrą liczby n^2 jest 6, a więc ostatnią cyfrą liczby $4n^2+1$ jest 5 i liczba $4n^2+1$ jest podzielna przez 5.

Sposób II. Rozpatrujemy trzy przypadki w zależności od tego, jaką resztę przy dzieleniu przez 5 daje liczba n.

1. Liczba n daje resztę 0 przy dzieleniu przez 5. Wtedy n dzieli się przez 5.
2. Liczba n daje resztę 1 lub 4 przy dzieleniu przez 5. Wtedy $n=5k+1$ lub $n=5k+4$ dla pewnej liczby naturalnej k. Stąd łatwo wynika, że $n^2=5l+1$ dla pewnej liczby całkowitej l:

$$(5k+1)^2 = 25k^2+10k+1 = 5(5k^2+2k)+1,$$
$$(5k+4)^2 = 25k^2+40k+16 = 5(5k^2+8k+3)+1.$$

   Zatem
$$4n^2+1 = 4(5l+1)+1 = 20l+5 = 5(4l+1),$$
   a więc liczba $4n^2+1$ dzieli się przez 5.
3. Liczba n daje resztę 2 lub 3 przy dzieleniu przez 5. Wtedy $n=5k+2$ lub $n=5k+3$ dla pewnej liczby naturalnej k. W obu przypadkach istnieje taka liczba całkowita l, że $n^2=5l+4$:

$$(5k+2)^2 = 25k^2+20k+4 = 5(5k^2+4k)+4,$$
$$(5k+3)^2 = 25k^2+30k+9 = 5(5k^2+6k+1)+4.$$

   Zatem
$$6n^2+1 = 6(5l+4)+1 = 30l+25 = 5(6l+5),$$
   a więc liczba $6n^2+1$ dzieli się przez 5.

Domyślenie się, że w tym zadaniu należy rozpatrywać podzielność przez 5, nie jest łatwe. Ale po obejrzeniu kilku przypadków ta podzielność narzuca się.

Poznawanie nowych wzorów w wyniku obserwacji przykładów przeprowadzimy jeszcze raz. Proszę uczniów o rozwiązanie następującego zadania:

20. Oblicz:

a) $(a-b)(a^2+ab+b^2)$;
b) $(a-b)(a^3+a^2b+ab^2+b^3)$;
c) $(a-b)(a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4)$;
d) $(a-b)(a^5+a^4b+a^3b^2+a^2b^3+ab^4+b^5)$;
e) $(a-b)(a^6+a^5b+a^4b^2+a^3b^3+a^2b^4+ab^5+b^6)$;
f) $(a-b)(a^7+a^6b+a^5b^2+a^4b^3+a^3b^4+a^2b^5+ab^6+b^7)$.

Wyniki są nam dobrze znane:

20. Oblicz:

a) $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$;
b) $(a-b)(a^3+a^2b+ab^2+b^3)=a^4-b^4$;
c) $(a-b)(a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4)=a^5-b^5$;
d) $(a-b)(a^5+a^4b+a^3b^2+a^2b^3+ab^4+b^5)=a^6-b^6$;
e) $(a-b)(a^6+a^5b+a^4b^2+a^3b^3+a^2b^4+ab^5+b^6)=a^7-b^7$;
f) $(a-b)(a^7+a^6b+a^5b^2+a^4b^3+a^3b^4+a^2b^5+ab^6+b^7)=a^8-b^8$.

Oczywiście odgadujemy wzór ogólny:

$$(a-b)(a^n+a^{n-1}b+a^{n-2}b^2+\ldots+a^2b^{n-2}+ab^{n-1}+b^n)=a^{n+1}-b^{n+1}.$$

Znów informujemy, że ten wzór też można udowodnić; dowód jednak pominiemy. Ten wzór ma ważne konsekwencje. Po pierwsze, jeśli liczby a i b są całkowite, to dostaniemy wniosek, że liczba $a-b$ jest dzielnikiem liczby a^n-b^n dla dowolnego wykładnika n. Mamy też ważny wzór (po podstawieniu $a=1$):

$$(1-b)(1+b+b^2+\ldots+b^{n-2}+b^{n-1}+b^n)=1-b^{n+1}.$$

Jeśli teraz $b\neq 1$, to otrzymamy znany wzór

$$1+b+b^2+\ldots+b^{n-2}+b^{n-1}+b^n=\frac{1-b^{n+1}}{1-b}.$$

Ten wzór można wyprowadzić bezpośrednio w następujący sposób. Oznaczmy literą S lewą stronę:

$$S=1+b+b^2+\ldots+b^{n-2}+b^{n-1}+b^n.$$

Mamy wówczas

$$\begin{aligned}S&=1+b+b^2+\ldots+b^{n-2}+b^{n-1}+b^n=\\&=1+b(1+b^2+\ldots+b^{n-1})=\\&=1+b(S-b^n).\end{aligned}$$

Otrzymaliśmy równanie

$$S=1+b(S-b^n).$$

Przekształcamy je w sposób równoważny:

$$\begin{aligned}S&=1+bS-b^{n+1},\\S-bS&=1-b^{n+1},\\S(1-b)&=1-b^{n+1}.\end{aligned}$$

Jeśli teraz $b\neq 1$, to dostajemy wzór na S. Z tego wzoru można z kolei wyprowadzić wzór

$$(a-b)(a^n+a^{n-1}b+a^{n-2}b^2+\ldots+a^2b^{n-2}+ab^{n-1}+b^n)=a^{n+1}-b^{n+1}.$$

We wzorze

$$1+b+b^2+\ldots+b^{n-2}+b^{n-1}+b^n=\frac{1-b^{n+1}}{1-b}$$

podstawmy $\frac{b}{a}$ w miejsce b:

$$1+\frac{b}{a}+\frac{b^2}{a^2}+\ldots+\frac{b^n}{a^n}=\frac{1-\frac{b^{n+1}}{a^{n+1}}}{1-\frac{b}{a}}.$$

Teraz wystarczy pomnożyć obie strony przez a^n i uprościć ułamek po prawej stronie.

Można zadać pytanie, która metoda wyprowadzenia tych wzorów jest lepsza. Czy zaobserwować wzory na różnicę potęg i wyprowadzić z nich wzór

$$1+b+b^2+\ldots+b^{n-2}+b^{n-1}+b^n=\frac{1-b^{n+1}}{1-b},$$

czy odwrotnie — najpierw wyprowadzić ten ostatni wzór i z niego wzór na różnicę potęg. Zdecydowanie opowiadam się za sposobem pierwszym. Uczę stawiania hipotez: dostrzegania prawidłowości i formułowania ich w postaci wniosku ogólnego. Drugi sposób wyprowadzenia kiedyś pokażę (albo zrobi to ktoś inny w liceum). Nie stracimy tego, zyskamy za to pewną rzadko ćwiczoną umiejętność rozumowania.

Jednym z zadań, które daję uczniom, jest zadanie polegające na wyprowadzeniu innych wzorów skróconego mnożenia, np. wzoru na kwadrat sumy wielu składników:

21. Wykonaj mnożenie wielomianów:

a) $(a+b+c)^2$,
b) $(a+b+c)(a+b-c)$,
c) $(a+b-c)(a-b+c)$,
d) $(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)$,
e) $(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)$,
f) $(a+b+c)^3$,
g) $(a+b+c+d)^2$,
h) $(a+b+c+d)^3$.

Te wzory są podstawą do ciekawego ćwiczenia. Popatrzmy na pierwszy wzór: mamy obliczyć iloczyn

$$(a+b+c)^2=(a+b+c)\cdot(a+b+c).$$

Znamy regułę mnożenia: każdy wyraz przez każdy. Spróbujmy teraz wyobrazić sobie, jak wygląda iloczyn. Będą w nim kwadraty: a^2, b^2 i c^2. Kwadrat a^2 powstaje przez pomnożenie a z pierwszego czynnika przez a z drugiego czynnika; podobnie inne kwadraty. A jak powstaje iloczyn ab? Są dwa sposoby: a z pierwszego czynnika i b z drugiego lub na odwrót. W iloczynie mamy zatem trzy kwadraty i 6 iloczynów: dwa ab, dwa ac i dwa bc. Razem 9 składników, czyli tyle, ile miało być: $3\cdot 3=9$. A więc, bez wykonywania obliczeń na papierze czy na tablicy, widzimy wynik: $a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$.

Takie ćwiczenie można przeprowadzić dla kwadratu czterech składników; uczniowie dostrzegają regułę ogólną. Kwadrat sumy jest równy sumie kwadratów składników plus suma wszystkich podwojonych iloczynów. Możemy oczywiście drążyć temat dalej i zastanawiać się z uczniami, ile jest tych podwojonych iloczynów. W ten sposób zbliżamy się do kombinatoryki; potrzeba zastanawiania się nad takimi pytaniami staje się widoczna. O tym, jak uczę kombinatoryki, piszę w innym rozdziale.

Wreszcie, podobne rozumowanie można z uczniami przeprowadzić dla sześcianu sumy trzech liczb. Tu problemy będą większe: trzeba na przykład obliczyć, ile razy wystąpi składnik *abc*. Ale wielu uczniów potrafi całe rozumowanie przeprowadzić poprawnie. Zachęcam do takich zadań; ćwiczenie czegoś, co można nazwać wyobraźnią formalną, algebraiczną, również jest ważną umiejętnością matematyczną.

Proszę uczniów o obliczenie kwadratów prostych wyrażeń liniowych, na przykład:

$$(2x-3)^2 = 4x^2 - 12x + 9.$$

Główny cel takich zadań to rozwinięcie umiejętności wykonywania czynności odwrotnej: zwijania trójmianów do kwadratu. Takie zadania też daję moim uczniom. Podobne umiejętności ćwiczę na wyrażeniach zawierających pierwiastki; daję zadania polegające na podniesieniu do kwadratu

$$(5-3\sqrt{2})^2 = 25 - 30\sqrt{2} + 18 = 43 - 30\sqrt{2},$$

a także na rozpoznaniu kwadratu. Przykładem może być rozpoznanie, że liczba $3+2\sqrt{2}$ jest kwadratem:

$$3 + 2\sqrt{2} = 2 + 2\sqrt{2} + 1 = (\sqrt{2}+1)^2.$$

Takie zadania zdarzały się na zawodach matematycznych. Zadanie polegające na wykazaniu, że liczba

$$\sqrt{11+6\sqrt{2}} + \sqrt{11-6\sqrt{2}}$$

jest naturalna, może być rozwiązane dwoma sposobami. Jeden polega na podniesieniu jej do kwadratu:

$$\begin{aligned}
x &= \sqrt{11+6\sqrt{2}} + \sqrt{11-6\sqrt{2}},\\
x^2 &= 11 + 6\sqrt{2} + 2\cdot\sqrt{11+6\sqrt{2}}\cdot\sqrt{11-6\sqrt{2}} + 11 - 6\sqrt{2} =\\
&= 22 + 2\sqrt{(11+6\sqrt{2})(11-6\sqrt{2})} =\\
&= 22 + 2\sqrt{11^2 - 6^2\cdot 2} = 22 + 2\sqrt{121-72} = 22 + 2\sqrt{49} = 22 + 14 =\\
&= 36.
\end{aligned}$$

Ponieważ liczba x jest dodatnia, więc $x = 6$. Drugi sposób polega na zauważeniu, że liczby podpierwiastkowe są kwadratami:

$$\sqrt{11+6\sqrt{2}} + \sqrt{11-6\sqrt{2}} = \sqrt{(3+\sqrt{2})^2} + \sqrt{(3-\sqrt{2})^2} = 3 + \sqrt{2} + \left|3-\sqrt{2}\right| = 6.$$

Wzory skróconego mnożenia są wykorzystywane do rozkładania wyrażeń na czynniki. Tego tematu nie będę tu rozwijał; w prawie każdym zbiorze zadań z algebry znajduje się wiele zadań na ten temat.

Jednym z zastosowań wzorów skróconego mnożenia jest rozwiązywanie równań kwadratowych. Nie wyprowadzam wzorów ogólnych na pierwiastki ani nie przeprowadzam dyskusji rozwiązalności w zależności od znaku wyróżnika Δ. Pokazuję na przykładach, jak takie równania można rozwiązać tzw. metodą uzupełniania do kwadratu. Popatrzmy na przykład; rozwiążemy równanie

$$x^2 + 8x + 15 = 0.$$

Patrzymy na pierwsze dwa składniki: x^2+8x. Zauważamy, że są to pierwsze dwa składniki kwadratu

$$(x+4)^2 = x^2 + 8x + 16.$$

Zatem do obu stron równania dodajemy 1:

$$x^2 + 8x + 16 = 1,$$
$$(x+4)^2 = 1.$$

Teraz mamy dwie możliwości:

$$x + 4 = 1 \quad \text{lub} \quad x + 4 = -1.$$

Pierwsza możliwość daje $x_1 = -3$, druga daje $x_2 = -5$. Zwracam uwagę, że otrzymaliśmy dwa rozwiązania. Pokazuję również przykład, gdy równanie kwadratowe ma jedno rozwiązanie oraz gdy nie ma rozwiązania.

Zauważmy, że uczniowie widzą już dwie metody rozwiązywania prostych równań kwadratowych. Oprócz metody uzupełniania do kwadratu, znają metodę rozkładu na czynniki. Rozkład

$$x^2 + 8x + 15 = (x+3)(x+5)$$

można łatwo odgadnąć.

Uważam, że również w liceum warto najpierw pokazać metodę uzupełniania do kwadratu, a potem wyprowadzić wzory; uczniowie lepiej rozumieją, skąd się te wzory wzięły.

Pokazuję jeszcze jedno zastosowanie wzorów skróconego mnożenia do rozwiązywania równań; tym razem są to pewne układy równań. A oto zadania:

22. Udowodnij, że $(a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab$ oraz, korzystając z tego wzoru, znajdź liczby rzeczywiste a i b takie, że:

a) $a + b = 7, \quad ab = 12,$
b) $a + b = 9, \quad ab = 8,$
c) $a - b = 2, \quad ab = 35,$
d) $a - b = -1, \quad ab = 20.$

23. Przedstaw liczby a i b w postaci $a = s + t$, $b = s - t$ dla odpowiednio dobranej liczby s, a następnie korzystając ze wzoru: $(s+t)(s-t) = s^2 - t^2$, znajdź liczby rzeczywiste a i b takie, że:

a) $a + b = -6, \quad ab = 8,$
b) $a + b = 4, \quad ab = 4,$
c) $a + b = 6, \quad ab = 10,$
d) $a + b = 2, \quad ab = 2.$

24. Przedstaw liczby a i b w postaci $a = s + t$, $b = s - t$ dla odpowiednio dobranej liczby s, a następnie korzystając ze wzoru: $(s+t)^2 + (s-t)^2 = 2(s^2 + t^2)$, znajdź liczby rzeczywiste a i b takie, że:

a) $a + b = 7, \quad a^2 + b^2 = 25,$
b) $a + b = 7, \quad a^2 + b^2 = 29,$
c) $a + b = 10, \quad a^2 + b^2 = 68,$
d) $a + b = 10, \quad a^2 + b^2 = 178.$

Popatrzmy też na przykładowe rozwiązania. Niech $a + b = 7$ i $ab = 12$. Te liczby podstawmy do wzoru

$$(a + b)^2 - (a - b)^2 = 4ab.$$

Mamy

$$7^2 - (a - b)^2 = 4 \cdot 12,$$

skąd dostajemy $(a-b)^2 = 1$. Teraz większość uczniów pisze, że $a-b = 1$ i szybko znajdują jedno rozwiązanie:

$$a = 4, \quad b = 3.$$

Należy uświadomić uczniom, że istnieje także druga możliwość: $a - b = -1$, prowadząca do rozwiązania symetrycznego:

$$a = 3, \quad b = 4.$$

Inny sposób rozwiązania polega na zauważeniu, że jeśli $a + b = 7$, to a można zapisać w postaci $a = 3{,}5 + x$ dla pewnego x, a b można zapisać w postaci $b = 3{,}5 - x$ dla **tej samej** liczby x. Mówiąc inaczej, liczby a i b różnią się od 3,5 o tyle samo: jedna na plus, druga na minus. Mamy wtedy

$$(3{,}5 + x) \cdot (3{,}5 - x) = 12,$$

czyli

$$(3{,}5)^2 - x^2 = 12.$$

Teraz dostajemy

$$x^2 = (3{,}5)^2 - 12 = 0{,}25.$$

Zatem $x = \pm 0{,}5$ i stąd dostajemy oba rozwiązania. Wreszcie, jeśli wiemy, że $a^2+b^2 = 25$, to w tej drugiej metodzie dostaniemy równanie

$$(3{,}5 + x)^2 + (3{,}5 - x)^2 = 25,$$

czyli

$$2\big((3{,}5)^2 + x^2\big) = 25.$$

Rozwiązując to równanie otrzymamy znów $x^2 = 0{,}25$ i dostaniemy znane nam już rozwiązania.

Znajdowanie liczb a i b, jeśli znane są ich suma i iloczyn, pozwala oczywiście rozkładać na czynniki trójmiany kwadratowe, a więc także rozwiązywać równania kwadratowe. Uczniowie widzą teraz dwie metody rozwiązywania równań kwadratowych i tylko maleńki krok dzieli ich od zauważenia, że znalezienie rozwiązań równania i rozłożenie trójmianu na czynniki to zagadnienia w istocie równoważne.

Dowodzenie nierówności

Ostatnim zastosowaniem wzorów skróconego mnożenia, które pokazuję moim uczniom, jest dowodzenie nierówności. Nierówności występują bardzo często w zadaniach olimpijskich na każdym poziomie (zarówno w OMG, jak i w OM). Umiejętność dowodzenia nierówności jest wielką sztuką, której poświęcono wiele książek ([Kourliandtchik], [Mitrinović]) oraz zbiorów zadań (dla gimnazjalistów na przykład [Kubica-Szymczyk]).

Zaczynam od podania podstawowych własności relacji mniejszości w zbiorze liczb rzeczywistych. Oto one:

1) Jeśli $a \le b$ i $c \le d$, to $a + c \le b + d$.
2) Jeśli $a \le b$ i $c > 0$, to $ac \le bc$.
3) Jeśli $a \le b$ i $c < 0$, to $ac \ge bc$.
4) Jeśli $0 < a \le b$ i $0 < c \le d$, to $ac \le bd$.
5) Jeśli $0 < a \le b$, to $a^2 \le b^2$.
6) Jeśli $a, b > 0$ i $a^2 \le b^2$, to $a \le b$.
7) Jeśli $a \in \mathbb{R}$, to $a^2 \ge 0$.

Te własności podaję uczniom bez dowodu; można powiedzieć, że są to aksjomaty nierówności. Krótko je omawiam i pokazuję, że niektóre można łatwo uogólnić; na przykład, można udowodnić własności analogiczne do 5) i 6) dla wyższych potęg. Teraz przystępujemy do dowodzenia nierówności. Zaczynam od porównywania liczb zapisanych za pomocą pierwiastków. Popatrzmy na kilka przykładów.

25. Która liczba jest większa:

a) $1 + \sqrt{2}$ czy $4 - \sqrt{3}$?
b) $1 + \sqrt{2}$ czy $4 - \sqrt[3]{3}$?
c) $\sqrt{146} - 12$ czy $12 - \sqrt{142}$?
d) $324\sqrt{11} + 995$ czy $574\sqrt{13}$?

Oczywiście uczniowie chcą po prostu obliczyć te liczby na kalkulatorze i porównać ich przybliżenia dziesiętne. W pierwszym przykładzie to działa; kalkulator ośmiocyfrowy pokazuje, że:

$$1 + \sqrt{2} \approx 2{,}4142135, \qquad 4 - \sqrt{3} \approx 2{,}2679492.$$

Zatem

$$1 + \sqrt{2} > 4 - \sqrt{3}.$$

Trudniej jest z przykładem drugim. Nie wszyscy uczniowie mają kalkulatory, które obliczają pierwiastki trzeciego stopnia; ci, którzy takie kalkulatory mają, nie zawsze umieją z nich prawidłowo korzystać. Obliczenia na kalkulatorze pokazują, że

$$1 + \sqrt{2} \approx 2{,}4142135, \qquad 4 - \sqrt[3]{3} \approx 2{,}5577504,$$

a więc tym razem mamy

$$1 + \sqrt{2} < 4 - \sqrt[3]{3}.$$

W przykładzie trzecim mamy

$$\sqrt{146} - 12 \approx 0{,}083045, \qquad 12 - \sqrt{142} \approx 0{,}083625.$$

Różnica jest znacznie mniejsza, ale ciągle wystarczająco duża, by powiedzieć, która liczba jest większa. Przykład czwarty jest jednak bardziej złośliwy. Nawet kalkulator jedenastocyfrowy nie pokaże różnicy. Obie liczby dadzą przybliżenie 2069,5864321 i nie będziemy wiedzieli, która z nich jest większa. Dopiero dokładniejszy kalkulator pokaże różnicę:

$$324\sqrt{11} + 995 \approx 2069{,}5864320751, \qquad 574\sqrt{13} \approx 2069{,}5864321163.$$

Obliczenia przeprowadzone na kalkulatorze pokazują kilka problemów. Pierwszy z nich to kwestia działań dostępnych na kalkulatorze; drugi to dokładność obliczeń. Wiemy, że kalkulator oblicza pierwiastki z przybliżeniem; nie wiemy jednak, jaka jest wielkość błędu. Jeśli przybliżony wynik mnożymy na przykład przez 574, to błąd się powiększa. Nie mamy przy tym kontroli nad wielkością tego błędu. Jeśli zatem dostrzeżemy różnicę na jedenastym miejscu, to nie wiemy, czy jest to rzeczywista różnica, czy wynik zwielokrotnionego błędu. Te problemy pokazują, że warto mieć jakąś metodę porównywania takich liczb, dającą wynik dokładny. Taką metodę pokazuję uczniom. Popatrzmy na przykład pierwszy. Chcę udowodnić nierówność

$$1+\sqrt{2} > 4-\sqrt{3}.$$

Korzystając z własności 1) – 7), przekształcam ją w sposób równoważny:

$$\begin{gathered}\sqrt{2} > 3-\sqrt{3},\\ 2 > (3-\sqrt{3})^2,\\ 2 > 9-6\sqrt{3}+3,\\ 6\sqrt{3} > 10,\\ 3\sqrt{3} > 5,\\ 27 > 25.\end{gathered}$$

Ostatnia nierówność jest prawdziwa, więc pierwsza też była prawdziwa. Należy tu zwrócić uwagę na to, że za każdym razem, gdy podnosiliśmy do kwadratu obie strony nierówności, po obu stronach stały liczby dodatnie (i to trzeba sprawdzić!).

Z drugą nierównością jest maleńki kłopot: nie widać, czy trzeba będzie podnosić obie strony nierówności do kwadratu, czy do trzeciej potęgi. Okazuje się, że trzecia potęga jest lepsza (polecam sprawdzenie, w jakie kłopoty wpakujemy się, podnosząc obie strony do kwadratu). A oto obliczenia:

$$\begin{gathered}1+\sqrt{2} < 4-\sqrt[3]{3},\\ \sqrt[3]{3} < 3-\sqrt{2},\\ 3 < (3-\sqrt{2})^3,\\ 3 < 27-27\sqrt{2}+18-2\sqrt{2},\\ 29\sqrt{2} < 42,\\ 29^2\cdot 2 < 42^2,\\ 1682 < 1764.\end{gathered}$$

Dowód trzeciej nierówności pozostawię jako ćwiczenie. Jest to szczególny przypadek nierówności

$$\sqrt{n^2+k}-n < n-\sqrt{n^2-k},$$

gdzie $0 < k < n^2$. W naszym zadaniu mamy: $n = 12$ i $k = 2$. Dowód tej ogólnej nierówności jest następujący:

$$\sqrt{n^2+k}-n < n-\sqrt{n^2-k},$$

$$\begin{aligned}
\sqrt{n^2+k} &< 2n-\sqrt{n^2-k},\\
n^2+k &< 4n^2-4n\sqrt{n^2-k}+n^2-k,\\
4n\sqrt{n^2-k} &< 4n^2-2k,\\
2n\sqrt{n^2-k} &< 2n^2-k,\\
4n^2(n^2-k) &< (2n^2-k)^2,\\
4n^4-4n^2k &< 4n^4-4n^2k+k^2,\\
0 &< k^2.
\end{aligned}$$

W końcu popatrzmy na dowód ostatniej nierówności. Znów zaczynamy przekształcać ją w sposób równoważny:

$$\begin{aligned}
324\sqrt{11}+995 &< 574\sqrt{13},\\
(324\sqrt{11}+995)^2 &< 574^2\cdot 13,\\
324^2\cdot 11+2\cdot 324\cdot 995\sqrt{11}+995^2 &< 4283188,\\
2144761+644760\sqrt{11} &< 4283188,\\
644760\sqrt{11} &< 2138427.
\end{aligned}$$

Do tego momentu wszystkie obliczenia można było łatwo wykonać na kalkulatorze ośmiocyfrowym, jednak teraz podniesienie obu stron do kwadratu może być kłopotliwe. Jest to oczywiście dobry moment do tego, by nauczyć uczniów mnożenia liczb nawet ośmiocyfrowych na kalkulatorze ośmiocyfrowym (trzeba podzielić obie liczby na dwa bloki czterocyfrowe, wykonać mnożenia bloków i potem dodać je odpowiednio przesunięte). W tym przykładzie jednak możemy postąpić inaczej. Wystarczy zauważyć, że liczby całkowite po obu stronach dzielą się przez 3, potem jeszcze raz przez 3 i jeszcze raz. Po podzieleniu przez 27 (lub trzykrotnie przez 3) otrzymamy nierówność

$$23880\sqrt{11} < 79201.$$

Teraz podniesienie obu stron do kwadratu jest już łatwe:

$$(23880\sqrt{11})^2 = 2388^2\cdot 11\cdot 100 = 6272798400$$

oraz:

$$\begin{aligned}
79201^2 &= (79200+1)^2 = 792^2\cdot 10000+2\cdot 79200+1 = 6272640000+158400+1 =\\
&= 6272798401.
\end{aligned}$$

Wszystkie działania, z wyjątkiem ostatniego dodawania można wykonać na kalkulatorze ośmiocyfrowym; to ostatnie dodawanie można wykonać w pamięci.

Porównywanie liczb w taki sposób miało jeszcze jeden cel. Chodziło o to, by pokazać metodę dowodzenia nierówności: przekształcamy tę nierówność w sposób równoważny dotąd, aż otrzymamy nierówność w sposób oczywisty prawdziwą. Definiuję zatem nierówności równoważne (obie są prawdziwe lub obie fałszywe) i podaję uczniom cztery metody otrzymywania nierówności równoważnych z danej nierówności:

1) do obu stron nierówności można dodać tę samą liczbę;

2) obie strony nierówności można pomnożyć przez tę samą liczbę dodatnią;
3) obie strony nierówności można pomnożyć przez tę samą liczbę ujemną, zmieniając kierunek nierówności na przeciwny;
4) obie strony nierówności można podnieść do kwadratu, o ile obie były dodatnie.

Wyjaśniam uczniom (nie dowodząc tego szczegółowo), że te reguły wynikają z pokazanych na początku siedmiu aksjomatów. Teraz stosujemy tę metodę dowodzenia nierówności do dowodu kilku najprostszych nierówności.

26. Udowodnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b, c, d (takich, że b i d są różne od zera) prawdziwe są następujące nierówności:

a) jeśli $\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d}$, to $\frac{a+b}{b} \leq \frac{c+d}{d}$,

b) jeśli b i d są liczbami dodatnimi oraz $\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d}$, to $\frac{a}{b} \leq \frac{a+c}{b+d} \leq \frac{c}{d}$.

27. Udowodnij następujące nierówności:

a) $a^2 + b^2 \geq 2ab$,

b) $a^2 - ab + b^2 \geq ab$,

c) $(a^2 - b^2)^2 \geq 4ab(a-b)^2$,

d) $\frac{a}{1+a^2} \leq \frac{1}{2}$,

e) $a^2 + ab + b^2 \geq 0$,

f) $a^2 - ab + b^2 \geq 0$,

g) $a^2 + b^2 + 1 \geq ab + a + b$.

28. Udowodnij, że:

a) jeśli $a > 0$, to $a + \frac{1}{a} \geq 2$,

b) jeśli $a < 0$, to $a + \frac{1}{a} \leq -2$,

c) jeśli $ab > 0$, to $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$.

29. Udowodnij, że jeśli $0 < a \leq b$, to

$$a \leq \frac{2ab}{a+b} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \leq b.$$

Parę słów komentarza do tych zadań. W pierwszym dowodzie uczniowie często mnożą obie strony dowodzonej nierówności przez bd, nie zastanawiając się nad znakiem tego iloczynu. Metoda jest oczywiście poprawna: będziemy jeszcze raz dzielić przez bd i kierunek nierówności — jeśli się zmienia — to zmienia się dwa razy. Trzeba jednak zwrócić na to uwagę. Prostszy dowód polega na dodaniu do obu stron jedynki. Dowód następnej nierówności polega na pomnożeniu obu stron przez wspólny mianownik.

Pierwsze dwa przykłady następnego zadania polegają na doprowadzeniu do nierówności $(a-b)^2 \geq 0$. Często dowód nierówności polega na doprowadzeniu jej do podobnej postaci: kwadrat jakiegoś wyrażenia jest nieujemny. W następnej nierówności częste jest rozumowanie następujące:

$$
\begin{aligned}
(a^2-b^2)^2 &\geq 4ab(a-b)^2,\\
(a-b)^2(a+b)^2 &\geq 4ab(a-b)^2,\\
(a+b)^2 &\geq 4ab.
\end{aligned}
$$

Oczywiście trzeba zwrócić uwagę na dzielenie obu stron przez $(a-b)^2$. Uczniowie często nie widzą problemu, bo przecież „kwadrat jest liczbą dodatnią". Rozumowanie jest poprawne, jeśli oddzielnie rozpatrzy się przypadek $a=b$; jednak bardziej elegancki jest chyba dowód następujący:

$$
\begin{aligned}
(a^2-b^2)^2 &\geq 4ab(a-b)^2,\\
(a-b)^2(a+b)^2 &\geq 4ab(a-b)^2,\\
(a-b)^2(a+b)^2-4ab(a-b)^2 &\geq 0,\\
(a-b)^2\big((a+b)^2-4ab\big) &\geq 0,\\
(a-b)^2(a^2-2ab+b^2) &\geq 0,\\
(a-b)^4 &\geq 0.
\end{aligned}
$$

Następna nierówność polega po prostu na pomnożeniu obu stron przez wspólny mianownik i zauważeniu, że jest on dodatni. Kolejne dwie nierówności polegają na odpowiednim grupowaniu. Możemy rozumować następująco:

$$a^2+ab+b^2=a^2+ab+\frac{b^2}{4}+\frac{3b^2}{4}=\left(a+\frac{b}{2}\right)^2+\frac{3b^2}{4}.$$

Można też pomnożyć obie strony przez 2 i zauważyć, że

$$2a^2+2ab+2b^2=a^2+(a+b)^2+b^2.$$

Dowód wielu nierówności polega na doprowadzeniu jej do postaci: suma kwadratów pewnych wyrażeń algebraicznych jest nieujemna. W szczególności ostatnią nierówność tego zadania można doprowadzić do postaci

$$(a-b)^2+(a-1)^2+(b-1)^2\geq 0.$$

Jest to szczególny przypadek nierówności

$$a^2+b^2+c^2\geq ab+ac+bc,$$

którą doprowadzamy do postaci

$$(a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2\geq 0.$$

Przyjęcie $c=1$ ułatwia dostrzeżenie takiej postaci, bo mamy tylko jeden iloczyn ab i łatwiej dostrzec, że pojawi się on w kwadracie różnicy.

Następne zadanie dane jest po to, by uczniowie zapamiętali nierówności dotyczące sumy liczby i jej odwrotności. Wreszcie ostatnie zadanie wprowadza cztery różne średnie: harmoniczną, geometryczną, arytmetyczną i kwadratową. Pojawiają się naturalne pytania o to, czy istnieją jeszcze jakieś inne średnie i o to, jak wyglądają te średnie dla wielu liczb. Podaję uczniom nierówności między średnimi w całej ogólności i radzę, by je zapamiętali. Pokazuję tylko dowody dwóch szczególnych przypadków. Najpierw pokazuję dowód nierówności między średnią arytmetyczną i geometryczną dla czterech liczb:

$$\frac{a+b+c+d}{4} = \frac{\frac{a+b}{2}+\frac{c+d}{2}}{2} \geq \frac{\sqrt{ab}+\sqrt{cd}}{2} \geq \sqrt{\sqrt{ab}\cdot\sqrt{cd}} = \sqrt{\sqrt{abcd}} = \sqrt[4]{abcd}.$$

Następnie dowodzę tej nierówności dla trzech liczb:

$$\sqrt[3]{abc} \leq \frac{a+b+c}{3}.$$

Wprowadzam czwartą liczbę

$$d = \frac{a+b+c}{3}$$

i korzystam z udowodnionej nierówności dla czterech liczb:

$$\sqrt[4]{abcd} \leq \frac{a+b+c+d}{4} = \frac{3d+d}{4} = d.$$

Zatem $abcd \leq d^4$, czyli $abc \leq d^3$. Stąd ostatecznie dostajemy

$$\sqrt[3]{abc} \leq d = \frac{a+b+c}{3}.$$

Mówię uczniom, że dowód ogólny (przez indukcję) wykorzystuje obie pokazane wyżej sztuczki, ale oczywiście go nie pokazuję.

Następne zadanie polega na odpowiednim grupowaniu.

30. Udowodnij, że

a) jeśli $a, b > 0$, to $(a+b)(a^4+b^4) \geq (a^2+b^2)(a^3+b^3)$,

b) $\dfrac{a+b}{2}\cdot\dfrac{a^3+b^3}{2} \leq \dfrac{a^4+b^4}{2}$,

c) jeśli $a+b \geq 0$, to $a^3+b^3 \geq a^2b+ab^2$,

d) $(a^2+b^2)(a^4+b^4) \geq (a^3+b^3)^2$.

Te nierówności doprowadzamy odpowiednio do postaci

$$ab(a+b)(a-b)^2 \geq 0,$$
$$(a-b)^2(a^2+ab+b^2) \geq 0,$$
$$(a+b)(a-b)^2 \geq 0,$$
$$a^2b^2(a-b)^2 \geq 0.$$

Interesujący jest następujący ciąg nierówności:

31. Udowodnij, że:

a) jeśli $a, b > 0$ oraz $a+b=1$, to $ab \leq \frac{1}{4}$,

b) jeśli $a, b > 0$ oraz $a+b=1$, to $a^2+b^2 \geq \frac{1}{2}$,

c) jeśli $a, b > 0$ oraz $a + b = 1$, to $a^4 + b^4 \geq \frac{1}{8}$,
d) jeśli $a, b > 0$ oraz $a + b = 1$, to $a^8 + b^8 \geq \frac{1}{128}$,
e) jeśli $a, b > 0$ oraz $a + b = 1$, to $a^3 + b^3 \geq \frac{1}{4}$,
f) jeśli $a, b > 0$ oraz $a + b = 1$, to $a^5 + b^5 \geq \frac{1}{16}$,
g) jeśli $a, b > 0$ oraz $a + b = 1$, to $a^6 + b^6 \geq \frac{1}{32}$,
h) jeśli $a, b > 0$ oraz $a + b = 1$, to $a^7 + b^7 \geq \frac{1}{64}$,

Ta nienaturalna kolejność zadań jest spowodowana dwiema metodami dowodzenia; przyjrzyjmy się im. We wszystkich zadaniach mamy założenia: $a, b > 0$ oraz $a+b = 1$. Najpierw dowodzimy, że $ab \leq \frac{1}{4}$. Możemy na przykład skorzystać z nierówności między średnimi:

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2},$$
$$\sqrt{ab} \leq \frac{1}{2},$$
$$ab \leq \frac{1}{4}.$$

Możemy też napisać naszą nierówność w postaci

$$ab \leq \frac{(a+b)^2}{4}$$

i doprowadzić ją do postaci $(a-b)^2 \geq 0$. Możemy wreszcie podstawić $b = 1-a$ i dowodzić nierówności

$$a(1-a) \leq \frac{1}{4},$$
$$a - a^2 \leq \frac{1}{4},$$
$$4a - 4a^2 \leq 1,$$
$$4a^2 - 4a + 1 \geq 0,$$
$$(2a-1)^2 \geq 0.$$

Teraz dowodzimy kolejnych nierówności:

$$a + b = 1,$$
$$(a+b)^2 = 1,$$
$$a^2 + 2ab + b^2 = 1,$$
$$a^2 + b^2 = 1 - 2ab,$$
$$a^2 + b^2 \geq 1 - 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

Ostatnia nierówność wynika z tego, że $ab \leq \frac{1}{4}$. Teraz

$$a^2 + b^2 \geq \frac{1}{2},$$
$$(a^2 + b^2)^2 \geq \frac{1}{4},$$
$$a^4 + 2a^2b^2 + b^4 \geq \frac{1}{4},$$
$$a^4 + b^4 \geq \frac{1}{4} - 2(ab)^2.$$

Ponieważ $ab < \frac{1}{4}$ oraz $ab > 0$, więc $(ab)^2 \le \frac{1}{16}$. Zatem

$$a^4 + b^4 \ge \frac{1}{4} - 2 \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{8}.$$

W podobny sposób dowodzimy następnej nierówności. Dowód kolejnej wymaga grupowania:

$$\begin{aligned}
(a+b)(a^2+b^2) &\ge 1 \cdot \frac{1}{2},\\
a^3 + a^2b + ab^2 + b^3 &\ge \frac{1}{2},\\
a^3 + b^3 &\ge \frac{1}{2} - (a^2b + ab^2),\\
a^3 + b^3 &\ge \frac{1}{2} - ab(a+b),\\
a^3 + b^3 &\ge \frac{1}{2} - ab,\\
a^3 - b^3 &\ge \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

Podobne grupowanie lub podnoszenie do kwadratu daje następne nierówności.

Można udowodnić nierówność ogólniejszą:

Twierdzenie. Jeśli $a + b = 1$, to $a^n + b^n \ge \dfrac{1}{2^{n-1}}$.

W dowodzie wykorzystujemy jeszcze raz sztuczkę, którą widzieliśmy przy rozwiązywaniu układów równań. Jeśli $a + b = 1$, to istnieje liczba x taka, że

$$a = \frac{1}{2} + x \quad \text{oraz} \quad b = \frac{1}{2} - x.$$

Teraz dla dowolnej dodatniej liczby p ze wzoru dwumianowego Newtona mamy

$$\begin{aligned}
(p+x)^n &= p^n + \binom{n}{1}p^{n-1}x + \binom{n}{2}p^{n-2}x^2 + \binom{n}{3}p^{n-3}x^3 + \binom{n}{4}p^{n-4}x^4 + \ldots\\
(p-x)^n &= p^n - \binom{n}{1}p^{n-1}x + \binom{n}{2}p^{n-2}x^2 - \binom{n}{3}p^{n-3}x^3 + \binom{n}{4}p^{n-4}x^4 - \ldots
\end{aligned}$$

Po dodaniu stronami, otrzymamy

$$(p+x)^n + (p-x)^n = 2p^n + 2\binom{n}{2}p^{n-2}x^2 + 2\binom{n}{4}p^{n-4}x^4 + \ldots$$

Zauważamy, że po prawej stronie mamy tylko parzyste potęgi x. Ponieważ $p > 0$, więc wszystkie składniki sumy po prawej stronie są nieujemne. Stąd

$$(p+x)^n + (p-x)^n \ge 2p^n.$$

Po podstawieniu $p = \frac{1}{2}$ otrzymamy dowodzoną nierówność.

Warto pokazać uczniom ten dowód dla kilku wybranych n, na przykład dla $n = 4$ oraz $n = 5$. Takie dwa przykłady pokazują jasno, o co chodzi w dowodzie i uczniowie będą widzieli, że dla każdego wykładnika dowód będzie taki sam. Dla $n = 5$ mamy:

$$\begin{aligned}(p+x)^5 &= p^5 + 5p^4x + 10p^3x^2 + 10p^2x^3 + 5px^4 + x^5,\\(p-x)^5 &= p^5 - 5p^4x + 10p^3x^2 - 10p^2x^3 + 5px^4 - x^5.\end{aligned}$$

Po dodaniu stronami dostajemy

$$(p+x)^5 + (p-x)^5 = 2p^5 + 20p^3x^2 + 10px^4 \geq 2p^5.$$

Popatrzmy na jeszcze jedno zadanie.

32. Udowodnij, że:

a) jeśli $a, b > 0$, to $(a+b)\cdot\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) \geq 4$,

b) jeśli $a, b, c > 0$, to $(a+b+c)\cdot\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \geq 9$,

c) jeśli $a, b, c > 0$, to $(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$,

d) jeśli $a, b > 0$ i $a + b = 1$, to $\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right) \geq 9$,

e) $a(1+b^2) + b(1+a^2) \leq (1+a^2)(1+b^2)$.

W dowodach pierwszych dwóch nierówności zobaczymy liczby i ich odwrotności. Trzecia sprowadza się do nierówności między średnimi:

$$\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{8} = \frac{a+b}{2}\cdot\frac{b+c}{2}\cdot\frac{c+a}{2} \geq \sqrt{ab}\cdot\sqrt{bc}\cdot\sqrt{ca} = abc.$$

Czwarta nierówność sprowadza się łatwo do nierówności $ab \leq \frac{1}{4}$. Ostatnia nierówność wynika z tego, że $\frac{a}{1+a^2} \leq \frac{1}{2}$. Inny dowód polega na pomnożeniu obu stron przez 2 i grupowaniu:

$$\begin{aligned}&2(1+a^2)(1+b^2) - 2a(1+b^2) - 2b(1+a^2) =\\&\quad= (1+a^2)(1+b^2) - 2a(1+b^2) + (1+a^2)(1+b^2) - 2b(1+a^2) =\\&\quad= (1+b^2)(1+a^2-2a) + (1+a^2)(1+b^2-2b) =\\&\quad= (1+a^2)(1-a)^2 + (1+b^2(1-b)^2 \geq 0.\end{aligned}$$

Wiele nierówności można udowodnić za pomocą znanego twierdzenia o nierównościach kwadratowych:

Twierdzenie. Jeśli $a > 0$ oraz $b^2 - 4ac \leq 0$, to dla każdej liczby rzeczywistej x prawdziwa jest nierówność

$$ax^2 + bx + c \geq 0.$$

Jeśli natomiast $b^2 - 4ac < 0$, to dla każdej liczby rzeczywistej x prawdziwa jest nierówność ostra

$$ax^2 + bx + c > 0.$$

Dowód polega na przekształcaniu tej nierówności w sposób równoważny. Zaczynamy od pomnożenia obu stron przez liczbę dodatnią $4a$:

$$\begin{gathered}ax^2+bx+c\geq 0,\\ 4a^2x^2+4abx+4ac\geq 0,\\ 4a^2x^2+4abx\geq -4ac,\\ 4a^2x^2+4abx+b^2\geq b^2-4ac,\\ (2ax+b)^2\geq b^2-4ac.\end{gathered}$$

Ostatnia nierówność jest prawdziwa dla każdego x: lewa strona jest kwadratem, a prawa jest niedodatnia z założenia. Jeśli $b^2-4ac<0$, to prawdziwa jest nierówność ostra.

Zastosujmy to twierdzenie do dowodu trzech znanych nam już nierówności. Najpierw

$$a^2+ab+b^2\geq 0.$$

Napiszmy x zamiast a:

$$x^2+bx+b^2\geq 0.$$

Współczynnik przy x^2 jest dodatni. Wystarczy zatem zauważyć, że $b^2-4b^2=-3b^2\leq 0$.

Weźmy następną nierówność:

$$a^2+b^2+c^2\geq ab+ac+bc.$$

Ponownie napiszmy x zamiast a i przegrupujmy:

$$\begin{gathered}x^2+b^2+c^2-bx-cx-bc\geq 0,\\ x^2-(b+c)x+(b^2-bc+c^2)\geq 0.\end{gathered}$$

Współczynnik przy x^2 znowu jest dodatni. Obliczamy zatem wyróżnik trójmianu:

$$\big(-(b+c)\big)^2-4(b^2-bc+c^2)=b^2+2bc+c^2-4b^2+4bc-4c^2=-3(b-c)^2\leq 0.$$

Wreszcie trzecia nierówność:

$$a(1+b^2)+b(1+a^2)\leq (1+a^2)(1+b^2).$$

Wykonajmy działania i pogrupujmy według potęg a:

$$\begin{gathered}a(1+b^2)+b+a^2b\leq 1+b^2+a^2(1+b^2),\\ a^2(b^2-b+1)-a(b^2+1)+(b^2-b+1)\geq 0.\end{gathered}$$

Współczynnik b^2-b+1 przy a^2 jest dodatni. Można to udowodnić na przykład za pomocą tego samego twierdzenia. Teraz obliczamy wyróżnik:

$$\begin{aligned}(b^2+1)^2-4(b^2-b+1)^2&=(b^2+1)^2-\big(2(b^2-b+1)\big)^2=\\ &=\big((b^2+1)+2(b^2-b+1)\big)\cdot\big((b^2+1)-2(b^2-b+1)\big)=\\ &=(3b^2-2b+3)(-b^2+2b-1)=-(b-1)^2(3b^2-2b+3).\end{aligned}$$

Teraz wystarczy jeszcze raz skorzystać z tego samego twierdzenia, by pokazać, że dla każdego b zachodzi nierówność $3b^2-2b+1>0$.

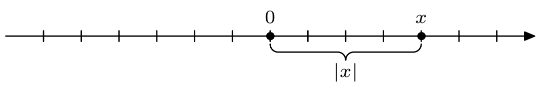
Zauważmy, że zastosowanie twierdzenia o nierównościach kwadratowych pozwoliło zastąpić rozwiązanie wymagające pomysłu rozwiązaniem rutynowym, często praktycznie automatycznym. Dlatego to twierdzenie warto pokazać gimnazjalistom przygotowującym się do zawodów matematycznych.

7. Wartość bezwzględna

Metoda geometryczna

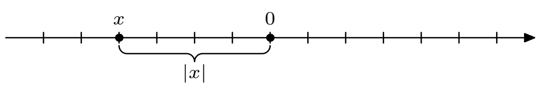
W tym rozdziale pokażę, w jaki sposób interpretacja geometryczna wartości bezwzględnej jako odległości punktów na osi liczbowej pozwala rozwiązywać równania i nierówności z wartością bezwzględną na poziomie gimnazjum. Uczniowie często słyszeli o wartości bezwzględnej już w szkole podstawowej (na przykład na kółkach) i wiedzą, że np. $|5| = 5$ oraz $|-4| = 4$. Od tego też zaczynam. Mówię uczniom, że obliczanie wartości bezwzględnej liczby polega na usunięciu jej znaku. Liczby dodatnie (oraz zero) zapisujemy zwykle bez znaku; wartość bezwzględna takiej liczby jest więc jej równa. Liczby ujemne zapisujemy ze znakiem „minus” poprzedzającym liczbę; obliczenie wartości bezwzględnej liczby ujemnej polega na zapisaniu tej samej liczby, ale z pominięciem znaku minus. Teraz przechodzę do interpretacji geometrycznej.

Zaznaczam liczbę x na osi liczbowej. Musimy przypomnieć sobie, co to jest oś liczbowa i gdzie na tej osi są umieszczone liczby dodatnie, zero i liczby ujemne. Wiemy, gdzie leży zero; to jest definicja osi. Oś liczbowa to przecież prosta z zaznaczonym na niej punktem zerowym, wybraną półprostą dla liczb dodatnich (na rysunkach najczęściej prawą, i tak przyjmijmy) i ustaloną jednostką. Następnie, jeśli liczba x jest dodatnia, to zaznaczamy ją na prawo od zera, w odległości x jednostek od zera. Ponieważ w tym przypadku $|x| = x$, więc tak naprawdę zaznaczyliśmy tę liczbę w odległości $|x|$ jednostek od zera (rys. 7.1).



Rys. 7.1

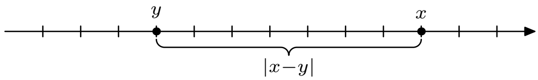
To było proste. Ważniejsze jest zrozumienie, gdzie na osi liczbowej leżą liczby ujemne. Wiemy, że na lewo od zera, ale gdzie konkretnie leży jakaś wybrana przez nas liczba ujemna? Popatrzmy najpierw na przykłady. Liczba -4 leży na lewo od zera w odległości 4 jednostek od niego, liczba $-7{,}3$ leży w odległości 7,3 jednostek od zera, też na lewo od niego. Tu widzimy, że tak naprawdę wartość bezwzględna liczby jest wpisana w definicję osi liczbowej. Liczba ujemna x leży na lewo od zera w odległości $|x|$ jednostek od niego (rys. 7.2).



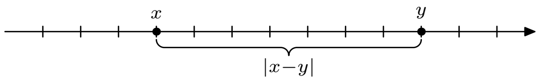
Rys. 7.2

Podsumowując: wartość bezwzględna liczby jest to po prostu odległość tej liczby od zera na osi liczbowej. Tu zwracam uwagę na równość $|0| = 0$. Oznacza ona tyle, że odległość liczby zero od siebie samej jest równa zero. To jest chyba naturalne dla uczniów. Teraz zajmiemy się obliczaniem odległości między dwiema dowolnymi liczbami na osi liczbowej. Znów zacznijmy od przykładów.

Odległość 5 od 7 jest równa 2. Liczba 5 leży na prawo od zera, w odległości 5 jednostek od niego. Liczba 7 leży też na prawo od zera, w odległości 7 jednostek od niego, a więc o 2 jednostki dalej. Kilka następnych przykładów tego typu (o ile rzeczywiście będą potrzebne) przekonuje uczniów, że odległość dwóch liczb obliczamy odejmując od **większej** z nich **mniejszą**. Jeśli od większej liczby odejmiemy mniejszą, to wynik będzie dodatni; jeśli odejmiemy odwrotnie, od mniejszej większą, to wynik będzie ujemny. Ale czym te dwa wyniki będą się różnić? Oczywiście tylko znakiem. Ten drugi ma wartość bezwzględną równą pierwszemu wynikowi. To powinno nas przekonać, że jest obojętne, którą liczbę odejmiemy od drugiej; mamy tylko wziąć wartość bezwzględną wyniku (rys. 7.3 i 7.4).



Rys. 7.3



Rys. 7.4

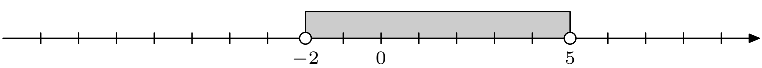
Oczywiście, jeśli $x = y$, to $|x - y| = 0$: odległość liczb x i y jest wtedy równa 0. Mamy także $|x - y| = |y - x|$ oraz, w szczególności, $|-x| = |x|$.

Naszym celem jest nauczenie uczniów rozwiązywania równań i nierówności z wartością bezwzględną. Zaczynam od kilku ćwiczeń wstępnych. Proszę uczniów najpierw o wymienienie liczb leżących w odległości 2 od zera. Najczęściej pada odpowiedź: 2; zapominają o liczbie -2. Jednak po zwróceniu im uwagi, na ogół już nie popełniają tego błędu. Natomiast zdarza się, że powtarzają ten błąd, gdy proszę o podanie liczb leżących w odległości 5 od 3. Znów najczęściej wymieniają tylko 8, zapominając o liczbie -2. Jednak po co najwyżej kilku przykładach sprawa staje się jasna i więcej takie błędy już się nie pojawiają. Gorzej jest z nierównościami.

Na pytanie, jakie liczby leżą w odległości mniejszej niż 3 od liczby 5, najczęściej pada odpowiedź: 3, 4, 6 i 7. Skąd ona się bierze? Przede wszystkim z przyzwyczajenia, wyniesionego chyba ze szkoły podstawowej, do rozwiązywania większości zadań w liczbach całkowitych. Po drugie — i to jest błąd nowy — z nieprzyswojenia sobie, że odległość może być równa 0, a więc liczba 5 też jest dobra.

Z tą drugą kwestią można sobie łatwo poradzić, ale trzeba o tym co najmniej kilkakrotnie przypominać. Z pierwszą jest gorzej. Zdarzało mi się zetknąć z tym błędem jeszcze pod koniec II klasy, gdy wydawało się, że sprawa jest dobrze wyjaśniona i utrwalona. Okazuje się, że przywiązanie do liczb całkowitych jest silniejsze, niż się wydaje. Przychodzi pora na wyjaśnienie, co to są przedziały, jak je zapisujemy i jak oznaczamy na osi liczbowej.

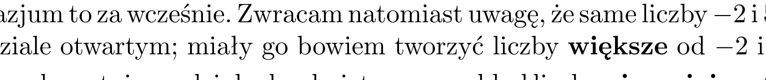
Liczby większe od -2 i jednocześnie mniejsze od 5 tworzą **przedział otwarty**, zaznaczany na osi liczbowej w sposób pokazany na rysunku 7.5



Rys. 7.5

i zapisywany jako $(-2, 5)$ lub $(-2; 5)$. Drugi sposób zapisu jest stosowany tylko wtedy, gdy mamy do czynienia z ułamkami dziesiętnymi. Zapis $(5, 6, 7)$ jest bowiem mylący: może być odczytany jako (5,6; 7) lub jako (5; 6,7). Jednak, jeśli nie ma ryzyka nieporozumienia, używam przecinka. Zwracam uwagę, że staram się nie mówić tu o zbiorach; na to przyjdzie pora później. Mówię, że te liczby **tworzą** przedział i nie mówię, że jest on **zbiorem** tych liczb. W przyszłości (w liceum) będziemy używać słowa „zbiór", ale jestem pewien, że I klasa gimnazjum to za wcześnie. Zwracam natomiast uwagę, że same liczby -2 i 5 już nie są w tym przedziale otwartym; miały go bowiem tworzyć liczby **większe** od -2 i **mniejsze** od 5.

Wprowadzam też przedziały domknięte; na przykład liczby **niemniejsze** (czyli większe lub równe) od -4 i jednocześnie **niewiększe** (a więc mniejsze lub równe) od 2 tworzą **przedział domknięty** $\langle -4, 2\rangle$, zaznaczany na osi liczbowej w sposób pokazany na rysunku 7.6.

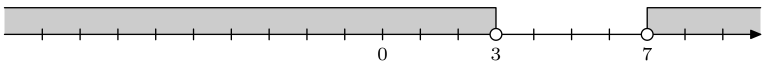


Rys. 7.6

Podkreślam różnicę w zaznaczaniu: końce przedziału zaznaczone są niewypełnionymi kółeczkami lub wypełnionymi kółeczkami, w zależności od tego, czy przedział jest otwarty, czy domknięty. Niektórzy uczniowie używają w przypadku przedziałów otwartych ukośnych kresek; mówię, że nie ma to znaczenia. Ważne są tak naprawdę kropki oznaczające końce.

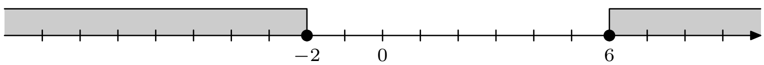
Na ogół nie definiuję przedziałów otwarto-domkniętych i domknięto-otwartych, bo takie w zadaniach nie wystąpią. Jeśli jednak uczniowie zapytają o możliwość włączenia do przedziału tylko jednego końca, to oczywiście tę kwestię wyjaśniam.

Większy problem mamy z zadaniem postaci: jakie liczby leżą w odległości większej niż 2 od liczby 5? Tu odpowiedź jest sumą dwóch przedziałów niewłaściwych. Otóż wtedy mówię, że wszystkie takie liczby zaznaczamy na osi liczbowej w sposób pokazany na rysunku 7.7.



Rys. 7.7

Są to liczby, które są mniejsze od 3 **lub** większe od 7. Natomiast liczby, które są niewiększe od -2 lub niemniejsze od 6, zaznaczamy na osi liczbowej w sposób pokazany na rysunku 7.8.



Rys. 7.8

Po kilku (lub kilkunastu) ćwiczeniach wstępnych, przechodzę do zapisywania tych pytań w postaci równań i nierówności. Pytanie o liczby odległe o 7 od zera jest tak naprawdę prośbą o rozwiązanie równania

$$|x| = 7.$$

Jak już uczniowie wiedzą, są dwie takie liczby, a więc to równanie ma dwa rozwiązania:

$$x_1 = -7, \quad x_2 = 7.$$

To ważny moment. Większość uczniów po raz pierwszy widzi, że równanie może mieć więcej niż jedno rozwiązanie. Zwracam też uwagę na to, że — w odróżnieniu od rozwiązywania równań pierwszego stopnia — nie stosujemy tutaj żadnego sposobu przekształcania równania do postaci równoważnej. Mianowicie odczytujemy tylko to, co zostało zapisane w równaniu, i podajemy odpowiedzi.

Po kilku przykładach równań tej najprostszej postaci przychodzi pora na podsumowanie. Rozważamy równania postaci

$$|x| = r,$$

gdzie r jest dowolną liczbą rzeczywistą. Jeśli $r < 0$, to nasze równanie nie ma rozwiązania: nie ma takich liczb rzeczywistych x, których odległość od zera byłaby liczbą ujemną. Jeśli $r = 0$, to nasze równanie ma tylko jedno rozwiązanie: $x = 0$. Jeśli wreszcie $r > 0$, to nasze równanie ma dwa rozwiązania:

$$x_1 = -r, \quad x_2 = r.$$

Następnie rozwiązujemy równania nieco ogólniejsze:

- równanie $|x-2| = -5$ nie ma rozwiązania;
- równanie $|x-3| = 0$ ma jedno rozwiązanie: $x = 3$;

- równanie $|x - 1| = 3$ ma dwa rozwiązania: $x_1 = -2$, $x_2 = 4$.

Trochę gorzej jest z odległościami od liczb ujemnych. Uczniowie muszą się przyzwyczaić do tego, że na przykład $|5-(-3)| = |5+3| = 8$ oraz, ogólniej, $|x-(-3)| = |x+3|$. Muszą nauczyć się zapisywać wartość bezwzględną sumy jako wartość bezwzględną różnicy. Rozwiążmy zatem równanie $|x+3| = 5$. Ponieważ $|x+3| = |x-(-3)|$, więc równanie to ma dwa rozwiązania:

$$x_1 = (-3) - 5 = -8, \quad x_2 = (-3) + 5 = 2.$$

Teraz możemy podsumować nasze rozważania dotyczące takich najprostszych równań. Są to równania w postaci ogólnej

$$|x - a| = r,$$

gdzie liczby rzeczywiste a i r są dane. Jeśli $r < 0$, to nasze równanie nie ma rozwiązań. Nie istnieje bowiem liczba x, której odległość od a byłaby ujemna. Jeśli $r = 0$, to nasze równanie ma tylko jedno rozwiązanie: $x = a$. Jeśli wreszcie $r > 0$, to równanie ma dwa rozwiązania. Jedną liczbą położoną w odległości r na lewo od punktu a jest oczywiście $a - r$; drugą, położoną na prawo od a, jest $a + r$. Zatem rozwiązaniami równania są:

$$x_1 = a - r, \quad x_2 = a + r.$$

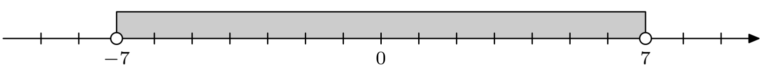
Wszystkie rozważane wyżej przypadki zostały zebrane razem w następującej tabelce:

Równanie	$r < 0$	$r = 0$	$r > 0$
$\lvert x\rvert = r$	brak rozwiązań	$x = 0$	$x_1 = -r, \quad x_2 = r$
$\lvert x - a\rvert = r$	brak rozwiązań	$x = a$	$x_1 = a - r, \quad x_2 = a + r$

Przechodzimy teraz do rozwiązywania nierówności. Pytanie: „jakie liczby są położone na osi liczbowej w odległości mniejszej od 7 od punktu 0?” zapisujemy w postaci nierówności:

$$|x| < 7.$$

Są to oczywiście liczby znajdujące się między liczbami -7 i 7, z wyłączeniem tych dwóch liczb. Rozwiązania naszej nierówności tworzą zatem przedział otwarty $(-7; 7)$, który zaznaczamy na osi liczbowej w sposób pokazany na rysunku 7.9.

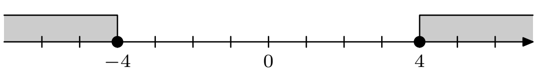


Rys. 7.9

Następne pytanie: jakie liczby leżą na osi liczbowej w odległości co najmniej 4 od punktu 0? Zapisujemy je w postaci nierówności:

$$|x| \geq 4.$$

Są to liczby położone „na lewo” od punktu -4 (łącznie z tym punktem), a także liczby położone „na prawo” od punktu 4 (także łącznie z tym punktem). Rozwiązania naszej nierówności możemy zaznaczyć na osi liczbowej w sposób pokazany na rysunku 7.10.



Rys. 7.10

Możemy też zapisać:

$$x \leq -4 \quad \text{lub} \quad x \geq 4.$$

Rozwiązania najprostszych nierówności z wartością bezwzględną zostały zebrane w następujących dwóch tabelkach:

Nierówność	$r < 0$	$r = 0$	$r > 0$
$\lvert x\rvert < r$	brak rozwiązań	brak rozwiązań	$-r < x < r$
$\lvert x\rvert \leq r$	brak rozwiązań	$x = 0$	$-r \leq x \leq r$
$\lvert x\rvert > r$	wszystkie liczby rzeczywiste	$x \neq 0$	$x < -r$ lub $x > r$
$\lvert x\rvert \geq r$	wszystkie liczby rzeczywiste	wszystkie liczby rzeczywiste	$x \leq -r$ lub $x \geq r$

oraz:

Nierówność	$r < 0$	$r = 0$	$r > 0$
$\lvert x - a\rvert < r$	brak rozwiązań	brak rozwiązań	$a - r < x < a + r$
$\lvert x - a\rvert \leq r$	brak rozwiązań	$x = a$	$a - r \leq x \leq a + r$
$\lvert x - a\rvert > r$	wszystkie liczby rzeczywiste	$x \neq a$	$x < a - r$ lub $x > a + r$
$\lvert x - a\rvert \geq r$	wszystkie liczby rzeczywiste	wszystkie liczby rzeczywiste	$x \leq a - r$ lub $x \geq a + r$

Teraz mogę dać uczniom kilka zadań, na których będą mogli przećwiczyć to, czego się dotąd nauczyli. Oto one:

1. Rozwiąż równania:

a) $|x + 2| = 3$, b) $|x - 1| = 4$,
c) $|x + 5| = 1$, d) $|x + 3| = 0$,
e) $|x - 4| = 4$, f) $|x + 4| = -3$,
g) $|x - 7| = 8$, h) $|x - \frac{3}{4}| = \frac{2}{5}$.

2. Znajdź równania z wartością bezwzględną mające następujące rozwiązania:

a) $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, b) $x_1 = -2$, $x_2 = 3$,
c) $x_1 = -2$, $x_2 = -3$, d) $x = 2$,
e) $x_1 = \frac{2}{3}$, $x_2 = \frac{3}{5}$, f) $x_1 = -\frac{2}{3}$, $x_2 = 3$.

3. Rozwiąż następujące nierówności i zaznacz na osi liczbowej, gdzie leżą rozwiązania każdej z nich:

a) $|x - 2| \leq 3$, b) $|x - 3| \geq 1$,
c) $|x + 2| < 3$, d) $|x - 4| \leq 6$,

e) $|x-7| \geq 0$,
f) $|x-1| \leq 4$,
g) $|x+1| > 5$,
h) $|x-2| \leq 0$,
i) $|x-6| \leq -3$,
j) $|x+9| \geq -6$,
k) $|x+4| > 0$,
l) $|x+\frac{2}{3}| \leq \frac{1}{4}$.

4. Znajdź nierówności, których rozwiązania tworzą następujące przedziały. Zaznacz te przedziały na osi liczbowej.

a) $(2,3)$,
b) $(-2,3)$,
c) $\langle 2,3\rangle$,
d) $(\frac{2}{5},\frac{3}{5})$,
e) $(-5,-3)$,
f) $\langle -\frac{2}{3},3\rangle$.

Zajmiemy się teraz trudniejszymi równaniami. Rozwiążmy najpierw zadanie:

Zadanie. Szosa z Zakopanego do Gdańska prowadzi przez Kraków i Warszawę. Odległość z Krakowa do Warszawy wynosi 300 km. Pan Kowalski wyjechał samochodem ze swojego domu w Krakowie, pojechał do swego przyjaciela, który mieszka gdzieś przy drodze z Zakopanego do Gdańska, a następnie pojechał do Warszawy. Łącznie przejechał 380 km. Gdzie mieszka przyjaciel pana Kowalskiego?

Rozwiązywanie zadania zaczniemy uwagą, że przyjaciel pana Kowalskiego może mieszkać na jednym z trzech odcinków drogi z Zakopanego do Gdańska:
(1) na odcinku między Krakowem i Warszawą;
(2) na odcinku między Krakowem i Zakopanem;
(3) na odcinku między Warszawą i Gdańskiem.
Rozpatrujemy kolejno te trzy przypadki:
(1) Zauważamy najpierw, że gdyby przyjaciel pana Kowalskiego mieszkał przy drodze z Krakowa do Warszawy, to pan Kowalski przejechałby łącznie tylko 300 km; ten przypadek nie może więc mieć miejsca.
(2) Przypuśćmy zatem, że przyjaciel pana Kowalskiego mieszka przy drodze z Krakowa do Zakopanego i zastanówmy się, jak daleko mieszka on od Krakowa. Pan Kowalski pojechał najpierw do niego, potem musiał wrócić do Krakowa i wreszcie przejechał ostatnie 300 km jadąc do Warszawy. Zatem w drodze z Krakowa do swego przyjaciela i z powrotem do Krakowa przejechał 80 km — jego przyjaciel mieszka 40 km od Krakowa w stronę Zakopanego.
(3) Rozważmy teraz ostatni przypadek, w którym przyjaciel pana Kowalskiego mieszka za Warszawą, w kierunku Gdańska. Wtedy pan Kowalski musiał najpierw przejechać 300 km do Warszawy, potem pojechał dalej do swego przyjaciela, i wreszcie wrócił do Warszawy. W drodze z Warszawy do swego przyjaciela i z powrotem przejechał zatem 80 km — jego przyjaciel w takim razie mieszka 40 km za Warszawą w kierunku Gdańska.

Zadanie nie ma więc jednoznacznej odpowiedzi: przyjaciel pana Kowalskiego mieszka albo 40 km za Krakowem w kierunku Zakopanego, albo 40 km za Warszawą w kierunku Gdańska.

Sformułujmy teraz to zadanie w języku matematycznym — zamiast o szosie z Zakopanego do Gdańska będziemy mówić o osi liczbowej. Na tej osi wybierzemy dwa punkty o współrzędnych k i w, oznaczające Kraków i Warszawę. Odległość tych dwóch punktów wynosi 300 jednostek. Przyjmijmy więc, że $k=0$ oraz $w=300$. Nasze zadanie sprowadza się do znalezienia na osi liczbowej punktu x takiego, że suma odległości tego punktu x od punktów k i w wynosi 380 jednostek. Za pomocą wartości bezwzględnej możemy nasze zadanie sformułować w postaci równania:

$$|x| + |x - 300| = 380.$$

Widzieliśmy, że to równanie ma dwa rozwiązania:

$$x = -40 \quad \text{lub} \quad x = 340.$$

W taki sam sposób możemy rozwiązać dowolne równanie postaci

$$|x - a| + |x - b| = r,$$

gdzie liczby rzeczywiste a, b i r są dane. Jeśli liczby a i b są równe, to takie równanie nie różni się od równań, które już rozwiązywaliśmy (dlaczego?). Możemy zatem przyjąć, że $a \neq b$; jedna z tych dwóch liczb jest więc większa od drugiej. Przyjmijmy na przykład, że $a < b$ (w przeciwnym przypadku zamieniamy a na b i na odwrót). Szukamy takiego punktu x, dla którego suma odległości od punktu x do punktów a i b na osi liczbowej jest równa r. Inaczej mówiąc, szukamy punktu x na osi liczbowej o następującej własności:

- pan Kowalski wyjeżdża samochodem z punktu a, odwiedza swojego przyjaciela, który mieszka w punkcie x, a następnie jedzie do punktu b, przejeżdżając łącznie r kilometrów.

Oczywiście, jeśli odległość r, którą ma przejechać pan Kowalski, jest mniejsza od $b - a$, to zadanie nie ma rozwiązania: pan Kowalski jadąc z punktu a do punktu b musi przejechać łącznie co najmniej $b - a$ kilometrów.

Jeśli odległość r jest równa $b - a$, czyli równanie ma postać

$$|x - a| + |x - b| = b - a,$$

to każdy punkt leżący między a i b (łącznie z tymi punktami) jest rozwiązaniem naszego równania:

$$a \leq x \leq b.$$

Przyjaciel pana Kowalskiego może mieszkać w dowolnym punkcie drogi z punktu a do punktu b (w tym w a lub w b). Jadąc z punktu a najpierw do swego przyjaciela, a potem do b, pan Kowalski pokona dokładnie odległość $b - a$.

Wreszcie, jeśli $r > b - a$, to zadanie ma dwa rozwiązania. Jedno znajduje się „na lewo” od punktu a — pan Kowalski pojedzie w kierunku przeciwnym niż kierunek do b, potem wróci do a i wreszcie pojedzie do b. Przejedzie więc dwukrotnie odległość od a do x, a potem przejedzie jeszcze $b - a$ kilometrów. Zatem punkt x leży w odległości

$$\frac{r - (b - a)}{2}$$

kilometrów „na lewo” od punktu a. Jednym rozwiązaniem jest więc

$$x = a - \frac{r - b + a}{2} = \frac{a + b - r}{2}.$$

Drugie rozwiązanie znajduje się w odległości

$$\frac{r-(b-a)}{2}$$

kilometrów „na prawo” od punktu b. Jest więc równe

$$x = b + \frac{r-b+a}{2} = \frac{r+a+b}{2}.$$

Ostatecznie, w tym przypadku mamy rozwiązania

$$x_1 = \frac{a+b-r}{2}, \quad x_2 = \frac{r+a+b}{2}.$$

To rozumowanie mogą teraz uczniowie przećwiczyć na następnych zadaniach:

5. Znajdź na osi liczbowej wszystkie punkty x, dla których suma odległości od danych punktów a i b wynosi d, gdzie:

a) $a=-3$, $b=4$, $d=13$,
b) $a=-5$, $b=-4$, $d=1$,
c) $a=-10$, $b=1$, $d=10$,
d) $a=-10$, $b=1$, $d=15$,
e) $a=-10$, $b=1$, $d=11$,
f) $a=7$, $b=11$, $d=5$,
g) $a=5$, $b=-3$, $d=10$,
h) $a=1$, $b=12$, $d=17$.

W każdym przypadku zapisz wyrażoną w zadaniu zależność w postaci równania z wartością bezwzględną. Zaznacz wszystkie rozwiązania na osi liczbowej.

6. Rozwiąż równania

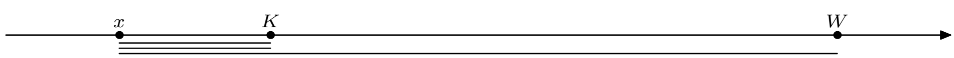
a) $|x-2|+|x-6|=10$,
b) $|x+3|+|x-7|=10$,
c) $|x+1|+|x-5|=10$,
d) $|x+6|+|x-8|=10$,
e) $|x+6|+|x+2|=10$,
f) $|x-1|+|x-3|=10$,
g) $|x-3|+|x+6|=3$,
h) $|x-4|+|x+1|=5$.

Pokażemy następnie, w jaki sposób można rozwiązywać jeszcze trudniejsze zadania prowadzące do bardziej złożonych równań z wartością bezwzględną. Popatrzmy na takie zadanie.

Zadanie. Szosa z Zakopanego do Gdańska prowadzi przez Kraków i Warszawę. Odległość z Krakowa do Warszawy wynosi 300 km. Pan Kowalski, właściciel znanej firmy produkującej lody, położonej gdzieś przy szosie z Zakopanego do Gdańska, wysłał ze swej wytwórni pięć samochodów-chłodni z lodami: dwa do Krakowa i trzy do Warszawy. Łącznie te samochody przejechały 800 km. W którym miejscu jest położona wytwórnia lodów pana Kowalskiego?

Rozwiązanie tego zadania także będzie polegało na rozpatrywaniu trzech przypadków.

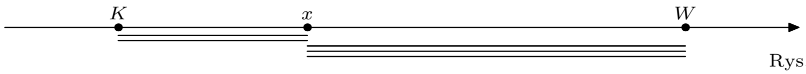
Przypadek 1.
Przypuśćmy, że wytwórnia lodów znajduje się w punkcie x na odcinku drogi między Zakopanem i Krakowem (tzn. na osi liczbowej na lewo od Krakowa). Wtedy dwa samochody musiałyby przejechać odcinek drogi od wytwórni do Krakowa, a trzy od wytwórni do Warszawy. Przedstawmy to na rysunku 7.11 w następujący schematyczny sposób:



Rys. 7.11

Te trzy samochody, które jadą do Warszawy, musiałyby pokonać odcinek drogi z Krakowa do Warszawy, wynoszący 300 km. Razem przejechałyby więc 900 km. To jest niemożliwe, gdyż wszystkie samochody przejechały tylko 800 km. Zatem wytwórnia lodów nie znajduje się między Zakopanem i Krakowem.

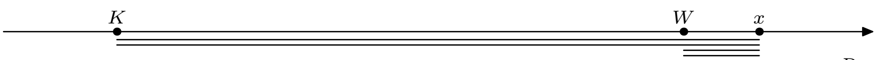
Przypadek 2.
Załóżmy teraz, że wytwórnia lodów znajduje się w punkcie x między Krakowem i Warszawą (tzn. na osi liczbowej między punktami K i W). Zaznaczmy na rysunku 7.12 drogi, które musiałyby przebyć samochody:



Rys. 7.12

Dwa samochody jadące do Krakowa i dwa samochody jadące do Warszawy przebyłyby razem dwukrotną drogę z Krakowa do Warszawy, czyli 600 km. Trzeci samochód jadący do Warszawy musiałby zatem przejechać 200 km. To daje nam jedno rozwiązanie zadania: wytwórnia może znajdować się na drodze z Krakowa do Warszawy w odległości 200 km od Warszawy (a zatem 100 km od Krakowa).

Przypadek 3.
Wreszcie przypuśćmy, że wytwórnia lodów znajduje się w punkcie x na odcinku drogi z Warszawy do Gdańska (tzn. na osi liczbowej na prawo od punktu W). Na rysunku 7.13 zaznaczmy schematycznie drogi, jakie musiałyby przebyć wysłane samochody:



Rys. 7.13

Pięć samochodów musi dojechać do Warszawy, potem dwa z nich muszą przejechać razem jeszcze 600 km z Warszawy do Krakowa. Zatem te pięć samochodów przejedzie razem 200 km od wytwórni do Warszawy. Stąd wniosek, że wytwórnia lodów znajduje się 40 km od Warszawy w kierunku Gdańska.

Ostateczna odpowiedź wygląda zatem następująco: wytwórnia lodów może się mieścić 200 km od Warszawy w kierunku Krakowa lub 40 km od Warszawy w kierunku Gdańska.

Zadanie to możemy zapisać w postaci równania, w którym wystąpią wyrażenia z wartością bezwzględną. Tak jak poprzednio przyjmijmy, że Kraków leży w punkcie 0 na osi liczbowej, a Warszawa w punkcie o współrzędnej 300. Szukamy takiej liczby x, która spełnia równanie

$$2 \cdot |x| + 3 \cdot |x - 300| = 800.$$

Jak widzieliśmy wyżej, to równanie ma dwa rozwiązania: $x_1 = 100$ oraz $x_2 = 340$.

Wartość bezwzględna ma ważną własność, której tu nie będę dowodzić; bardzo często podaję ją uczniom też bez dowodu. Mianowicie, dla dowolnych liczb rzeczywistych a i b prawdziwa jest równość

$$|ab| = |a| \cdot |b|.$$

Pozwala ona zapisać powyższe równanie w postaci

$$|2x| + |3x - 900| = 800.$$

Często równanie, które mamy rozwiązać, jest podane właśnie w takiej postaci. Korzystając z podanej równości możemy takie równanie doprowadzić do postaci

$$p \cdot |x - a| + q \cdot |x - b| = r$$

i rozwiązać je metodą opisaną wyżej. Na zakończenie wspomnę tylko, że jeśli uczniowie nauczą się rozwiązywać graficznie równania takie jak powyższe, to w podobny sposób będą mogli rozwiązać analogiczne nierówności. Uczniowie mogą to wszystko przećwiczyć na następujących zadaniach:

7. Hurtownia pana Kowalskiego znajduje się gdzieś przy trasie Zakopane–Gdańsk. Zakładamy, że odległość z Krakowa do Warszawy wynosi 300 km. Pan Kowalski wysłał ze swej hurtowni samochód osobowy do Krakowa i samochód ciężarowy do Warszawy. Samochód osobowy spala średnio 6 litrów benzyny na 100 km, a samochód ciężarowy 10 litrów. Kiedy samochody wróciły, okazało się, że spaliły łącznie 76 litrów benzyny. W którym miejscu może znajdować się hurtownia? W każdym z możliwych przypadków oblicz, ile litrów benzyny spalił samochód osobowy, a ile ciężarowy.

8. Przyjmijmy, że miasta A i B położone są na osi liczbowej w punktach o współrzędnych 10 i 100. Z miasta C położonego na tej osi wyjechały 4 samochody osobowe do miasta A i 5 samochodów ciężarowych do miasta B. Łącznie samochody te spaliły 28,7 litrów benzyny. Wyznacz położenie miasta C, jeśli średnie zużycie benzyny dla samochodu osobowego wynosi 5 litrów na 100 km, a dla ciężarowego 10 litrów.

9. Przyjmijmy, że miasta A i B położone są na osi liczbowej w punktach o współrzędnych odpowiednio 10 i 40. Z miasta C położonego na tej osi wyjechały 4 samochody do miasta A i 6 samochodów do miasta B. Samochody, które jechały do miasta A, przejechały łącznie o 80 km więcej niż te, które jechały do B. Znajdź położenie miasta C na osi liczbowej.

10. Rozwiąż równania. Podaj interpretację geometryczną każdego z tych równań, układając zadanie tekstowe.

a) $2|x + 1| + 3|x + 2| = 7$,
b) $2|x + 4| + |x - 2| = 6$,
c) $3|x + 5| + |x + 3| = 2$,
d) $2|x + 1| + 4|x - 5| = 8$,
e) $|x - 2| + |x - 6| = 9$.

11. Rozwiąż równania:

a) $|x - 1| + |3x + 2| = 2$,
b) $|2x + 1| + |5x - 2| = 2$,
c) $|3x - 2| + |5x + 1| = 3$,
d) $|x - 4| + |3x + 1| = 5$,
e) $|3x + 5| + |4x - 1| = 4$.

12. Rozwiąż równania:

a) $|x| + |x - 1| + |x - 2| = 2$,
b) $|x| + |x - 1| + |x - 2| = 4$,
c) $|x| + |x - 1| + |x - 2| = 3$,
d) $|x - 1| + |x - 4| + |x - 5| + |x - 7| = 8$,
e) $|x + 1| + |x - 3| + |x - 5| + |x - 6| = 8$,
f) $|x + 2| + |x + 1| + |x - 5| + |x - 7| = 10$.

8. Geometria trójkąta

Geometria jest niewątpliwie najważniejszą częścią mojego programu I klasy. Naukę geometrii rozpoczynam zazwyczaj mniej więcej na początku II semestru i poświęcam jej cały czas do końca roku szkolnego. Przez kilka pierwszych tygodni uczę wyłącznie geometrii, potem przeznaczam na geometrię co najmniej połowę godzin matematyki tygodniowo. W I klasie uczę w zasadzie wyłącznie geometrii trójkąta i rozwiązujemy zadania wykorzystujące tylko pojęcie przystawania trójkątów. W II klasie uczę twierdzenia Pitagorasa i geometrii okręgu, w III klasie uczę twierdzenia Talesa i podobieństwa trójkątów. Oddzielną kwestią jest nauka symetrii i przekształceń geometrycznych; omówię ją w innym rozdziale.

Nauka geometrii w I klasie sprowadza się w zasadzie do rozwiązywania zadań na dowodzenie. Można powiedzieć, że jest to nauka dowodzenia twierdzeń. Na początku trzeba wyjaśnić, co to w ogóle jest dowód. Wyjaśniam więc, w jaki sposób definiujemy w matematyce nowe pojęcia i w jaki sposób uzasadniamy prawdziwość formułowanych twierdzeń dotyczących tych pojęć. Zaczynam od wyjaśnienia uczniom, że ani procesu definiowania, ani uzasadniania nie można ciągnąć w nieskończoność. Nie da się objaśniać kolejnych pojęć używając do tego pojęć bardziej zrozumiałych — ten proces musi się zatrzymać na pojęciach na tyle prostych, że nie wymagają one już żadnego wyjaśnienia, ponieważ wszyscy (jak się wydaje) rozumiemy te pojęcia jednakowo. Dobrym, choć żartobliwym, przykładem jest objaśnienie pojęcia „koń” w staropolskiej encyklopedii: koń, jaki jest, każdy widzi sam. Podobnie nie da się uzasadniać kolejnych twierdzeń za pomocą twierdzeń bardziej oczywistych — ten proces także musi się zatrzymać na twierdzeniach tak oczywistych (znów wydaje się, że dla każdego), że nie wymagają one już żadnego wyjaśnienia. Opowiadam potem uczniom, że na takiej zasadzie jest zbudowana najważniejsza książka dotycząca geometrii: *Elementy* Euklidesa. Euklides wymienia w niej pojęcia pierwotne (tak je dzisiaj nazywamy): punkt, prosta, płaszczyzna; nie są one w książce zdefiniowane (może co najwyżej opisane). Wymienia także ich podstawowe własności, aksjomaty — przyjmowane bez dowodu. Zaznaczam, że nie będę podawał oryginalnego zestawu aksjomatów Euklidesa, przyjmę natomiast bez dowodu nieco większy zestaw stwierdzeń. Będą się one pojawiały jako własności figur geometrycznych w dalszym wykładzie. Następne lekcje są poświęcone właśnie tym najbardziej podstawowym własnościom figur geometrycznych.

Zaczynam od podania aksjomatu mówiącego, że przez dwa punkty przechodzi dokładnie jedna prosta; wyjaśniam przy okazji, co w matematyce znaczy zwrot „dokładnie jedna” i dlaczego go używamy. Wskazuję niejednoznaczności języka naturalnego, którym się na codzień posługujemy, i wyjaśniam, że słowo „dokładnie” ma właśnie te niejednoznaczności usunąć. Mówię uczniom, że z tego pierwszego aksjomatu łatwo wynika, że dwie proste przecinają się w co najwyżej jednym punkcie; proste rozumowanie pozostawiam jako ćwiczenie (choć nie wymagam go później od uczniów; uważam, że dowodzenie faktów zbyt prostych lub oczywistych może ich zanudzić). Następnie mówię, co to jest półprosta i odcinek. Mówię też, że każdej parze punktów jest przypisana liczba nieujemna — odległość tych punktów. Mówię następnie (jest to jakby kolejny aksjomat), że dla każdej liczby nieujemnej r na półprostej o początku A istnieje dokładnie jeden punkt B taki, że odcinek AB ma długość r. Tak sformułowany aksjomat pozwala później na wybieranie takich punktów jak środek odcinka, punkty dzielące odcinek na daną liczbę równych części czy wreszcie przedłużanie odcinka o zadaną długość.

Odcinki AB i CD nazywam równymi, jeśli mają jednakową długość; piszę wtedy po prostu $AB = CD$. To znaczy, że nie wprowadzam oddzielnego oznaczenia na długość odcinka;

jest to notacja przyjęta powszechnie w geometrii (stosowana na przykład w zadaniach olimpijskich od ponad 60 lat). Definiuję dodawanie odcinków: sumą jest odcinek, którego długość jest sumą długości składników. Stąd w szczególności wynika, że jeśli punkt C leży wewnątrz odcinka AB, to $AC + CB = AB$. Do tej kwestii powracam przy okazji twierdzenia 8 (nierówności trójkąta).

Następny temat to kąty. Mówię, że dwie półproste o wspólnym początku dzielą płaszczyznę na dwie części: kąty (wprowadzam także kąt zerowy i pełny w przypadku, gdy te półproste się pokrywają). Mówię o mierze kąta i o tym, że dla każdej liczby r (z zakresu $0 \leq r \leq 360$) i półprostej AB istnieją dokładnie dwie półproste AC takie, że kąt BAC ma dokładnie r stopni. W szczególności pozwala to dzielić kąty na zadaną liczbę części. W tym miejscu zbaczam na chwilę z głównego toku wykładu, by opowiedzieć o konstrukcjach geometrycznych. Przypominam uczniom, że w szkole podstawowej na ogół uczono ich pewnych podstawowych konstrukcji, np. dzielenia odcinka lub kąta na połowy. Zwracam im uwagę na to, że czym innym jest kwestia istnienia pewnych punktów czy półprostych, a czym innym jest zadanie skonstruowania ich zgodnie ze ściśle określonymi zasadami. Mówię, że w gimnazjum nauczą się na przykład konstrukcyjnego dzielenia odcinka na zadaną liczbę równych części, podczas gdy nie istnieje konstrukcja geometryczna (za pomocą wyłącznie cyrkla i linijki bez podziałki) podziału dowolnego kąta (w szczególności kąta 60°) na trzy równe części. Niemożność konstrukcyjnego podziału kąta na trzy równe części nie oznacza jednak, że takie półproste dzielące ten kąt nie istnieją — wręcz przeciwnie, podany aksjomat gwarantuje, że istnieją.

Chcę tutaj zwrócić uwagę na to, że wprowadzanie tych aksjomatów ma charakter nieformalny. Opowiadam o nich, rysując odpowiednie sytuacje na tablicy i **nie zapisuję** tych aksjomatów, zwłaszcza w sposób formalny. Mówię o nich jak o oczywistych własnościach figur geometrycznych, dobrze znanych już ze szkoły podstawowej (uczniowie umieją przecież odmierzyć zadany odcinek lub narysować zadany kąt). Zwracam też uwagę na to, że nie przejmuję się utratą „czystości” logicznej: aksjomaty mieszają pojęcia geometryczne z własnościami liczb rzeczywistych, a więc z punktu widzenia czystej logiki nie tworzę teorii pierwszego rzędu.

Dwa kąty nazywam równymi, jeśli mają równe miary. Tak, jak w przypadku długości odcinków, nie wprowadzam oddzielnego oznaczenia na miarę kąta; piszę na przykład $\measuredangle BAC = \measuredangle EDF$. Podobnie jak w przypadku odcinków, definiuję dodawanie kątów. Omawianie kątów kończę omówieniem różnych rodzajów kątów (w szczególności definicją kątów wypukłych) oraz definicją kątów przyległych i wierzchołkowych. Definiuję również kąt zewnętrzny trójkąta.

Dwie grupy aksjomatów omawiam szczególnie dokładnie. Pierwsza dotyczy prostych równoległych, druga to cechy przystawania trójkątów. Podaję aksjomat Euklidesa w postaci najczęściej spotykanej: przez punkt nieleżący na danej prostej przechodzi dokładnie jedna prosta do niej równoległa. Następnie definiuję kąty odpowiadające i naprzemianległe przy dwóch prostych przeciętych sieczną. Pierwszy aksjomat dotyczący takich kątów mówi, że kąty odpowiadające i kąty naprzemianległe (dokładniej: każda para kątów odpowiadających i każda para kątów naprzemianległych) przy prostych równoległych są równe. Drugi aksjomat mówi, że wystarczy jedna równość (tzn. równość jednej pary kątów odpowiadających lub naprzemianległych) do tego, by proste były równoległe.

Teraz przechodzę do omawiania cech przystawania trójkątów i pierwszych twierdzeń. Uczniowie otrzymują tekst (a właściwie jego pierwszą część), składający się z kilkunastu stron. Jest to materiał teoretyczny, który bardzo szczegółowo omawiam na lekcji, i którego każę się dokładnie nauczyć w domu. Ten tekst nie zastępuje podręcznika, jest jego uzupełnieniem. Po omówieniu tego tekstu i zrobieniu kilku początkowych zestawów zadań powracam do podręcznika po to, by zrobić z uczniami zadania, które się tam znajdują. W wielu przypadkach okazują się one interesującym uzupełnieniem tego, czego uczniowie nauczyli się dotychczas. Tę pierwszą część tekstu, który daję uczniom, włączam w całości do niniejszego poradnika.

Tekst ten zaczyna się od podania uczniom alfabetu greckiego (jak wiemy, litery greckie są często używane w geometrii do oznaczeń kątów). Proszę uczniów, by uczyli się tych liter; w przyszłości bardzo się im to przyda. Ja sam często używam liter greckich do oznaczania kątów; w miarę upływu czasu używam coraz więcej liter. Następnie wprowadzam zasady oznaczania wierzchołków, kątów i boków trójkąta; zwracam uwagę uczniów na pewną estetykę oznaczeń, bardzo przydatną w całej matematyce. Na przykład proszę, by kąt przy wierzchołku B oznaczali literą β, a nie α, jak często to się zdarza.

Dalej starannie omawiam trzy cechy przystawania trójkątów. Zwracam uwagę na staranne przestrzeganie kolejności wierzchołków przy zapisie przystawania trójkątów. Przystawanie trójkątów nie jest bowiem tylko własnością samych trójkątów — istotne jest to, które wierzchołki (a zatem kąty i boki) sobie odpowiadają. Cechy przystawania formułujemy, używając słowa „odpowiednie"; mówimy na przykład, że trójkąty są przystające, jeśli odpowiednie boki są równej długości. Ta odpowiedniość niestety zanika potem w zapisie; jest to tym bardziej przykre, że owa niestaranność znajduje swoje miejsce również w podręcznikach i zbiorach zadań.

Wreszcie podaję dowody ośmiu twierdzeń (wraz z oczywistymi wnioskami). Zwracam uwagę na to, że każdy dowód jest poprzedzony rysunkiem wraz z dokładnym opisem przyjętych oznaczeń i tego, co zostało ewentualnie dorysowane, a dowody są zapisywane w punktach. Zwracam uwagę na wprowadzane na rysunkach oznaczenia. Często uczniowie oznaczają tą samą literą różne rzeczy (np. różne kąty) bez należytego uzasadnienia, że są one równe (zob. odpowiednie wyjaśnienia w rozwiązaniu zadania 1). Często też wprowadzają nowe obiekty, żądając od nich za dużo (np. przedłużają bok AB trójkąta ABC do punktu D takiego, że odcinek BD ma zadaną długość, a kąt ADC zadaną miarę). Dlatego wymagam, by za każdym razem przy wprowadzaniu nowych obiektów zastanowili się, na jakiej podstawie taka operacja jest wykonalna (tu przypominam o aksjomacie mówiącym o istnieniu na półprostej punktu leżącego w danej odległości od początku półprostej i o podobnym aksjomacie dotyczącym kątów).

Wymagam też, by kolejne stwierdzenia w dowodzie były prawidłowo uzasadnione (takim uzasadnieniem może być każde z założeń: własność dorysowanych elementów rysunku, poprzednie stwierdzenie, aksjomat lub udowodnione wcześniej twierdzenie). Ponadto przy rozwiązywaniu zadań wolno powoływać się na zadania rozwiązane wcześniej. Bardzo przestrzegam tego, by uczniowie w dowodach nie powoływali się na własności figur, które znają ze szkoły podstawowej, a do których jeszcze nie doszliśmy. Uzasadniam to tym, że dopóki nie będą wiedzieć, jak się dowodzi tych znanych własności, nie mogą być pewni, czy w dowodzie nie jest wykorzystywane właśnie to, czego w tej chwili dowodzą. Wreszcie w tym tekście wyjaśniam uczniom, co to jest twierdzenie odwrotne i czym są dowody niewprost. Mimo że pojęcie dowodu niewprost wydaje się logicznie dość skomplikowane, nie zauważyłem, by sprawiało ono moim uczniom jakieś istotne trudności. Przypominam, że z rozumowaniami niewprost uczniowie się już zetknęli w zadaniach o Sudoku. A oto sam tekst.

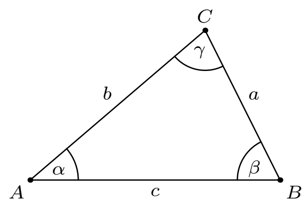
▼

Greckie litery: małe i niektóre wielkie

α	alfa	ν	ni	Γ	gamma
β	beta	ξ	ksi	Δ	delta
γ	gamma	o	omikron	Θ	teta
δ	delta	π	pi	Λ	lambda
ε	epsilon	ϱ	ro	Ξ	ksi
ζ	zeta, dzeta	σ	sigma	Π	pi
η	eta	τ	tau	Σ	sigma
ϑ	teta	υ	ipsilon	Φ	fi
ι	jota	φ	fi	Ψ	psi
κ	kappa	χ	chi	Ω	omega
λ	lambda	ψ	psi		
μ	mi	ω	omega		

1. Oznaczenia boków i kątów trójkąta

Odcinki zapisujemy zwykle podając ich końce, np. odcinek AB. Często oznaczamy odcinki małymi literami, np. odcinek a. Kąty zapisujemy podając trzy litery: oznaczenie punktu na jednym ramieniu, oznaczenie wierzchołka oraz oznaczenie punktu na drugim ramieniu, np. kąt BAC lub $\measuredangle BAC$. Jeśli nie prowadzi to do nieporozumień, to podajemy tylko wierzchołek kąta, np. $\measuredangle A$. Często oznaczamy kąty małymi literami alfabetu greckiego, np. α, β, γ. Przypuśćmy, że dany jest trójkąt ABC. Bok leżący naprzeciw wierzchołka A oznaczamy zwykle literą a, bok leżący naprzeciw wierzchołka B oznaczamy literą b, a bok leżący naprzeciw wierzchołka C oznaczamy literą c. Kąty przy wierzchołkach A, B i C oznaczamy odpowiednio literami greckimi α, β i γ (rys. 8.1).



Rys. 8.1

2. Przystawanie trójkątów

Mówimy, że trójkąty ABC i DEF są **przystające** (i piszemy $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$), jeśli

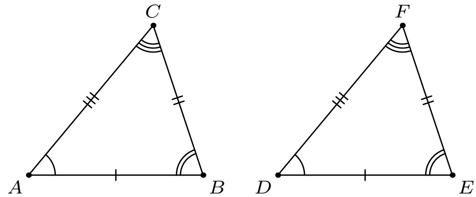
$$AB = DE, \quad BC = EF, \quad AC = DF$$

oraz

$$\measuredangle BAC = \measuredangle EDF, \quad \measuredangle ABC = \measuredangle DEF, \quad \measuredangle ACB = \measuredangle DFE.$$

Zapis $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$ oznacza, że wierzchołki trójkąta ABC **odpowiadają** wierzchołkom trójkąta DEF **w tej kolejności** (tzn. wierzchołek A odpowiada wierzchołkowi D, wierzchołek B odpowiada wierzchołkowi E i wierzchołek C odpowiada wierzchołkowi F). Wówczas bok AB odpowiada bokowi DE, bok BC odpowiada bokowi EF i bok AC odpowiada bokowi DF. Podobnie jest z kątami: kąt BAC (czyli kąt A) odpowiada kątowi EDF (czyli kątowi D), kąt ABC (czyli kąt B) odpowiada kątowi DEF (czyli kątowi E) oraz kąt ACB (czyli kąt C) odpowiada kątowi DFE (czyli kątowi F).

Możemy zatem powiedzieć, że dwa trójkąty są przystające, jeśli odpowiadające boki i kąty tych trójkątów są równe. Na rysunku 8.2 tak samo są zaznaczone równe odpowiadające boki i kąty trójkątów przystających ABC i DEF.



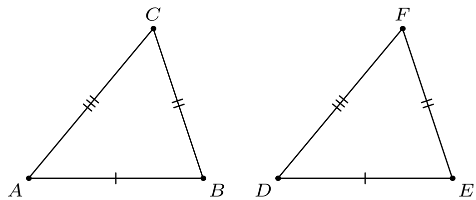
Rys. 8.2

Przystawanie trójkątów oznacza 6 równości: trzy równości boków i trzy równości kątów. Okazuje się, że do przystawania trójkątów wystarczą tylko pewne trzy równości. Mówią o tym tzw. **cechy przystawania trójkątów**.

3. Cecha przystawania BBB

Cecha przystawania BBB (bok – bok – bok) mówi, że dwa trójkąty są przystające, jeśli ich odpowiadające boki są równe. A zatem $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$, jeśli (rys. 8.3)

$$AB = DE, \quad BC = EF, \quad AC = DF.$$

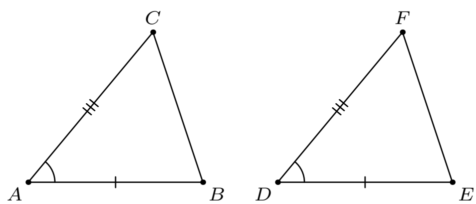


Rys. 8.3

4. Cecha przystawania BKB

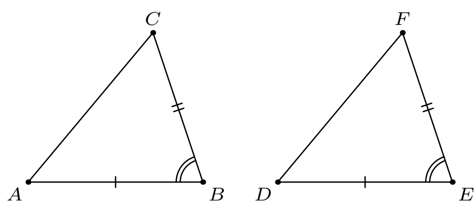
Cecha przystawania BKB (bok – kąt – bok) mówi, że dwa trójkąty są przystające, jeśli dwa boki jednego trójkąta są równe odpowiadającym im bokom drugiego trójkąta oraz kąty zawarte między tymi bokami są równe. W przypadku trójkątów ABC i DEF mamy zatem trzy przypadki tej cechy przystawania. Mamy zatem $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$, jeśli zachodzi jeden z następujących trzech przypadków:

1. $AB = DE$, $AC = DF$, $\measuredangle BAC = \measuredangle EDF$ (rys. 8.4):



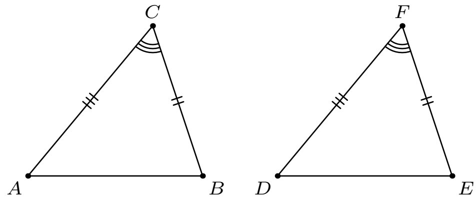
Rys. 8.4

2. $AB = DE$, $BC = EF$, $\measuredangle ABC = \measuredangle DEF$ (rys. 8.5):



Rys. 8.5

3. $AC = DF$, $BC = EF$, $\measuredangle ACB = \measuredangle DFE$ (rys. 8.6):

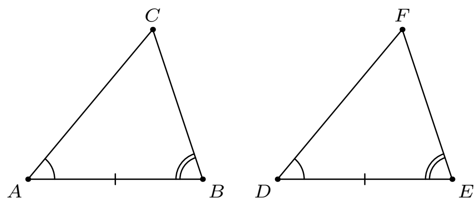


Rys. 8.6

5. Cecha przystawania KBK

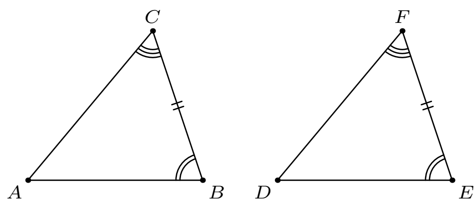
Cecha przystawania KBK (kąt – bok – kąt) mówi, że dwa trójkąty są przystające, jeśli jeden bok jednego trójkąta jest równy odpowiadającemu mu bokowi drugiego trójkąta oraz gdy oba kąty pierwszego trójkąta przyległe do tego boku są równe odpowiadającym im bokom drugiego trójkąta. W przypadku trójkątów ABC i DEF mamy trzy przypadki tej cechy przystawania. Mamy zatem $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$, jeśli zachodzi jeden z następujących trzech przypadków:

1. $AB = DE$, $\measuredangle BAC = \measuredangle EDF$, $\measuredangle ABC = \measuredangle DEF$ (rys. 8.7):



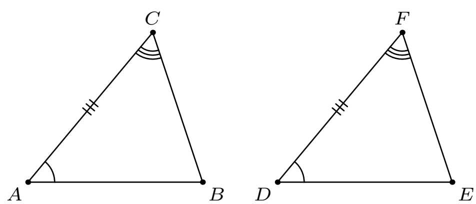
Rys. 8.7

2. $BC = EF$, $\measuredangle ABC = \measuredangle DEF$, $\measuredangle ACB = \measuredangle DFE$ (rys. 8.8):



Rys. 8.8

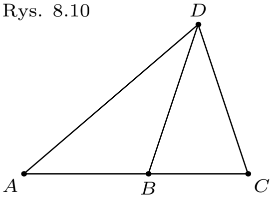
3. $AC = DF$, $\measuredangle BAC = \measuredangle EDF$, $\measuredangle ACB = \measuredangle DFE$ (rys. 8.9):



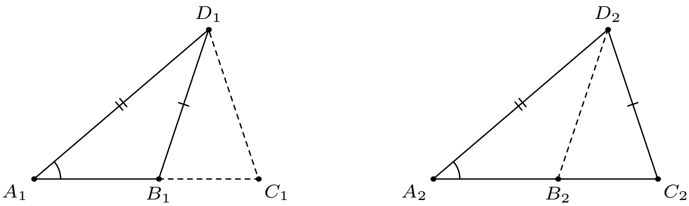
Rys. 8.9

Jak się wkrótce przekonamy, w przypadku cechy przystawania KBK nie ma wielkiego znaczenia, czy oba kąty przylegają do odpowiadających boków (muszą jednak być to kąty odpowiadające sobie). Wyniknie to stąd, że jeśli dwa kąty jednego trójkąta są równe dwóm kątom drugiego trójkąta, to trzecie kąty obu tych trójkątów też są równe.

Rys. 8.10



W przypadku cechy przystawania BKB musimy natomiast być ostrożniejsi: kąty, o których mówi ta cecha przystawania **muszą** być zawarte między odpowiadającymi sobie bokami. Popatrzmy na następujący przykład: weźmy trójkąt BCD, w którym $BD = CD$. Następnie na prostej BC wybierzmy punkt A, tak jak na rysunku 8.10. Wówczas trójkąty ABD i ACD nie są przystające. Narysujmy te dwa trójkąty obok siebie.



Rys. 8.11

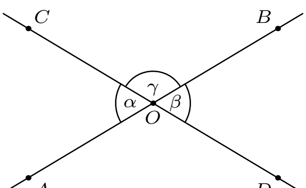
Mamy wówczas (rys. 8.11):

$$A_1D_1 = A_2D_2, \quad B_1D_1 = C_2D_2, \quad \measuredangle B_1A_1D_1 = \measuredangle C_2A_2D_2.$$

W tym przypadku kąty $B_1A_1D_1$ i $C_2A_2D_2$ nie leżą jednak między równymi odpowiadającymi sobie bokami A_1D_1 i A_2D_2 oraz B_1D_1 i C_2D_2 i dlatego cecha przystawania BKB nie stosuje się do trójkątów $A_1B_1D_1$ i $A_2C_2D_2$.

6. Kąty wierzchołkowe

Twierdzenie 1. Kąty wierzchołkowe są równe.



Rys. 8.12

Dowód. Załóżmy, że proste AB i CD przecinają się w punkcie O, leżącym wewnątrz odcinków AB i CD (rys. 8.12). Przyjmijmy następujące oznaczenia kątów:

$$\alpha = \measuredangle AOC, \quad \beta = \measuredangle BOD, \quad \gamma = \measuredangle BOC.$$

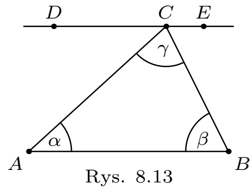
Udowodnimy, że $\measuredangle AOC = \measuredangle BOD$, czyli, że $\alpha = \beta$.

Nr	Stwierdzenie	Uzasadnienie
1.	$\alpha + \gamma = 180^\circ$	kąty przyległe,
2.	$\beta + \gamma = 180^\circ$	kąty przyległe,
3.	$\alpha + \gamma = \beta + \gamma$	1 i 2,
4.	$\alpha = \beta$	3,
	c. b. d. o.	

7. Suma kątów trójkąta

Twierdzenie 2. Suma kątów trójkąta wynosi $180°$.

Dowód. Oznaczmy kąty trójkąta ABC literami α, β i γ. Następnie przez wierzchołek C prowadzimy prostą równoległą do boku AB i zaznaczamy na niej punkty D i E po obu stronach punktu C, w taki sposób jak na rysunku 8.13.



Rys. 8.13

Nr	Stwierdzenie	Uzasadnienie
1.	$\measuredangle ACD = \alpha$	kąty naprzemianległe,
2.	$\measuredangle BCE = \beta$	kąty naprzemianległe,
3.	$\measuredangle ACD + \measuredangle BCE + \gamma = 180°$	punkty D, C i E są współliniowe,
4.	$\alpha + \beta + \gamma = 180°$	1, 2, 3,
	c. b. d. o.	

Wnioski.

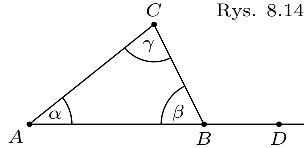
1) Jeśli w trójkącie jeden kąt jest prosty lub rozwarty, to pozostałe dwa kąty są ostre.
2) Suma kątów ostrych trójkąta prostokątnego jest równa $90°$.
3) Jeśli dwa trójkąty mają dwie pary kątów równych, to trzecie kąty tych trójkątow też są równe. Na przykład, jeśli w trójkątach ABC i DEF mamy $\measuredangle A = \measuredangle D$ oraz $\measuredangle B = \measuredangle E$, to $\measuredangle C = \measuredangle F$.

8. Kąt zewnętrzny trójkąta

Twierdzenie 3. Kąt zewnętrzny trójkąta jest równy sumie kątów wewnętrznych do niego nieprzyległych.

Dowód. Oznaczmy kąty trójkąta ABC literami α, β i γ. Na półprostej AB zaznaczamy punkt D na zewnątrz odcinka AB (rys. 8.14). Udowodnimy, że $\measuredangle DBC = \alpha + \gamma$.

Rys. 8.14



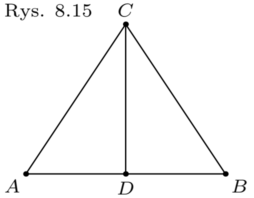
Nr	Stwierdzenie	Uzasadnienie
1.	$\alpha + \beta + \gamma = 180°$	twierdzenie 2,
2.	$\alpha + \gamma = 180° - \beta$	1,
3.	$\measuredangle DBC = 180° - \beta$	kąty przyległe,
4.	$\measuredangle DBC = \alpha + \gamma$	2 i 3,
	c. b. d. o.	

Wniosek. Kąt zewnętrzny trójkąta jest większy od kąta wewnętrznego do niego nieprzyległego.

9. Trójkąty równoramienne

Twierdzenie 4. Jeżeli w trójkącie dwa boki są równe, to kąty leżące naprzeciw tych boków są równe.

Rys. 8.15



Dowód. Przypuśćmy, że w trójkącie ABC zachodzi równość boków $AC = BC$. Udowodnimy, że wtedy $\measuredangle BAC = \measuredangle ABC$. Poprowadźmy dwusieczną kąta ACB i oznaczmy literą D punkt, w którym ta dwusieczna przecina bok AB (rys. 8.15).

Nr	Stwierdzenie	Uzasadnienie
1.	$AC = BC$	z założenia,
2.	$\measuredangle ACD = \measuredangle BCD$	punkt D leży na dwusiecznej kąta ACB,
3.	$\triangle ACD \equiv \triangle BCD$	1, 2, wspólny bok CD, cecha przystawania BKB,
4.	$\measuredangle BAC = \measuredangle ABC$	3,
	c. b. d. o.	

Wniosek 1. Przy powyższych oznaczeniach $AD = BD$ oraz $\measuredangle ADC = \measuredangle BDC = 90^\circ$.

Wniosek 2. Dwusieczna CD kąta C między ramionami trójkąta równoramiennego (tzn. takiego, w którym $AC = BC$) jest jednocześnie środkową, wysokością i symetralną podstawy AB.

10. Twierdzenie odwrotne do danego twierdzenia

Udowodnimy teraz **twierdzenie odwrotne** do twierdzenia 4. Wyjaśnimy też, co to jest twierdzenie odwrotne. Otóż każde twierdzenie matematyczne można sformułować tak, by miało następującą postać:

jeśli ..., **to** ...

Część twierdzenia znajdującą się między słowami **jeśli** i **to** nazywamy **założeniem**, a część znajdującą się po słowie **to** nazywamy **tezą**. Twierdzenie 4 możemy przeformułować w następujący sposób:

jeśli boki AB i AC trójkąta ABC są równe, **to** kąty BAC i ABC trójkąta ABC są równe.

Założeniem jest zdanie „boki AB i AC trójkąta ABC są równe", tezą zdanie „kąty BAC i ABC trójkąta ABC są równe". Twierdzenie odwrotne do danego twierdzenia otrzymujemy zamieniając założenie z tezą. Twierdzeniem odwrotnym do twierdzenia 4 będzie zatem twierdzenie:

jeśli kąty BAC i ABC trójkąta ABC są równe, **to** boki AB i AC trójkąta ABC są równe.

Czasami zdarza się, że twierdzenie odwrotne do danego twierdzenia jest również prawdziwe, tzn. można je udowodnić. Tak będzie w przypadku twierdzenia 4; twierdzenie odwrotne do niego udowodnimy za chwilę. Często jednak okazuje się, że twierdzenie odwrotne do danego twierdzenia nie jest prawdziwe. Na przykład udowodnimy wkrótce następujące twierdzenie:

- **jeśli** czworokąt $ABCD$ jest rombem, **to** przekątne AC i BD czworokąta $ABCD$ są prostopadłe.

Nietrudno zauważyć, że twierdzenie odwrotne

- **jeśli** przekątne AC i BD czworokąta $ABCD$ są prostopadłe, **to** czworokąt $ABCD$ jest rombem

nie jest prawdziwe. Można bowiem łatwo skonstruować czworokąt o prostopadłych przekątnych i bokach różnych długości — na przykład w każdym deltoidzie przekątne są prostopadłe, a nie każdy deltoid jest rombem.

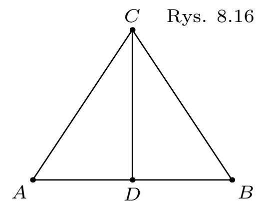
11. Trójkąty równoramienne – c.d.

Zgodnie z zapowiedzią udowodnimy teraz twierdzenie odwrotne do twierdzenia 4.

Twierdzenie 5. Jeśli w trójkącie dwa kąty są równe, to boki leżące naprzeciw tych kątów są równe.

Dowód. Przypuśćmy, że w trójkącie ABC zachodzi równość kątów $\measuredangle BAC = \measuredangle ABC$. Udowodnimy, że wtedy $AC = BC$. Tak jak w dowodzie twierdzenia 4 poprowadzimy dwusieczną kąta ACB i oznaczymy literą D punkt, w którym ta dwusieczna przecina bok AB (rys. 8.16).

Rys. 8.16



Nr	Stwierdzenie	Uzasadnienie
1.	$\measuredangle BAC = \measuredangle ABC$	z założenia,
2.	$\measuredangle ACD = \measuredangle BCD$	punkt D leży na dwusiecznej kąta ACB,
3.	$\measuredangle ADC = \measuredangle BDC$	1, 2, wniosek z twierdzenia 2,
4.	$\triangle ACD \equiv \triangle BCD$	2, 3, wspólny bok CD, cecha przystawania KBK,
5.	$AC = BC$	4,
	c. b. d. o.	

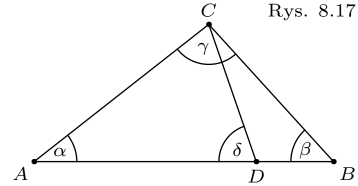
12. Nierówności między bokami trójkąta

Twierdzenie 6 i odwrotne do niego twierdzenie 7 podają zależności między długościami boków i wielkością kątów w trójkątach nierównoramiennych.

Twierdzenie 6. W trójkącie naprzeciw dłuższego boku leży większy kąt.

Dowód. Oznaczmy kąty trójkąta ABC literami α, β i γ. Przypuśćmy następnie, że bok AB jest dłuższy od boku AC, tzn. $AB > AC$. Udowodnimy, że $\gamma > \beta$. Ponieważ $AB > AC$, więc wewnątrz boku AB znajduje się taki punkt D, że $AD = AC$. Oznaczmy literą δ kąt ADC (rys. 8.17).

Rys. 8.17

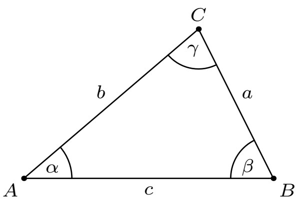


Nr	Stwierdzenie	Uzasadnienie
1.	$\gamma > \measuredangle ACD$	półprosta CD leży wewnątrz kąta ACB,
2.	$AC = AD$	z założenia o punkcie D,
3.	$\measuredangle ACD = \delta$	2, twierdzenie 4,
4.	$\delta > \beta$	kąt ADC jest kątem zewnętrznym trójkąta DBC,
5.	$\gamma > \beta$	1, 3 i 4,
	c. b. d. o.	

13. Dowody niewprost. Nierówności między bokami trójkąta – c.d.

Twierdzenie 7. W trójkącie naprzeciw większego kąta leży dłuższy bok.

Dowód. Oznaczmy boki trójkąta ABC literami a, b, c i kąty literami α, β i γ (rys. 8.18). Przeprowadzimy tzw. **dowód przez sprowadzenie do niedorzeczności** (inaczej nazywany **dowodem niewprost**). Wyjaśnimy najpierw, co to jest dowód niewprost. Dowód niewprost polega na tym, że przypuszczamy, iż teza twierdzenia jest nieprawdziwa. W praktyce wygląda to tak, że to przypuszczenie dołączamy do założeń twierdzenia, a następnie z dotychczasowych założeń i przyjętego przez nas przypuszczenia dochodzimy do sprzeczności. W ten sposób pokazujemy, że nasze przypuszczenie musiało być nieprawdziwe, a to znaczy, że prawdziwa jest teza twierdzenia. Przypuśćmy zatem, że zachodzi nierówność $\beta > \alpha$. Chcemy pokazać, że $b > a$. W tym celu przypuśćmy, że teza nie jest prawdziwa, tzn. $b \leq a$. Mamy zatem dwie możliwości:



Rys. 8.18

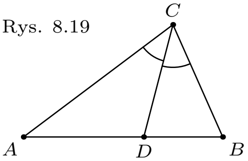
Przypadek 1. $b < a$.
Wtedy z twierdzenia 6 wynika, że $\beta < \alpha$, co jest sprzeczne z założeniem.
Przypadek 2. $b = a$.
Wtedy z twierdzenia 4 wynika, że $\beta = \alpha$, co znów przeczy założeniu.

W obu przypadkach otrzymaliśmy sprzeczność z założeniem. To znaczy, że nasze przypuszczenie było niemożliwe, a więc $b > a$, c. b. d. o.

Wniosek. Przeciwprostokątna trójkąta prostokątnego jest dłuższa od każdej z przyprostokątnych. W trójkącie rozwartokątnym najdłuższym bokiem jest bok leżący naprzeciw kąta rozwartego.

14. Nierówność trójkąta

Twierdzenie 8. Suma dwóch boków trójkąta jest większa od trzeciego boku.

Rys. 8.19


Dowód. Przypuśćmy, że mamy dany trójkąt ABC. Udowodnimy, że $AC+BC > AB$. W tym celu poprowadźmy dwusieczną kąta ACB i oznaczmy literą D punkt przecięcia tej dwusiecznej z bokiem AB (rys. 8.19).

Nr	Stwierdzenie	Uzasadnienie
1.	$\measuredangle ACD = \measuredangle BCD$	CD jest dwusieczną kąta ACB,
2.	$\measuredangle ADC > \measuredangle BCD$	kąt ADC jest kątem zewnętrznym trójkąta DBC,
3.	$\measuredangle ADC > \measuredangle ACD$	1 i 2,
4.	$AC > AD$	twierdzenie 7 (dla trójkąta ADC),
5.	$\measuredangle BDC > \measuredangle ACD$	kąt BDC jest kątem zewnętrznym trójkąta ADC,
6.	$\measuredangle BDC > \measuredangle BCD$	1 i 5,
7.	$BC > BD$	twierdzenie 7 (dla trójkąta DBC),
8.	$AC{+}BC > AD{+}BD$	4 i 7,
9.	$AD + BD = AB$	punkt D leży wewnątrz odcinka AB,
10.	$AC + BC > AB$	8 i 9,
	c. b. d. o.	

Wniosek. Jeśli A, B i C są dowolnymi punktami płaszczyzny, to $AB \leq AC + BC$, przy czym równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy C jest punktem odcinka AB.

Twierdzenie 8 mówi, że jeśli liczby rzeczywiste a, b i c są długościami boków trójkąta, to prawdziwe są trzy nierówności:

$$a + b > c, \quad a + c > b \quad \text{oraz} \quad b + c > a.$$

Prawdziwe jest też twierdzenie odwrotne. Można bowiem udowodnić, że jeśli a, b i c są trzema liczbami rzeczywistymi takimi, że

$$a + b > c, \quad a + c > b, \quad b + c > a,$$

to istnieje trójkąt, którego boki mają długości a, b i c. To twierdzenie odwrotne zapamiętajmy teraz bez dowodu. Zauważmy natomiast, że z powyższych trzech nierówności wynika, iż liczby a, b i c są dodatnie. Jeśli bowiem dodamy do siebie stronami pierwsze dwie nierówności, to otrzymamy

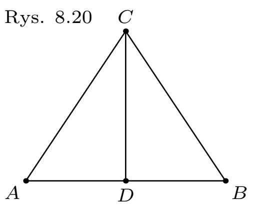
$$2a + b + c > b + c,$$

czyli $2a > 0$, a więc $a > 0$. Podobnie dostajemy $b > 0$ i $c > 0$.

▲

Na tym kończy się pierwsza część tekstu, który dostarczam uczniom. Dalsze części, które na ogół rozdaję też w I klasie, krótko omówię dalej, jednak na ogół bez przytaczania ich w całości. Jak wspomniałem wcześniej, powyższe twierdzenia omawiam na lekcji bardzo dokładnie i proszę uczniów, by nauczyli się dowodów na pamięć. Uważam, że także w matematyce konieczne jest uczenie się na pamięć. Dowody twierdzeń i rozwiązania wielu zadań zawierają ważne pomysły, które będą wykorzystywane przy rozwiązywaniu następnych zadań. Bez opanowania pamięciowego (przynajmniej na początku) tych dowodów i rozwiązań, uczeń nie zapamięta na ogół najistotniejszych pomysłów i tego, w jaki sposób są one wykorzystywane w rozumowaniach. Dopiero z upływem czasu i nabieraniem przez uczniów doświadczenia przychodzi umiejętność zapamiętywania samych pomysłów. Tak przynajmniej dzieje się w przypadku uczniów, którzy nie są wybitnie uzdolnieni, ale są wystarczająco zdolni, by nauczyć się nawet bardzo zaawansowanej matematyki. Przy każdym twierdzeniu wprowadzam pojęcia, które się w nim pojawiają (np. takie jak symetralna odcinka czy odcinki w trójkącie: wysokość, środkowa, dwusieczna — tu odróżniam dwusieczną kąta jako półprostą i dwusieczną w trójkącie, która jest tylko częścią tej półprostej, odcinkiem dwusiecznej kąta zawartym w trójkącie). Na ogół pokazuję także uczniom inne dowody niektórych twierdzeń. Moim zdaniem jest bardzo ważne, by uczniowie zdawali sobie sprawę z tego, że wiele twierdzeń można udowodnić różnymi sposobami i warto czasami znać takie alternatywne dowody. Omówię tutaj twierdzenia 4 i 5 oraz pokażę alternatywny dowód twierdzenia 8.

Rys. 8.20

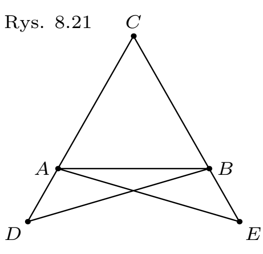


Przypuśćmy więc, że mamy dany trójkąt równoramienny ABC, w którym $AC = BC$. Poprowadźmy w nim środkową CD (rys. 8.20). Nietrudno wówczas pokazać (cecha BBB), że trójkąty ADC i BDC są przystające. Zamiast dwusiecznej kąta (tak jak w dowodzie twierdzenia 4) mogliśmy zatem wziąć środkową. Zauważmy jednak, że jeśli poprowadzimy środkową w dowodzie twierdzenia 5, to dowód „nie wyjdzie". Trójkąty ADC i BDC mają wspólny bok CD, równe boki AD i BD i równe kąty A i B. Kąty te nie leżą jednak między równymi bokami, więc nie możemy zastosować cechy przystawania BKB.

Pokazanie uczniom takich nieudanych „dowodów" jest bardzo kształcące — pokazujemy bowiem, że istnieją sposoby rozumowania, które nie prowadzą do zamierzonego celu. Interesujące jest pytanie, czy w dowodach twierdzeń 4 i 5 można było wziąć wysokość trójkąta. Jest to bardzo naturalny sposób rozumowania dla uczniów — z wysokością zetknęli się wcześniej niż z dwusieczną i środkową. Problem polega na tym, że nie wiemy, czy wysokość leży wewnątrz trójkąta – tego trzeba wcześniej dowieść. Zauważmy następnie, że w dowodzie twierdzenia 5 skorzystaliśmy z twierdzenia o sumie kątów trójkąta, a więc z aksjomatu Euklidesa o równoległych. Euklides prawdopodobnie zdawał sobie sprawę z tego, że dowód korzystający z mniejszej liczby aksjomatów, w szczególności niekorzystający z aksjomatu o równoległych, będzie bardziej elegancki od dowodu twierdzenia przeprowadzonego z użyciem tego aksjomatu. Oto taki dowód niekorzystający z aksjomatu o równoległych.

Przypuśćmy, że dany jest trójkąt ABC, w którym $\measuredangle BAC = \measuredangle ABC$. Przedłużmy boki AC i BD poza punkty A i B, odpowiednio do punktów D i E tak, by $AD = BE$ (rys. 8.21). Ponieważ kąty BAC i ABC są równe, więc równe są też kąty do nich przyległe, tzn. $\measuredangle DAB = \measuredangle EBA$. Teraz na podstawie cechy przystawania BKB stwierdzamy, że trójkąty DAB i EBA są przystające (mają wspólny bok AB, równe boki AD i BE i równe kąty między równymi bokami). Z przystawania tych trójkątów wynikają równości: $DB = EA$, $\measuredangle ADB = \measuredangle BEA$ oraz $\measuredangle EAB = \measuredangle DBA$. Z tej ostatniej równości i z założenia wynika, że $\measuredangle DBC = \measuredangle EAC$. Teraz wreszcie

Rys. 8.21

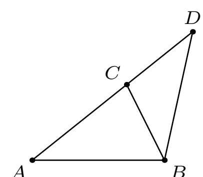


z cechy przystawania KBK wynika, że trójkąty DBC i EAC są przystające, a zatem $AC = BC$. W podobny sposób można udowodnić twierdzenie 4, co pozostawię jako ćwiczenie.

Z dowodem tym wiąże się ciekawa, pouczająca historia. Łamana $ABDAEB$, swoim kształtem nieco przypominająca most, była przez średniowiecznych żaków nazywana „oślim mostem" (po łacinie *pons asinorum*). Uważali oni, że przebrnięcie przez dowody obu twierdzeń (czwartego i odwrotnego do niego piątego) jest jak przejście przez ten most i tylko osły nie są w stanie tego dokonać...

Istnieje jeszcze jeden ciekawy dowód obu twierdzeń, pochodzący chyba od Pappusa. Mianowicie w twierdzeniu 4 zauważamy, że $\triangle ABC \equiv \triangle BAC$ (z cechy przystawania BKB: $AC = BC$, $BC = AC$, $\measuredangle ACB = \measuredangle BCA$); w twierdzeniu 5 do tego samego wniosku dochodzimy na podstawie cechy przystawania KBK. Ten dowód jednak wydaje mi się nieco zbyt abstrakcyjny dla gimnazjalisty — zwłaszcza na początku nauki geometrii. Przystawanie trójkątów w tym dowodzie jest tak naprawdę relacją nie między figurami geometrycznymi, ale między uporządkowanymi trójkami punktów. Wydaje się, że mówienie o przystawaniu figur, nawet jeśli bardzo konsekwentnie zwracamy uwagę na kolejność punktów (czyli ich odpowiedniość), jest czymś znacznie prostszym dla ucznia, niż rozpatrywanie relacji między uporządkowanymi trójkami punktów lub przystawaniem trójkąta do siebie, ale w innym położeniu.

Twierdzenie 8 można udowodnić w następujący sposób. Najpierw przedłużamy bok AC trójkąta ABC do punktu D takiego, że $CD = BC$ i łączymy punkt D z punktem B (rys. 8.22). Ponieważ $CD = BC$, więc kąty ADB i CBD są równe. Kąt CDB jest przy tym mniejszy od kąta ABD; zatem mamy $\measuredangle ADB < \measuredangle ABD$ i w trójkącie ABD naprzeciw mniejszego kąta leży krótszy bok: $AB < AD$. Ponieważ $AD = AC + CD = AC + BC$, otrzymujemy żądaną nierówność: $AB < AC + BC$. Widzimy, że ten dowód jest oparty na zupełnie innym pomyśle niż dowód zamieszczony w tekście dla uczniów. O wyborze poprzedniego dowodu zadecydowało chyba to, że chciałem, by uczniowie szybciej nauczyli się wykorzystywać odcinki w trójkącie; w tym wypadku dwusieczną.



Rys. 8.22

Po omówieniu podstawowych twierdzeń robię z nich klasówkę. Na klasówce daję zazwyczaj 3–4 twierdzenia i oczekuję przytoczenia dokładnych dowodów. Uczniowie zazwyczaj nie wierzą, że będę wymagał przytoczenia dowodu ze wszystkimi szczegółami; wyniki klasówki są więc na ogół dość mizerne. Dopiero poprawa klasówki, którą robię po kilku dniach od podania wyników, przynosi oczekiwane rezultaty. Uczniowie przyjmują do wiadomości, że dowodów trzeba rzeczywiście nauczyć się na pamięć i zdecydowana większość klasy otrzymuje oceny bardzo dobre. Wtedy przechodzę z uczniami do rozwiązywania zadań. Zadania są zgrupowane w zestawy. Zestaw I składa się z zadań, których rozwiązanie polega na tzw. rachunku kątów. Zestaw II — poza zadaniem pierwszym — składa się z zadań dotyczących własności trójkątów równoramiennych; w zadaniach tych wykorzystuje się cechy przystawania trójkątów w najprostszych sytuacjach. Zestaw III zawiera zadania dotyczące przystawania trójkątów. Wreszcie zestaw IV to zadania dotyczące nierówności w geometrii. Zatrzymajmy się na chwilę w tym miejscu. Rozwiązania zadań, które uczniowie prezentują na tablicy, muszą także być dokładnie zapisywane w punktach. Coraz częściej, zwłaszcza wtedy, gdy ja sam pokazuję rozwiązanie, na tablicy zostaje zapisany tylko szkic rozwiązania. Uczniowie mają wtedy przekształcić taki szkic w dokładny dowód zapisany w punktach. W tym czasie robię dwie następne klasówki. Pierwsza obejmuje tylko zestaw I zadań. Znów nie wymagam od uczniów samodzielnych rozwiązań: mają wyłącznie nauczyć się rozwiązań zadań z tego zestawu i przytoczyć na klasówce dokładnie te rozwiązania. Jest to klasówka dość krótka, zawiera 3 – 4 zadania. Po zrobieniu zadań z zestawu IV robię dużą, dwugodzinną; czasem, ze względu na plan lekcji, rozbijam ją na dwie klasówki godzinne, oceniane wspólnie. Na tej klasówce daję 8 zadań: cztery zadania wybieram z zestawów II – IV (jedno zadanie z zestawu II, dwa z zestawu III i jedno z zestawu IV), trzy zadania bardzo podobne do zadań z tych trzech zestawów i jedno zadanie zupełnie nowe (na szóstkę). Po tej klasówce uczniowie otrzymują (w postaci pliku pdf) moje rozwiązania zadań z czterech pierwszych zestawów; te rozwiązania nie są zapisane w punktach, ale tak, jak zazwyczaj zapisujemy dowody twierdzeń matematycznych. Uczniowie, którzy zaliczyli tę ostatnią klasówkę, mają odtąd prawo zapisywania dowodów twierdzeń nie w punktach, ale zwykłym „językiem matematycznym". Interesujące jest to, że wielu uczniów pozostaje jeszcze długo przy zapisie bardziej formalnym i nawet w II klasie zapisują w ten sposób rozwiązania zadań olimpijskich. Mówią przy tym, że ten zapis daje im znacznie większą pewność poprawności rozumowania.

Staram się, by do końca I klasy wszyscy uczniowie zaliczyli (czasem nawet po dwóch poprawach) tę dużą klasówkę. W niektórych klasach udało mi się także rozwiązać z uczniami zadania z V i VI zestawu; rzadko zdarzało mi się dotrzeć w I klasie do zestawu VII. Zestaw V zawiera zadania dotyczące własności czworokątów: najpierw są zadania o równoległobokach, potem nierówności. Zestaw VI to zadania o wielokątach wykorzystujące cechy przystawania trójkątów. Wreszcie zestaw VII to zadania na twierdzenie Pitagorasa. Następne zestawy zadań dotyczą już geometrii okręgu i rozwiązujemy je dopiero w II klasie. Popatrzmy zatem na wszystkie zestawy zadań; komentarze do poszczególnych zestawów zamieszczę po rozwiązaniach zadań każdego zestawu:

Zestaw I

1. Udowodnij, że dwusieczne kątów przyległych są prostopadłe. Udowodnij, że dwusieczne kątów wierzchołkowych przedłużają się.

2. Punkt O leży wewnątrz trójkąta ABC. Udowodnij, że $\measuredangle AOB > \measuredangle ACB$.

3. Dany jest trójkąt ostrokątny równoramienny ABC, w którym $AC = BC$. Odcinek AD jest wysokością tego trójkąta. Udowodnij, że $\measuredangle ACB = 2 \cdot \measuredangle BAD$.

4. Dany jest trójkąt prostokątny ABC, w którym $\measuredangle C = 90°$. Odcinek CD jest wysokością tego trójkąta. Udowodnij, że $\measuredangle BAC = \measuredangle BCD$ i $\measuredangle ABC = \measuredangle ACD$.

5. Dany jest trójkąt prostokątny ABC, w którym $\measuredangle B = 90°$ oraz $\measuredangle A = 45°$. Udowodnij, że $AB = BC$. Dany jest trójkąt prostokątny ABC, w którym $\measuredangle B = 90°$ oraz $\measuredangle A = 60°$. Udowodnij, że $AC = 2 \cdot AB$.

6. Na przeciwprostokątnej AB trójkąta prostokątnego ABC wybrano punkty D i E w taki sposób, by $AC = AE$ oraz $BC = BD$. Udowodnij, że $\measuredangle DCE = 45°$.

7. Dany jest trójkąt ABC, w którym $\measuredangle BAC = \alpha$, $\measuredangle ABC = \beta$ oraz $\measuredangle ACB = \gamma$. Na bokach BC, AC i AB tego trójkąta wybrano odpowiednio punkty D, E i F w taki sposób, by $AE = AF$, $BD = BF$ i $CD = CE$. Oblicz miary kątów trójkąta DEF.

8. W trójkącie ABC poprowadzono środkową AD. Udowodnij, że $BC = 2 \cdot AD$ wtedy i tylko wtedy, gdy trójkąt ABC jest prostokątny.

9. W trójkącie ABC poprowadzono dwusieczne kątów A i B. Przez punkt przecięcia tych dwusiecznych poprowadzono prostą l równoległą do boku AB. Prosta l przecina bok AC w punkcie D i bok BC w punkcie F. Udowodnij, że $DF = AD + BF$.

10. W trójkącie ostrokątnym ABC poprowadzono wysokości AD i BE. Udowodnij, że $\measuredangle CAD = \measuredangle CBE$, $\measuredangle CAB = \measuredangle CDE$ oraz $\measuredangle CBA = \measuredangle CED$.

Zestaw II

11. Dane są przystające trójkąty ABC i DEF. W trójkącie ABC poprowadzono środkową AM, dwusieczną AK i wysokość AH. W trójkącie DEF poprowadzono środkową DN, dwusieczną DL i wysokość DG. Udowodnij, że:

$$AM = DN, \quad AK = DL \quad \text{oraz} \quad AH = DG.$$

12. Trójkąt ABC jest równoramienny: $AC = BC$. W trójkącie tym poprowadzono dwusieczną CD. Udowodnij, że ta dwusieczna jest środkową i wysokością.

13. W trójkącie równoramiennym ABC, w którym $AC = BC$, poprowadzono wysokości AD i BE. Udowodnij, że $AD = BE$.

14. W trójkącie równoramiennym ABC, w którym $AC = BC$, poprowadzono środkowe AD i BE. Udowodnij, że $AD = BE$.

15. W trójkącie równoramiennym ABC, w którym $AC = BC$, poprowadzono dwusieczne AD i BE. Udowodnij, że $AD = BE$.

16. W trójkącie ostrokątnym ABC poprowadzono wysokości AD i BE. Udowodnij, że jeśli $AD = BE$, to trójkąt ABC jest równoramienny. Rozwiąż analogiczne zadanie dla trójkąta rozwartokątnego.

17. W trójkącie ABC poprowadzono wysokości AD i BE. Proste zawierające te wysokości przecinają się w punkcie P. Udowodnij, że jeśli $AP = PB$, to trójkąt ABC jest równoramienny.

18. W trójkącie ABC środkowa CD jest też wysokością. Udowodnij, że trójkąt ABC jest równoramienny.

19. W trójkącie ABC dwusieczna CD jest też wysokością. Udowodnij, że trójkąt ABC jest równoramienny.

20. W trójkącie ABC środkowa CD jest też dwusieczną. Udowodnij, że trójkąt ABC jest równoramienny.

Zestaw III

21. W trójkątach ABC i DEF poprowadzono środkowe AM i DN. Udowodnij, że trójkąty ABC i DEF są przystające, jeśli:
- a) $AB = DE$, $BC = EF$ oraz $AM = DN$,
- b) $AM = DN$, $BC = EF$ oraz $\measuredangle AMB = \measuredangle DNE$,
- c) $AB = DE$, $AM = DN$ oraz $\measuredangle MAB = \measuredangle NDE$,
- d) $AB = DE$, $\measuredangle B = \measuredangle E$ oraz $\measuredangle MAB = \measuredangle NDE$,
- e) $AB = DE$, $AC = DF$ oraz $AM = DN$.

22. W trójkątach ABC i DEF poprowadzono dwusieczne AK i DL. Udowodnij, że trójkąty ABC i DEF są przystające, jeśli:
- a) $AB = DE$, $AK = DL$ oraz $\measuredangle A = \measuredangle D$,
- b) $AK = DL$, $\measuredangle A = \measuredangle D$ oraz $\measuredangle AKB = \measuredangle DLE$.

23. W trójkącie ABC poprowadzono środkową AD. Udowodnij, że punkty B i C są jednakowo oddalone od prostej AD.

24. Na półprostej OA leży punkt B, a na półprostej OC leży punkt D tak, że $OA = OC$ oraz $OB = OD$. Odcinki AD i BC przecinają się w punkcie P. Udowodnij, że trójkąty OAD i OCB są przystające. Udowodnij, że półprosta OP jest dwusieczną kąta AOC.

25. Na bokach AB, BC i CA trójkąta równobocznego ABC leżą odpowiednio punkty D, E i F tak, że $AD = BE = CF$. Udowodnij, że trójkąt DEF jest równoboczny.

26. Na bokach BC, AC i BA trójkąta równobocznego ABC wybieramy odpowiednio punkty D, E i F tak, że $AF = BD = CE$. Odcinki AD i BE przecinają się w punkcie K; odcinki BE i CF przecinają się w punkcie L; odcinki CF i AD przecinają się w punkcie M. Udowodnij, że trójkąt KLM jest równoboczny.

27. Dany jest trójkąt równoboczny ABC. Na półprostych AB, BC i CA (na zewnątrz trójkąta ABC) wybrano punkty D, E i F tak, że $AD = BE = CF$. Udowodnij, że trójkąt DEF jest równoboczny.

28. Na bokach AB, BC i CA trójkąta ABC zbudowano (na zewnątrz trójkąta) trzy trójkąty równoboczne: AFB, BDC i CEA. Udowodnij, że $AD = BE = CF$.

29. W trójkącie ABC, w którym kąt C jest prosty, przedłużono bok AC poza punkt C do punktu D takiego, że $CD = CB$ oraz przedłużono bok BC poza punkt C do punktu E takiego, że $CE = CA$. Udowodnij, że przedłużenie wysokości CF trójkąta ABC jest środkową w trójkącie CDE.

30. Udowodnij, że jeśli punkt M leży na podstawie AB trójkąta równoramiennego ABC, to suma odległości punktu M od ramion AC i BC nie zależy od położenia punktu M. Udowodnij, że suma odległości dowolnego punktu M znajdującego się wewnątrz trójkąta równobocznego od trzech boków tego trójkąta nie zależy od położenia punktu M.

Zestaw IV

31. Znajdź wszystkie wartości zmiennej x, dla których istnieje trójkąt o następujących długościach boków:
a) $a = 3x + 3$, $b = 4x + 1$, $c = 13 - 2x$;
b) $a = 3x - 6$, $b = 4x - 1$, $c = 11 - 2x$.

32. Znajdź wszystkie wartości zmiennej x, dla których istnieje trójkąt równoramienny o następujących długościach boków:
a) $a = 2x + 5$, $b = 3x + 4$, $c = 4x + 1$,
b) $a = 2x + 1$, $b = 3x + 1$, $c = 4x + 1$,
c) $a = 2x + 3$, $b = 3x + 7$, $c = 4x + 1$,
d) $a = 8x - 1$, $b = 7x - 2$, $c = 9x - 2$.
W każdym przypadku oblicz długości boków trójkąta.

33. Punkt O leży wewnątrz trójkąta ABC. Udowodnij, że $AO + OB < AC + BC$.

34. Punkt O leży wewnątrz trójkąta ABC. Udowodnij, że

$$\frac{1}{2} \cdot (AB + BC + CA) < AO + BO + CO < AB + BC + CA.$$

35. W trójkącie ABC połączono wierzchołek A z dowolnym punktem D boku BC. Udowodnij, że $2 \cdot AD > AB + AC - BC$. Udowodnij, że jeśli punkt D jest środkiem boku BC trójkąta ABC, to $2 \cdot AD < AB + AC$.

36. Niech punkty D, E i F będą środkami boków BC, AC i AB trójkąta ABC. Udowodnij, że

$$\frac{1}{2} \cdot (AB + AC + BC) < AD + BE + CF < AB + AC + BC.$$

37. Dany jest trójkąt ABC, w którym $AB > AC$. Odcinek AD jest dwusieczną kąta A w trójkącie ABC. Udowodnij, że $BD > CD$ oraz $\measuredangle ADB > \measuredangle ADC$.

38. Dany jest trójkąt ABC, w którym $AB > AC$. Odcinek AD jest środkową boku BC. Udowodnij, że $\measuredangle BAD < \measuredangle CAD$.

39. Punkty K i L leżą na boku AB trójkąta ABC. Udowodnij, że obwód trójkąta KLC jest mniejszy od obwodu trójkąta ABC.

40. Trójkąt KLM leży wewnątrz trójkąta ABC. Udowodnij, że obwód trójkąta KLM jest mniejszy od obwodu trójkąta ABC.

Zestaw V

41. Dany jest równoległobok $ABCD$. Udowodnij, że przeciwległe boki i przeciwległe kąty są równe, tzn. $AB = CD$, $AD = BC$, $\measuredangle DAB = \measuredangle BCD$ i $\measuredangle ABC = \measuredangle ADC$.

42. Przekątne równoległoboku $ABCD$ przecinają się w punkcie P. Udowodnij, że ten punkt jest środkiem obu przekątnych, tzn. $AP = CP$ oraz $BP = DP$.

43. Dany jest czworokąt $ABCD$ taki, że $AB = CD$ i $AD = BC$. Udowodnij, że ten czworokąt jest równoległobokiem.

44. Dany jest czworokąt $ABCD$ taki, że $AB = CD$ i $AB \parallel CD$. Udowodnij, że ten czworokąt jest równoległobokiem.

45. Dany jest czworokąt $ABCD$ taki, że $\measuredangle DAB = \measuredangle DCB$ i $\measuredangle ABC = \measuredangle ADC$. Udowodnij, że ten czworokąt jest równoległobokiem.

46. Przekątne czworokąta $ABCD$ przecinają się w punkcie P, przy czym $AP = CP$ oraz $BP = DP$. Udowodnij, że ten czworokąt jest równoległobokiem.

47. Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$ taki, że $AD = BD$. Udowodnij, że $BC < AC$.

48. Udowodnij, że suma odległości dowolnego punktu płaszczyzny od wierzchołków danego czworokąta jest większa od połowy obwodu tego czworokąta.

49. Znajdź punkt położony wewnątrz czworokąta wypukłego, dla którego suma odległości od wierzchołków tego czworokąta jest najmniejsza.

50. Udowodnij, że suma długości przekątnych czworokąta wypukłego jest mniejsza od obwodu tego czworokąta, zaś większa od połowy obwodu czworokąta.

Zestaw VI

51. W pięciokącie wypukłym $ABCDE$ poprowadzono wszystkie przekątne. Oblicz sumę kątów $\measuredangle CAD + \measuredangle DBE + \measuredangle ECA + \measuredangle ADB + \measuredangle BEC$.

52. Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$. Punkty P, Q, R i S są punktami przecięcia dwusiecznych kątów zewnętrznych czworokąta $ABCD$. Udowodnij, że sumy przeciwległych kątów czworokąta $PQRS$ są równe.

53. Na bokach BC i CD równoległoboku $ABCD$ zbudowano (na zewnątrz równoległoboku) trójkąty równoboczne BCK i DCL. Udowodnij, że trójkąt AKL jest równoboczny.

54. Udowodnij, że punkty przecięcia dwusiecznych kątów równoległoboku nie będącego rombem są wierzchołkami prostokąta.

55. Dany jest równoległobok $ABCD$ z kątem ostrym przy wierzchołku A. Na półprostej AB wyznaczono punkt M ($M \neq B$) taki, że $CB = CM$, a na półprostej CB punkt N ($N \neq B$) taki, że $AB = AN$. Udowodnij, że $DM = DN$.

56. W równoległoboku $ABCD$, w którym bok AB jest dwa razy dłuższy od boku BC, połączono środek M boku AB z wierzchołkami C i D. Udowodnij, że kąt CMD jest prosty.

57. Na bokach AB i BC kwadratu $ABCD$ obrano odpowiednio punkty E i F, takie, że $EB + BF = AB$. Udowodnij, że suma kątów BAF, EDF i ECB wynosi $90°$.

58. W czworokącie $ABCD$ mamy $AB = AD$ i $BC = CD$. Wykaż, że kąty B i D są równe. Wykaż, że przekątne tego czworokąta są prostopadłe.

59. Na bokach AB, BC i CA trójkąta ABC zbudowano trzy trójkąty równoboczne: APB, BRC i CQA. Trójkąt BRC leży po tej samej stronie boku BC co trójkąt ABC; pozostałe dwa leżą na zewnątrz trójkąta ABC. Udowodnij, że punkty A, P, R i Q są współliniowe lub są wierzchołkami równoległoboku.

60. Dane są dwa kwadraty: $ABCD$ i $AEFG$. W obu kwadratach podana kolejność wierzchołków jest przeciwna do ruchu wskazówek zegara. Udowodnij, że $BE = DG$.

Zestaw VII

61. Dwaj turyści wyruszają jednocześnie z tego samego miejsca. Jeden z nich idzie na północ z prędkością 5 kilometrów na godzinę, drugi jedzie na rowerze na zachód z prędkością 12 kilometrów na godzinę. Po jakim czasie odległość między nimi będzie wynosiła 39 kilometrów?
Uwaga. Na potrzeby tego zadania przyjmij, że Ziemia jest płaska.

62. Jeden koniec linki od latawca, mającej 41 m długości, umocowano na wysokości 1 m do tyczki wbitej pionowo w ziemię. Latawiec znajduje się nad miejscem odległym od tyczki o 40 m. Na jakiej wysokości znajduje się latawiec? Przyjmij, że linka jest tak napięta, że stanowi odcinek linii prostej.

63. Dwie wieże, jedna o wysokości 40 metrów i druga o wysokości 30 metrów, stoją w odległości 50 metrów od siebie. W jakiej odległości od wyższej wieży znajduje się (na powierzchni ziemi) punkt jednakowo oddalony od wierzchołków obu wież?

64. Dany jest trójkąt ABC, w którym $AB = 14$, $AC = 15$ oraz $BC = 13$. Oblicz długości wszystkich wysokości tego trójkąta.

65. W trójkącie ABC mamy dane: $AB = 16$, $BC = 6$ oraz $\measuredangle B = 60°$. Oblicz długość boku AC.

66. Podstawy AB i CD trapezu $ABCD$ mają odpowiednio długości 13 i 5. Ramię AD jest prostopadłe do podstaw i ma długość 15. Symetralna ramienia BC przecina ramię AD w punkcie E. Oblicz długość odcinka AE.

67. Dany jest prostokąt $ABCD$ i dowolny punkt P, położony na płaszczyźnie. Udowodnij, że $AP^2 + CP^2 = BP^2 + DP^2$.

68. Dany jest trójkąt prostokątny ABC, w którym $\measuredangle C = 90°$. W tym trójkącie poprowadzono środkowe AD i BE. Udowodnij, że $4 \cdot (AD^2 + BE^2) = 5 \cdot AB^2$.

69. Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$. Udowodnij, że przekątne AC i BD tego czworokąta są prostopadłe wtedy i tylko wtedy, gdy $AB^2 + CD^2 = AD^2 + BC^2$.

70. Znajdź wszystkie takie liczby rzeczywiste x, by trójkąt o bokach następujących długości był prostokątny:

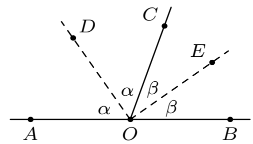
a) $a = x + 16$, $b = x + 18$, $c = x + 34$;

b) $a = x + 2$, $b = x + 3$, $c = x + 11$.

Zestaw I — szkice rozwiązań.

1. Udowodnij, że dwusieczne kątów przyległych są prostopadłe. Udowodnij, że dwusieczne kątów wierzchołkowych przedłużają się.

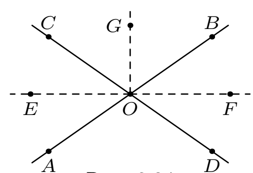
Rozwiązanie. Niech najpierw półproste OD i OE będą dwusiecznymi kątów przyległych AOC i BOC (rys. 8.23). Kąty AOD i DOC są równe; oznaczmy je literą α. Kąty BOE i EOC są równe; oznaczmy je literą β. Ponieważ punkty A, O, B są współliniowe, więc $2\alpha + 2\beta = \measuredangle AOB = 180^\circ$. Zatem



Rys. 8.23

$$\measuredangle DOE = \alpha + \beta = 90^\circ.$$

Niech teraz proste AB i CD przecinają się w punkcie O (rys. 8.24). Niech następnie półproste OE i OF będą dwusiecznymi kątów AOC i BOD. Poprowadźmy dwusieczną OG kąta BOC. Półproste OE i OG są dwusiecznymi kątów przyległych AOC i COB, a więc są prostopadłe. Podobnie, półproste OG i OF są prostopadłe. Zatem $\measuredangle EOF = 180^\circ$. To znaczy, że półproste OE i OF tworzą jedną prostą, czyli się przedłużają.



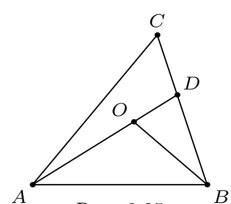
Rys. 8.24

2. Punkt O leży wewnątrz trójkąta ABC. Udowodnij, że $\measuredangle AOB > \measuredangle ACB$.

Rozwiązanie. Pokażę dwa sposoby rozwiązania tego zadania.

Sposób I. Przedłużmy odcinek AO do przecięcia z bokiem BC trójkąta ABC (rys. 8.25). Kąt AOB jest kątem zewnętrznym trójkąta BDO; zatem $\measuredangle AOB > \measuredangle BDO$. Kąt BDO jest kątem zewnętrznym trójkąta ADC; zatem $\measuredangle BDO > \measuredangle ACD$. Stąd wynika, że

$$\measuredangle AOB > \measuredangle ACD.$$



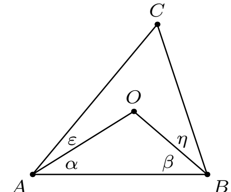
Rys. 8.25

Sposób II. Oznaczmy kąty tak jak na rysunku 8.26. Mamy wówczas

$$\measuredangle BAC = \alpha + \varepsilon, \quad \measuredangle ABC = \beta + \eta.$$

Stąd wynika, że

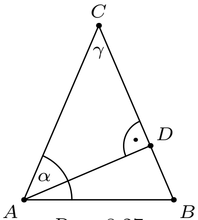
$$\measuredangle ACB = 180^\circ - \measuredangle BAC - \measuredangle ABC = 180^\circ - \alpha - \beta - \varepsilon - \eta =$$
$$= (180^\circ - \alpha - \beta) - (\varepsilon + \eta) = \measuredangle AOB - (\varepsilon + \eta),$$



Rys. 8.26

a więc $\measuredangle ACB < \measuredangle AOB$.

3. Dany jest trójkąt ostrokątny równoramienny ABC, w którym $AC = BC$. Odcinek AD jest wysokością tego trójkąta. Udowodnij, że $\measuredangle ACB = 2 \cdot \measuredangle BAD$.



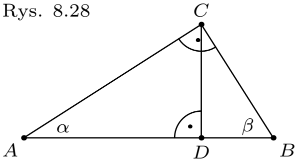
Rys. 8.27

Rozwiązanie. Oznaczmy $\measuredangle ACB = \gamma$ oraz $\measuredangle BAC = \alpha$ (rys. 8.27). Wtedy $\gamma = 180° - 2\alpha$, czyli $\alpha = \frac{180°-\gamma}{2} = 90° - \frac{\gamma}{2}$. Stąd dostajemy

$$\measuredangle BAD = \alpha - \measuredangle CAD = \alpha - (90° - \gamma) = 90° - \frac{\gamma}{2} - 90° + \gamma = \frac{\gamma}{2},$$

czyli $\measuredangle ACB = \gamma = 2 \cdot \measuredangle BAD$.

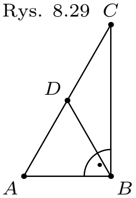
4. Dany jest trójkąt prostokątny ABC, w którym $\measuredangle C = 90°$. Odcinek CD jest wysokością tego trójkąta. Udowodnij, że $\measuredangle BAC = \measuredangle BCD$ i $\measuredangle ABC = \measuredangle ACD$.

Rys. 8.28


Rozwiązanie. Oznaczmy kąty ostre trójkąta ABC jak na rysunku 8.28. Wtedy $\alpha + \beta = 90°$, skąd dostajemy

$$\measuredangle BCD = 90° - \beta = \alpha \quad \text{oraz} \quad \measuredangle ACD = 90° - \alpha = \beta.$$

5. Dany jest trójkąt prostokątny ABC, w którym $\measuredangle B = 90°$ oraz $\measuredangle A = 45°$. Udowodnij, że $AB = BC$. Dany jest trójkąt prostokątny ABC, w którym $\measuredangle B = 90°$ oraz $\measuredangle A = 60°$. Udowodnij, że $AC = 2 \cdot AB$.

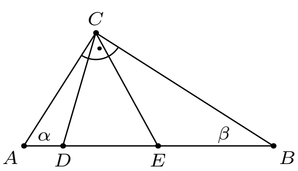
Rys. 8.29


Rozwiązanie. Jeśli $\measuredangle A = 45°$ i $\measuredangle B = 90°$, to $\measuredangle C = 45° = \measuredangle A$. Zatem z twierdzenia 5 wynika, że $AB = BC$. Przypuśćmy teraz, że $\measuredangle A = 60°$ i $\measuredangle B = 90°$; wtedy, oczywiście, $\measuredangle C = 30°$. Na przeciwprostokątnej AC wybierzmy teraz punkt D tak, by $AD = AB$ (rys. 8.29). Trójkąt ABD jest równoramienny, przy czym jeden jego kąt jest równy 60°. Stąd wynika, że wszystkie kąty tego trójkąta są równe 60°. Zatem $AB = AD = BD$. Ponadto $\measuredangle DBC = 30° = \measuredangle DCB$. Zatem trójkąt BCD jest równoramienny: $BD = CD$. Stąd otrzymujemy równość $AB = AD = BD = CD$, z której wynika, że $AC = 2 \cdot AB$.

Uwaga. Inny sposób rozwiązania otrzymamy przedłużając bok AB do punktu D takiego, że $AB = BD$. Zauważamy, że trójkąty ABC i DBC są przystające (cecha BKB), a więc $\measuredangle ADC = 60°$. Stąd wynika, że trójkąt ADC jest równoboczny. Ponieważ $AD = 2 \cdot AB$, więc $AC = 2 \cdot AB$.

6. Na przeciwprostokątnej AB trójkąta prostokątnego ABC wybrano punkty D i E w taki sposób, by $AC = AE$ oraz $BC = BD$. Udowodnij, że $\measuredangle DCE = 45°$.

Rozwiązanie. Oznaczmy kąty ostre A i B trójkąta ABC tak jak na rysunku 8.30. Wówczas mamy $\alpha + \beta = 90°$. Ponieważ $AC = AE$, więc



Rys. 8.30

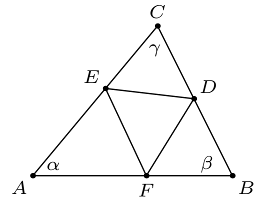
$$\measuredangle ACE = \measuredangle AEC = \frac{180° - \alpha}{2} = 90° - \frac{\alpha}{2}.$$

W podobny sposoób pokazujemy, że $\measuredangle BDC = 90° - \frac{\beta}{2}$. Zatem z twierdzenia o sumie kątów trójkąta DEC otrzymujemy

$$\measuredangle DCE = 180° - \measuredangle AEC - \measuredangle BDC = 180° - \left(90° - \frac{\alpha}{2}\right) - \left(90° - \frac{\beta}{2}\right) = \frac{\alpha + \beta}{2} = 45°.$$

7. Dany jest trójkąt ABC, w którym $\measuredangle BAC = \alpha$, $\measuredangle ABC = \beta$ oraz $\measuredangle ACB = \gamma$. Na bokach BC, AC i AB tego trójkąta wybrano odpowiednio punkty D, E i F w taki sposób, by $AE = AF$, $BD = BF$ i $CD = CE$. Oblicz miary kątów trójkąta DEF.

Rozwiązanie. Oznaczmy kąty trójkąta tak jak na rysunku 8.31. Wówczas



Rys. 8.31

$$\measuredangle AFE = \measuredangle AEF = \frac{180^\circ - \alpha}{2} = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}.$$

Podobnie $\measuredangle BFD = \measuredangle BDF = 90^\circ - \frac{\beta}{2}$. Stąd dostajemy

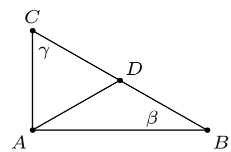
$$\measuredangle EFD = 180^\circ - \measuredangle AFE - \measuredangle BFD = 180^\circ - \left(90^\circ - \frac{\alpha}{2}\right) - \left(90^\circ - \frac{\beta}{2}\right) = \frac{\alpha+\beta}{2}.$$

W podobny sposób obliczamy pozostałe kąty trójkąta DEF, otrzymując ostatecznie:

$$\measuredangle EDF = \frac{\beta+\gamma}{2} = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}, \quad \measuredangle DEF = \frac{\alpha+\gamma}{2} = 90^\circ - \frac{\beta}{2}, \quad \measuredangle EFD = \frac{\alpha+\beta}{2} = 90^\circ - \frac{\gamma}{2}.$$

8. W trójkącie ABC poprowadzono środkową AD. Udowodnij, że $BC = 2 \cdot AD$ wtedy i tylko wtedy, gdy trójkąt ABC jest prostokątny.

Rozwiązanie. Poprowadźmy w trójkącie ABC środkową AD i oznaczmy kąty ostre tego trójkąta literami β i γ (rys. 8.32). Załóżmy najpierw, że $BC = 2 \cdot AD$. Wtedy $AD = BD = CD$, a więc trójkąty ABD i ACD są równoramienne. Stąd mamy $\measuredangle BAD = \beta$ oraz $\measuredangle CAD = \gamma$. Zatem

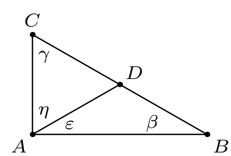


Rys. 8.32

$$180^\circ = \measuredangle BAC + \measuredangle ABC + \measuredangle ACB = (\beta + \gamma) + \beta + \gamma = 2\beta + 2\gamma,$$

czyli $\measuredangle BAC = \beta + \gamma = 90^\circ$. Trójkąt ABC jest więc prostokątny.

Przeprowadzimy teraz dowód w drugą stronę. Przypuśćmy, że trójkąt ABC jest prostokątny i oznaczmy kąty tak jak na rysunku 8.33. Z założeń wynika, że $\beta + \gamma = 90^\circ$ oraz $BD = CD$. Prowadzimy dowód niewprost. Załóżmy, że $AD \neq BD$. Przypuśćmy najpierw, że $AD < BD$. Wtedy $\beta < \varepsilon$. Ponieważ $BD = CD$, więc również $AD < CD$, czyli $\gamma < \eta$. Zatem $\measuredangle BAC = \varepsilon + \eta > \beta + \gamma = 90^\circ$, co jest sprzeczne z założeniem. Podobnie doprowadzamy do sprzeczności przypuszczenie, że $AD > BD$. Zatem $AD = BD$, czyli $BC = 2 \cdot AD$.

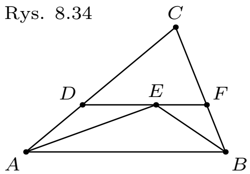


Rys. 8.33

Uwaga. Inne rozwiązanie otrzymamy przedłużając odcinek AD (poza punkt D) do punktu E takiego, że $DE = AD$. Teraz zauważamy, że trójkąty ACD i EBD są przystające (cecha BKB). Stąd wynika, że $AC = BE$ oraz $\measuredangle EBD = \gamma$. Zatem mamy równość $\measuredangle ABE = \beta + \gamma = 90^\circ$. Stąd wynika, że trójkąty ABC i BAE są przystające, a więc $AE = BC$. Zatem $2 \cdot AD = 2 \cdot BD$, czyli ostatecznie $AD = BD = CD$.

9. W trójkącie ABC poprowadzono dwusieczne kątów A i B. Przez punkt przecięcia tych dwusiecznych poprowadzono prostą l równoległą do boku AB. Prosta l przecina bok AC w punkcie D i bok BC w punkcie F. Udowodnij, że $DF = AD + BF$.

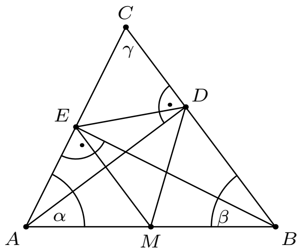
Rys. 8.34



Rozwiązanie. Niech E będzie punktem przecięcia dwusiecznych kątów CAB i CBA (rys. 8.34). Ponieważ $DF \parallel AB$, więc $\measuredangle BAE = \measuredangle DEA$ (kąty naprzemianległe). Ponieważ półprosta AE jest dwusieczną kąta BAD, więc $\measuredangle BAE = \measuredangle DAE$. Zatem $\measuredangle DAE = \measuredangle DEA$, skąd wynika, że $AD = DE$. Podobnie pokazujemy, że $BF = EF$, a więc $AD + BF = DE + EF = DF$.

10. W trójkącie ostrokątnym ABC poprowadzono wysokości AD i BE. Udowodnij, że $\measuredangle CAD = \measuredangle CBE$, $\measuredangle CAB = \measuredangle CDE$ oraz $\measuredangle CBA = \measuredangle CED$.

Rozwiązanie. Oznaczmy literami α, β i γ kąty trójkąta ABC. Niech punkt M będzie środkiem boku AB (rys. 8.35). Najpierw zauważamy, że $\measuredangle CAD = \measuredangle CBE = 90° - \gamma$. Następnie zauważamy, że odcinki DM i EM są środkowymi w trójkątach prostokątnych ABD i ABE, poprowadzonymi z wierzchołków kątów prostych. Z zadania 8 wynika zatem, że trójkąty AEM i BDM są równoramienne:



Rys. 8.35

$$DM = EM = AM = BM.$$

Stąd: $\measuredangle MAE = \measuredangle MEA = \alpha$, a zatem $\measuredangle AME = 180° - 2\alpha$. Następnie: $\measuredangle MBD = \measuredangle MDB = \beta$, a więc $\measuredangle BMD = 180° - 2\beta$. Możemy teraz obliczyć kąty trójkąta równoramiennego MDE:

$$\measuredangle DME = 180° - \measuredangle AME - \measuredangle BMD = 180° - (180° - 2\alpha) - (180° - 2\beta) = 2\alpha + 2\beta - 180°$$

oraz

$$\measuredangle MDE = \measuredangle MED = \frac{180° - (2\alpha + 2\beta - 180°)}{2} = 180° - (\alpha + \beta).$$

Wreszcie

$$\measuredangle CED = 180° - \measuredangle AME - \measuredangle MED = 180° - \alpha - (180° - \alpha - \beta) = \beta = \measuredangle ABC$$

i podobnie $\measuredangle CDE = \alpha = \measuredangle BAC$.

W drugiej części zadania 1 uczniowie rzadko dorysowują dwusieczną kąta BOC; częściej prowadzą dowód bezpośredni podobny do dowodu pierwszej części. W zadaniu 2 chyba nigdy jeszcze nie znaleźli rozwiązania sposobem pierwszym. Pomysł przedłużenia odcinka AO przydaje się w zestawie 4, jednak uczniowie nie dostrzegają go wówczas, mimo pokazania tego pomysłu teraz. Pierwsza część zadania 5 jest dla uczniów oczywista, w drugiej popełniają bardzo ciekawy błąd: piszą, że — ponieważ kąt C jest dwa razy mniejszy od kąta A — odcinek AB jest dwa razy krótszy od odcinka AC. Próbują przy tym powoływać się na twierdzenie 7 (naprzeciw większego kąta leży dłuższy bok). Nie dostrzegają przy tym dwóch błędów: po pierwsze, nie rozpatrywali obu boków naprzeciw rozważanych kątów; po drugie, twierdzenie 7 mówi tylko o tym, który bok jest dłuższy i nie mówi, ile razy dłuższy. Uczniowie ci są zaskoczeni, że nie ma żadnej prostej zależności tego typu. Podobnie są zaskoczeni tym (o czym im mówię, gdy wspominam o konstrukcjach geometrycznych), że nie można konstrukcyjnie podzielić kąta 60° na trzy równe części. Zazwyczaj podają wtedy „przykład” konstrukcji: dzielą punktami D i E bok AB trójkąta równobocznego ABC na trzy równe części i twierdzą, że kąty ACD, DCE i ECB są równe. Nieduży, niezbyt dokładny rysunek i pomiar kątów za pomocą kątomierza tę tezę potwierdza. Do tej kwestii powracam pod koniec zestawu II. Zadania 6 i 7 rozwiązuje się podobnie: musimy obliczać miary kątów przy podstawie trójkąta równoramiennego o danym kącie między ramionami. W zadaniu 6 często pojawia się rozumowanie polegające na dodaniu miar kątów ACE i BCD. Otrzymujemy kąt prosty, przy czym kąt DCE został dodany dwa razy. W zadaniu 7 interesującym problemem jest kwestia istnienia punktów D, E i F. Są to mianowicie punkty styczności okręgu wpisanego w trójkąt z bokami trójkąta. Takie wyjaśnienie jest jednak na tym etapie przedwczesne; możemy jednak poprosić uczniów o obliczenie długości odcinków AD, DB itd. Prowadzi to do nietrudnego układu równań z trzema niewiadomymi. Przyjmijmy bowiem, że

$$BC = a, \quad AC = b \quad \text{oraz} \quad AB = c.$$

Wprowadźmy następnie niewiadome:

$$x = AE = AF, \quad y = BD = BF, \quad z = CD = CE.$$

Otrzymamy układ równań:

$$\begin{cases} x + y = c, \\ y + z = a, \\ x + z = b. \end{cases}$$

Dodając stronami równania pierwsze i trzecie, otrzymujemy $2x + y + z = b + c$ czyli, po uwzględnieniu równania drugiego, $2x + a = b + c$. Stąd dostajemy

$$x = \frac{b + c - a}{2}.$$

W podobny sposób obliczamy y i z. Konstrukcja odcinków o takich długościach jest już bardzo prosta. Zauważmy, że pokazany sposób rozwiązania układu równań ma prostą interpretację geometryczną:

$$AB + AC = AF + BF + AE + CE = 2 \cdot AE + BD + CD = 2 \cdot AE + BC$$

i stąd

$$2 \cdot AE = AB + AC - AB,$$

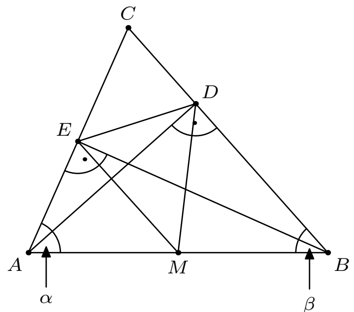
czyli

$$AE = \frac{1}{2} \cdot (AB + AC - AB).$$

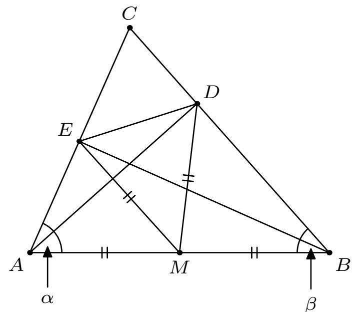
Umiejętność skonstruowania punktów D, E i F pozwala w inny sposób (tzn. bez użycia dwusiecznych kątów) skonstruować środek okręgu wpisanego w trójkąt: wystarczy na przykład w punktach D i E poprowadzić proste prostopadłe do odpowiednich boków i punkt przecięcia tych prostopadłych będzie szukanym środkiem okręgu wpisanego.

Zadanie 9 jest zadaniem, w którym korzystamy z równości kątów naprzemianległych; jest to w tym zestawie jedyne takie zadanie. Zwracam też uwagę na zadania 8 i 10. Te zadania staną się oczywiste, gdy poznamy nieco geometrii okręgu. Zadanie 8 to tak naprawdę stwierdzenie, że kąt wpisany w okrąg jest prosty wtedy i tylko wtedy, gdy jest oparty na średnicy okręgu. Zadanie 10 wynika natomiast z tego, że na czworokącie $ABDE$ można opisać okrąg. Zadania te daję tu celowo; chcę pokazać, że — w miarę jak przybywa wiedzy — te same twierdzenia umiemy udowodnić prościej, a czasem umiemy udowodnić więcej (zobaczymy takie zadanie w zestawie IV). Zadanie 10 jest dla uczniów trudne; nie tylko prawie nigdy nie zdarza się, by ktoś z klasy rozwiązał je samodzielnie (w rozwiązaniu korzystamy kilkakrotnie z zadania 8), ale nawet samo zapamiętanie dowodu jest trudne.

Jest to zatem zadanie, którego rozwiązanie z reguły musi pokazać na tablicy nauczyciel. W takim przypadku robię duży rysunek i po kolei pokazuję, które kąty obliczam. A oto sposób, w jaki powstaje rysunek. Zaczynam od zaznaczenia punktu M. Następnie prowadzę odcinki MD i ME oraz zaznaczam na rysunku strzałkami kąty α i β (rys.8.36). Teraz korzystam z zadania 8, by zaznaczyć równość odcinków wychodzących z punktu M; mogę też zetrzeć niepotrzebne już oznaczenia kątów prostych (rys. 8.37).

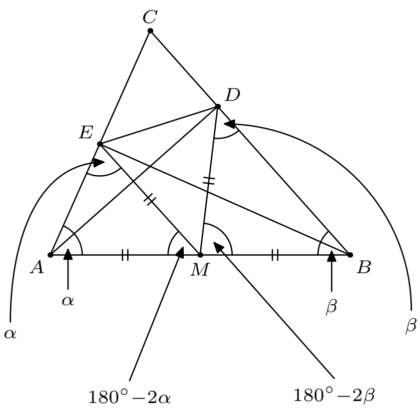


Rys. 8.36

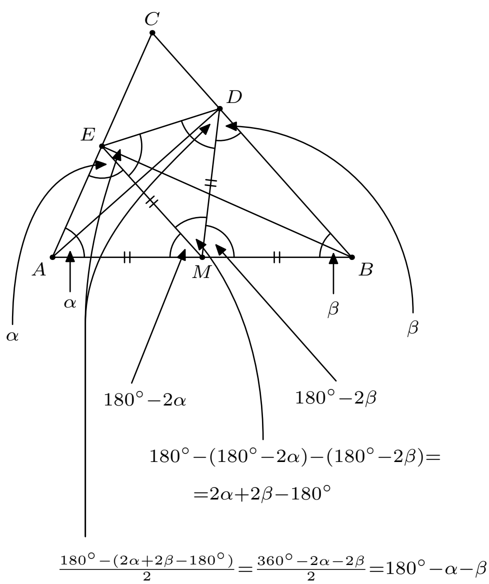


Rys. 8.37

Następnie zaznaczam miary kątów AEM i BDM oraz obliczam miary kątów AME i BMD (rys. 8.38). W kolejnym kroku obliczam miarę kąta EMD oraz miary kątów MED i MDE przy podstawie trójkąta równoramiennego DEM (rys. 8.39).

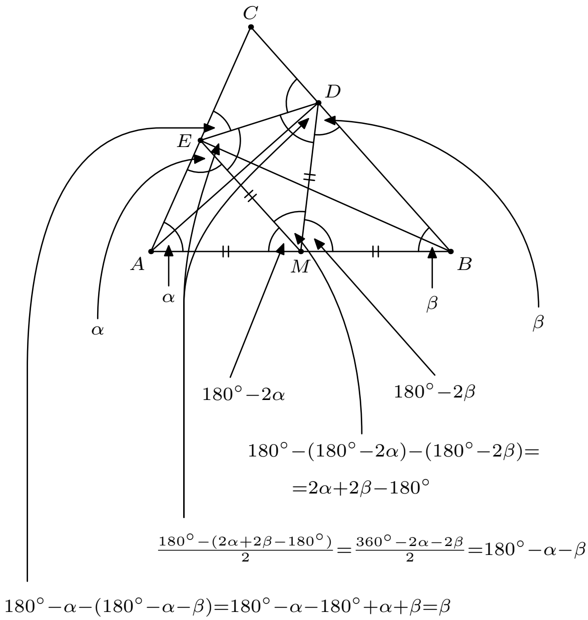


Rys. 8.38



Rys. 8.39

Wreszcie wykazuję, że $\measuredangle DEC = \beta$ (rys. 8.40).



Rys. 8.40

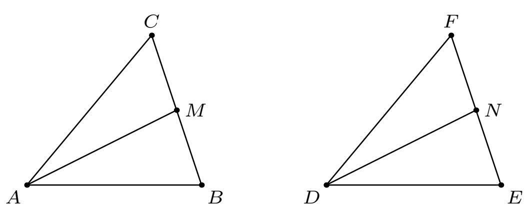
Odpowiednio zrobiony rysunek pokazuje kolejność obliczeń, a więc cały tok rozumowania; obliczane kolejno miary kątów odczytujemy z góry na dół. Proszę uczniów, by na podstawie tego rysunku zapisali cały dowód w punktach. Bardzo często uczniowie, którzy nie dali rady przerysować w taki sam sposób rysunku z tablicy, fotografują go aparatem komórkowym; sam zresztą ich do tego zachęcam. Okazuje się, że wielu uczniów z takim zadaniem radzi sobie już całkiem dobrze; pozostali dostają kompletny i dokładny dowód na tablicy na następnej lekcji.

Zestaw II — szkice rozwiązań.

11. Dane są przystające trójkąty ABC i DEF. W trójkącie ABC poprowadzono środkową AM, dwusieczną AK i wysokość AH. W trójkącie DEF poprowadzono środkową DN, dwusieczną DL i wysokość DG. Udowodnij, że:

$$AM = DN, \quad AK = DL \quad \text{oraz} \quad AH = DG.$$

Rozwiązanie. Szczegółowe rozwiązanie pokażę w przypadku środkowych (rys. 8.41). Dowodzimy wtedy, że trójkąty ABM i DEN są przystające (można też dowodzić, że trójkąty AMC i DNF są przystające). Ponieważ trójkąty ABC i DEF są przystające, więc $AB = DE$, $\measuredangle ABM = \measuredangle DEN$ oraz $BC = EF$.



Rys. 8.41

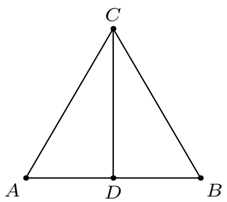
Zatem

$$BM = \frac{1}{2} \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot EF = EN.$$

Stąd wynika, że $\triangle ABM \equiv \triangle DEN$ (cecha przystawania BKB), a więc $AM = DN$.

Równości dwusiecznych dowodzimy pokazując na przykład, że trójkąty ABK i DEL są przystające. Aby udowodnić, że równe są wysokości, musimy rozważyć trzy przypadki. Jeśli trójkąty ABC i DEF są ostrokątne, to wysokości AH i DG leżą wtedy wewnątrz tych trójkątów. Dowodzimy wówczas na przykład, że trójkąty ABH i DEG są przystające. Szczegóły tych dowodów, a także dowodów równości wysokości w przypadku trójkątów prostokątnych i rozwartokątnych, pozostawiam jako ćwiczenie.

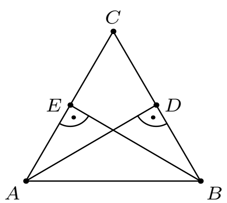
12. Trójkąt ABC jest równoramienny: $AC = BC$. W trójkącie tym poprowadzono dwusieczną CD. Udowodnij, że ta dwusieczna jest środkową i wysokością.



Rys. 8.42

Rozwiązanie. Dwusieczna kąta ACB przecina bok AB w punkcie D (rys. 8.42). Tak jak w dowodzie twierdzenia 4, pokazujemy, że trójkąty ADC i BDC są przystające (mają one wspólny bok CD, $\measuredangle ACD = \measuredangle BCD$, $AC = BC$, cecha przystawania BKB). Stąd wynika, że $AD = BD$, a więc dwusieczna CD jest także środkową. Z przystawania trójkątów ADC i BDC wynika również, że $\measuredangle ADC = \measuredangle BDC$. Ponieważ punkt D leży na prostej AB, więc $\measuredangle ADC + \measuredangle BDC = 180°$. Zatem $\measuredangle ADC = \measuredangle BDC = 90°$, czyli dwusieczna CD jest też wysokością.

13. W trójkącie równoramiennym ABC, w którym $AC = BC$, poprowadzono wysokości AD i BE. Udowodnij, że $AD = BE$.



Rys. 8.43

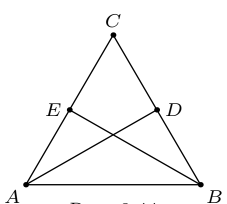
Rozwiązanie. Przypuśćmy, że trójkąt ABC jest ostrokątny. Zatem wysokości AD i BE leżą wewnątrz tego trójkąta. Dowodzimy, że trójkąty ABD i BAE są przystające (rys. 8.43). Trójkąty te mają wspólny bok AB i równe kąty ABD i BAE (wynika to z twierdzenia 4). Następnie

$$\measuredangle DAB = 90° - \measuredangle ABD = 90° - \measuredangle BAE = \measuredangle ABE.$$

Stąd wynika, że $\triangle ABD \equiv \triangle BAE$ (cecha przystawania KBK), a więc $AD = BE$.

Uwaga. Można także dowodzić, że $\triangle ADC \equiv \triangle BEC$. Należy także rozwiązać zadanie w przypadku, gdy trójkąt ABC jest prostokątny lub rozwartokątny; pozostawiamy to jako ćwiczenie.

14. W trójkącie równoramiennym ABC, w którym $AC = BC$, poprowadzono środkowe AD i BE. Udowodnij, że $AD = BE$.



Rys. 8.44

Rozwiązanie. Dowodzimy, że trójkąty ABD i BAE są przystające (rys. 8.44). Trójkąty te mają wspólny bok AB oraz równe kąty ABD i BAE (na podstawie twierdzenia 4). Następnie

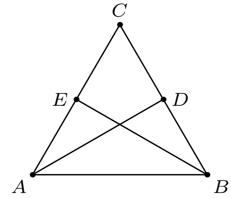
$$BD = \frac{1}{2} \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot AC = AE.$$

Stąd wynika, że $\triangle ABD \equiv \triangle BAE$ (cecha przystawania BKB), a więc $AD = BE$.

15. W trójkącie równoramiennym ABC, w którym $AC = BC$, poprowadzono dwusieczne AD i BE. Udowodnij, że $AD = BE$.

Rozwiązanie. Dowodzimy, że trójkąty ABD i BAE są przystające (rys. 8.45). Trójkąty te mają wspólny bok AB oraz równe kąty ABD i BAE (co wynika z twierdzenia 4). Następnie

$$\measuredangle BAD = \frac{1}{2} \cdot \measuredangle BAC = \frac{1}{2} \cdot \measuredangle ABC = \measuredangle ABE.$$



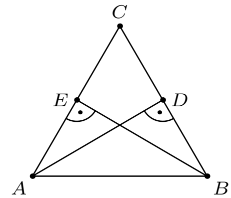
Rys. 8.45

Stąd wynika, że $\triangle ABD \equiv \triangle BAE$ (cecha przystawania KBK), a więc $AD = BE$.

16. W trójkącie ostrokątnym ABC poprowadzono wysokości AD i BE. Udowodnij, że jeśli $AD = BE$, to trójkąt ABC jest równoramienny. Rozwiąż analogiczne zadanie dla trójkąta rozwartokątnego.

Rozwiązanie. Dowodzimy, że trójkąty ADC i BEC są przystające (Rys. 8.46). Z założenia wiemy, że $AD = BE$. Trójkąty ADC i BEC mają też wspólny kąt C: $\measuredangle ACD = \measuredangle BCE$. Ponadto

$$\measuredangle CAD = 90^\circ - \measuredangle ACD = 90^\circ - \measuredangle BCE = \measuredangle CBE.$$



Rys. 8.46

Zatem $\triangle ADC \equiv \triangle BEC$ (cecha przystawania KBK), skąd wynika, że $AC = BC$.

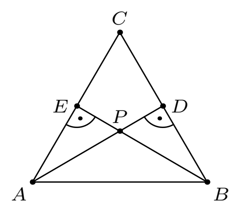
17. W trójkącie ABC poprowadzono wysokości AD i BE. Proste zawierające te wysokości przecinają się w punkcie P. Udowodnij, że jeśli $AP = PB$, to trójkąt ABC jest równoramienny.

Rozwiązanie. Dowodzimy, że $\measuredangle BAC = \measuredangle ABC$ (rys 8.47). Ponieważ trójkąt ABP jest równoramienny, więc $\measuredangle BAP = \measuredangle ABP$. Następnie

$$\measuredangle CAD = 90^\circ - \measuredangle ACD = 90^\circ - \measuredangle BCE = \measuredangle CBE.$$

Stąd wynika, że

$$\measuredangle BAC = \measuredangle BAP + \measuredangle CAD = \measuredangle ABP + \measuredangle CBE = \measuredangle ABC,$$



Rys. 8.47

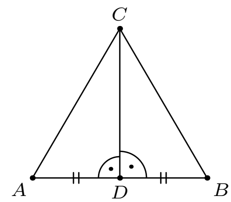
czyli trójkąt ABC jest równoramienny.

18. W trójkącie ABC środkowa CD jest też wysokością. Udowodnij, że trójkąt ABC jest równoramienny.

Rozwiązanie. Dowodzimy, że trójkąty ADC i BDC są przystające (rys 8.48). Z założenia wiemy, że $AD = BD$ oraz

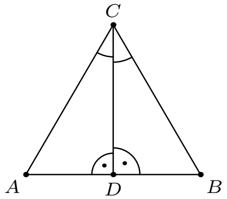
$$\measuredangle ADC = \measuredangle BDC = 90^\circ.$$

Trójkąty ADC i BDC mają także wspólny bok CD, a więc są przystające (cecha BKB). Zatem $AC = BC$.



Rys. 8.48

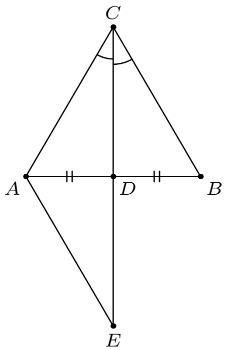
19. W trójkącie ABC dwusieczna CD jest też wysokością. Udowodnij, że trójkąt ABC jest równoramienny.



Rys. 8.49

Rozwiązanie. Dowodzimy, że trójkąty ADC i BDC są przystające. Trójkąty te mają wspólny bok CD, a z założenia wynika, że $\measuredangle ADC = \measuredangle BDC = 90°$ oraz $\measuredangle ACD = \measuredangle BCD$. Zatem rzeczywiście $\triangle ADC \equiv \triangle BDC$ (cecha przystawania KBK), a więc $AC = BC$.

20. W trójkącie ABC środkowa CD jest też dwusieczną. Udowodnij, że trójkąt ABC jest równoramienny.



Rys. 8.50

Rozwiązanie. Przedłużamy odcinek CD do punktu E takiego, że $DE = CD$. Najpierw dowodzimy, że trójkąty BDC i ADE są przystające. Z założenia $BD = AD$. Z konstrukcji wynika, że $DC = DE$. Kąty BDC i ADE są wierzchołkowe, więc

$$\triangle BDC \equiv \triangle ADE$$

(cecha przystawania BKB). Stąd wynika, że

$$BC = AE \quad \text{oraz} \quad \measuredangle BCD = \measuredangle AED.$$

Zatem $\measuredangle ACD = \measuredangle AED$, czyli trójkąt ECA jest równoramienny. Stąd dostajemy $AC = AE = BC$.

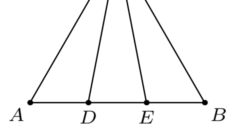
Zadanie 11 ma pokazywać, że trójkąty przystające są identyczne pod każdym względem. Pokazujemy tu tylko, że odpowiednie odcinki w trójkątach przystających są równe. Służy to jako przykład tego, że wszystkie inne własności tych trójkątów będą takie same. Zadanie 12 jest w zasadzie powtórzeniem twierdzenia 4. Chcę jednak utrwalić u uczniów to, że w trójkącie równoramiennym dwusieczna, środkowa i wysokość poprowadzone z wierzchołka między ramionami pokrywają się i są zawarte w symetralnej podstawy. To dowodzi w szczególności jednej własności symetralnej: punkt jednakowo oddalony od końców odcinka leży na symetralnej tego odcinka. Dowód w drugą stronę, tzn. dowód tego, że punkt symetralnej jest jednakowo oddalony od końców odcinka, jest rozwiązaniem zadania 18. Po rozwiązaniu zadania 18 podsumowuję te dwa zadania, omawiając własność charakteryzującą środkową. Jest to też dobry moment na to, by powiedzieć uczniom, co to jest miejsce geometryczne punktów (w bardziej nowoczesnej terminologii mówimy o zbiorze punktów mających daną własność; ja jednak używam tu określenia tradycyjnego). Tak więc symetralna odcinka (a więc z definicji prosta prostopadła do odcinka, przechodząca przez jego środek) jest miejscem geometrycznym punktów jednakowo oddalonych od końców tego odcinka. Zadania 13, 14 i 15 pokazują ciekawe własności trójkąta równoramiennego. Własności te są o tyle ważne, że charakteryzują trójkąty równoramienne. Zadanie 16 jest zadaniem odwrotnym do zadania 13: w trójkącie równoramiennym wysokości są równe i **na odwrót**, to znaczy jeśli w trójkącie wysokości są równe, to ten trójkąt jest równoramienny. Uczniowie pytają mnie (a jeśli tego nie uczynią, to sam poruszam ten temat), dlaczego wysokości są tak wyróżnione, dlaczego podobnego zadania nie dałem dla środkowych i dwusiecznych. Odpowiadam im, że podobne twierdzenia dla środkowych i dwusiecznych są prawdziwe, ale ich dowody są znacznie trudniejsze, a także wymagają wiedzy, której uczniowie teraz jeszcze nie posiadają. Zadanie 17 po raz pierwszy wspomina jeden z tzw. punktów szczególnych trójkąta: ortocentrum, czyli punkt przecięcia wysokości. Wprawdzie mówię tylko o punkcie przecięcia dwóch wysokości, ale uczniowie na ogół gdzieś już słyszeli o tym, że wszystkie wysokości przecinają się w jednym punkcie i często przy okazji tego zadania o tym mówią. Jest to dobra okazja, by o tych punktach z uczniami porozmawiać, podać fakty i powiedzieć, że dowody odpowiednich twierdzeń poznają wkrótce. Zadania 18, 19 i 20 są w pewnym sensie odwrotne do zadania 12. Jeśli odcinek w trójkącie ma dwie z trzech własności (środkowa, dwusieczna, wysokość), to trójkąt jest równoramienny i ten odcinek ma oczywiście także tę trzecią własność. Te trzy zadania warto zadać uczniom do domu jednocześnie. Są oni zaskoczeni tym, że dwa pierwsze zadania rozwiązuje się łatwo — widać od razu, dlaczego odpowiednie trójkąty są przystające — natomiast rozwiązania trzeciego zadania na ogół nie znajdują. Rozwiązanie, które uczniom pokazuję, wykorzystuje często stosowaną sztuczkę: przedłużenie środkowej o tę samą długość. Ten pomysł będzie jeszcze wiele razy wykorzystywany w innych zadaniach.

Jest to dobry moment, by porozmawiać z uczniami o rozwiązywaniu zadań. Mówię im, że rozwiązania wielu zadań oparte są na pewnych powtarzających się pomysłach, sztuczkach (używam tego słowa, nazywam pomysły sztuczkami). Sztuczki, pomysły, które się powtarzają, warto zapamiętać: pomysł wykorzystany dwa razy staje się metodą. Takim pomysłem jest właśnie sztuczka polegająca na przedłużeniu środkowej; w przyszłości takich sztuczek uczniowie poznają więcej. Być może cała nauka matematyki polega na poznawaniu i wymyślaniu nowych sztuczek.

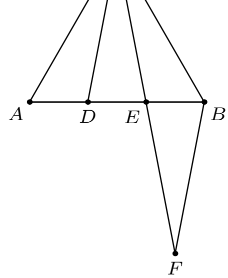
Sztuczkę polegającą na przedłużeniu środkowej wykorzystuję w zadaniu o „trysekcji" kąta 60 stopni. Uczniowie często twierdzą, że umieją podzielić kąt $60°$ na trzy równe części. Oto ich rozumowanie: mamy dany trójkąt równoboczny ABC; dzielimy bok AB na trzy równe części punktami D i E; wtedy

$$\measuredangle ACD = \measuredangle DCE = \measuredangle ECB = 20°.$$

Pokażę, że tak nie jest. Niech więc punkty D i E dzielą bok AB trójkąta równobocznego ABC na trzy równe części (rys 8.51). Chcemy pokazać, że kąty ACD, DCE i ECB nie są równe. W tym celu przedłużamy odcinek CE do punktu F takiego, że $CE = EF$ (rys. 8.52) — zauważmy, że odcinek CE jest środkową w trójkącie DBC:



Rys. 8.51



Rys. 8.52

Najpierw dowodzimy, że trójkąty ADC i BEC są przystające (cecha przystawania BKB). Stąd wynika, że kąty ACD i BCE są równe oraz $DC = EC$. Zatem trójkąt DEC jest równoramienny; jego kąty przy podstawie są równe, a zatem są ostre. Stąd wynika, że kąt BEC jest rozwarty. Z twierdzenia 7 zastosowanego do trójkąta EBC wynika, że $CE < CB$. Teraz dowodzimy, że trójkąty DEC i BEF są przystające (również cecha BKB). Stąd wynika, że $DC = BF$. Ponieważ $DC < BC$, więc $BF < BC$. Z twierdzenia 6 zastosowanego do trójkąta BCF wynika, że $\measuredangle ECB < \measuredangle BFE = \measuredangle DCE$.

Dokładniejsze obliczenia przeprowadzone z użyciem trygonometrii (czego z uczniami nie robię) pokazują, że $\cos DCE = \frac{13}{14} \approx 0{,}92857$ oraz $\cos ECB = \frac{5\sqrt{7}}{14} \approx 0{,}94491$. Stąd dostajemy

$$\measuredangle DCE \approx 21{,}7868^\circ \quad \text{oraz} \quad \measuredangle ACD = \measuredangle ECB \approx 19{,}1066^\circ.$$

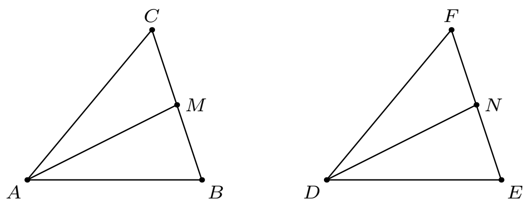
Te wielkości podaję uczniom mówiąc, że w liceum nauczą się, jak to można obliczyć.

Zestaw III — szkice rozwiązań.

21. W trójkątach ABC i DEF poprowadzono środkowe AM i DN. Udowodnij, że trójkąty ABC i DEF są przystające, jeśli:

a) $AB = DE$, $BC = EF$ oraz $AM = DN$,
b) $AM = DN$, $BC = EF$ oraz $\measuredangle AMB = \measuredangle DNE$,
c) $AB = DE$, $AM = DN$ oraz $\measuredangle MAB = \measuredangle NDE$,
d) $AB = DE$, $\measuredangle B = \measuredangle E$ oraz $\measuredangle MAB = \measuredangle NDE$,
e) $AB = DE$, $AC = DF$ oraz $AM = DN$.

Rozwiązanie. Oto trójkąty ABC i DEF z poprowadzonymi w nich środkowymi AM i DN (rys. 8.53):



Rys. 8.53

a) Ponieważ $BC = EF$, a M i N są środkami boków BC i EF, więc

$$BM = \tfrac{1}{2} \cdot BC = \tfrac{1}{2} \cdot EF = EN.$$

Z tego wynika, że $AB = DE$, $AM = DN$ i $BM = EN$, więc $\triangle ABM \equiv \triangle DEN$ (cecha przystawania BBB). Zatem

$$\measuredangle ABC = \measuredangle ABM = \measuredangle DEN = \measuredangle DEF$$

i z cechy przystawania BKB otrzymujemy $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$.

b) Tak jak w punkcie a) dowodzimy, że $BM = EN$. Mamy tym razem $AM = DN$, $\measuredangle AMB = \measuredangle DNE$ i $BM = EN$, więc $\triangle ABM \equiv \triangle DEN$ (cecha przystawania BKB). Stąd wynika, że $AB = DE$ i $\measuredangle ABC = \measuredangle ABM = \measuredangle DEN = \measuredangle DEF$, a więc $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$ (cecha przystawania BKB).

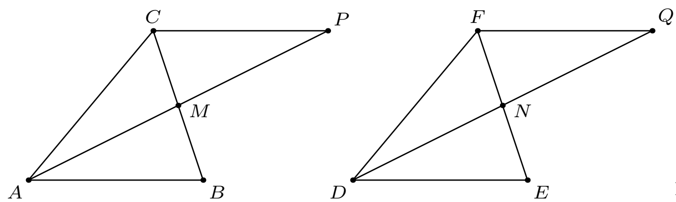
c) Z cechy przystawania BKB otrzymujemy $\triangle ABM \equiv \triangle DEN$, skąd wynika, że $BM = DN$ oraz — tak jak w punktach a) i b) — że $\measuredangle ABC = \measuredangle DEF$. Teraz

$$BC = 2 \cdot BM = 2 \cdot EN = EF$$

i znów z cechy przystawania BKB dostajemy $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$.

d) Z cechy przystawania KBK dostajemy $\triangle ABM \equiv \triangle ADN$. Stąd — tak jak w punkcie c) — wynika, że $BC = EF$ i z cechy przystawania BKB, że $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$.

e) Przedłużamy środkowe AM i DN do punktów P i Q takich, że $AM = MP$ oraz $DN = NQ$. Następnie punkt P łączymy z punktem C, a punkt Q z punktem F (rys. 8.54):



Rys. 8.54

Najpierw zauważamy, że $\triangle AMB \equiv \triangle PMC$: $AM = PM$ z definicji punktu P, $BM = CM$, bo M jest środkiem boku BC oraz $\measuredangle AMB = \measuredangle PMC$, bo są to kąty wierzchołkowe (cecha przystawania BKB). Stąd wynika, że $CP = AB$. Podobnie dowodzimy, że $\triangle DNE \equiv \triangle QNF$ i $FQ = DE$. Teraz mamy:

$$AC = DF, \quad CP = AB = DE = FQ, \quad \text{oraz} \quad AP = 2 \cdot AM = 2 \cdot DN = DQ.$$

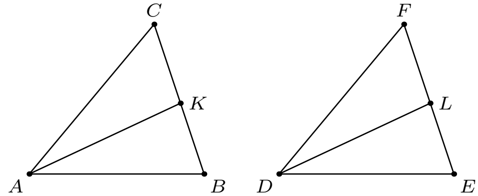
Z cechy przystawania BBB wynika teraz, że $\triangle ACP \equiv \triangle DFQ$, skąd dostajemy $\measuredangle CAM = \measuredangle FDN$. Teraz z cechy przystawania BKB mamy $\triangle AMC \equiv \triangle DNF$, a więc $CM = FN$. Stąd wynika, że $BC = EF$ i z cechy przystawania BBB dostajemy $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$.

22. W trójkątach ABC i DEF poprowadzono dwusieczne AK i DL. Udowodnij, że trójkąty ABC i DEF są przystające, jeśli:

a) $AB = DE$, $AK = DL$ oraz $\measuredangle A = \measuredangle D$,

b) $AK = DL$, $\measuredangle A = \measuredangle D$ oraz $\measuredangle AKB = \measuredangle DLE$.

Rozwiązanie. Oto trójkąty ABC i DEF z poprowadzonymi w nich dwusiecznymi AK i DL (rys. 8.55):



Rys. 8.55

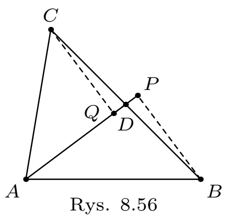
a) Ponieważ $\measuredangle A = \measuredangle D$, więc

$$\measuredangle BAK = \tfrac{1}{2} \cdot \measuredangle BAC = \tfrac{1}{2} \cdot \measuredangle A = \tfrac{1}{2} \cdot \measuredangle D = \tfrac{1}{2} \cdot \measuredangle EDF = \measuredangle EDL.$$

Zatem $\triangle ABK \equiv \triangle DEL$ (cecha przystawania BKB). Stąd wynika, że $\measuredangle B = \measuredangle E$ i z cechy przystawania KBK dostajemy $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$.

b) Tak jak w punkcie a) pokazujemy, że $\measuredangle BAK = \measuredangle EDL$ i tym razem z cechy przystawania KBK dostajemy $\triangle ABK \equiv \triangle DEL$, a następnie kończymy dowód podobnie do przykładu a).

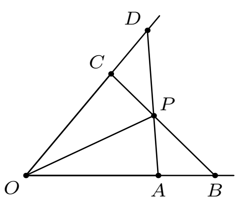
23. W trójkącie ABC poprowadzono środkową AD. Udowodnij, że punkty B i C są jednakowo oddalone od prostej AD.



Rys. 8.56

Rozwiązanie. Niech P i Q będą rzutami punktów B i C na półprostą AD (rys. 8.56). Wówczas $\measuredangle BPD = \measuredangle CQD = 90°$ oraz $\measuredangle BDP = \measuredangle CDQ$ (kąty wierzchołkowe). Trójkąty BDP i CDQ mają po dwa kąty równe, a więc także $\measuredangle DBP = \measuredangle DCQ$. Zatem $\triangle BPD \equiv \triangle CQD$ ($\measuredangle BDP = \measuredangle CDQ$, $\measuredangle DBP = \measuredangle DCQ$, $BD = CD$, cecha przystawania KBK). Stąd dostajemy $BP = CQ$. Inne rozwiązanie polega na zauważeniu, że proste BP i CQ są równoległe i skorzystaniu z równości kątów naprzemianległych.

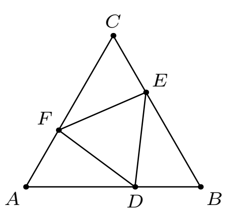
24. Na półprostej OA leży punkt B (różny od A i O), a na półprostej OC leży punkt D (różny od C i O) tak, że $OA = OC$ oraz $OB = OD$. Odcinki AD i BC przecinają się w punkcie P. Udowodnij, że trójkąty OAD i OCB są przystające. Udowodnij, że półprosta OP jest dwusieczną kąta AOC.



Rys. 8.57

Rozwiązanie. Przyjmijmy, że punkt B leży na zewnątrz odcinka OA (rys. 8.57). Wtedy łatwo zauważyć, że punkt D leży na zewnątrz odcinka OC; dowód w drugim przypadku jest właściwie taki sam i pozostawiam go jako ćwiczenie. Aby udowodnić, że trójkąty OAD i OCB są przystające, wystarczy przypomnieć sobie założenia $OA = OC$, $OD = OB$ i zauważyć, że kąt O w obu trójkątach jest wspólny (cecha przystawania BKB). Stąd wynika, że $\measuredangle OBC = \measuredangle ODA$ oraz $\measuredangle OAD = \measuredangle OCB$. Z ostatniej równości wynika natomiast, że $\measuredangle BAP = \measuredangle DCP$. Ponieważ także $AB = CD$, więc trójkąty ABP i CDP są przystające. Zatem $AP = CP$ i teraz łatwo zauważamy, że trójkąty OAP i OCP są przystające (cecha przystawania BBB lub BKB). Zatem $\measuredangle AOP = \measuredangle COP$, czego należało dowieść.

25. Na bokach AB, BC i CA trójkąta równobocznego ABC leżą odpowiednio punkty D, E i F tak, że $AD = BE = CF$ (rys. 8.58). Udowodnij, że trójkąt DEF jest równoboczny.

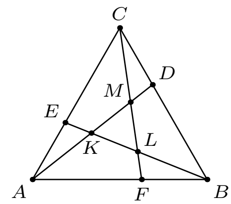


Rys. 8.58

Rozwiązanie. Ponieważ z założenia mamy $AD = BE = CF$ oraz $AB = BC = CA$, więc $DB = EC = FA$. Z założenia wynika też, że $\measuredangle DAF = \measuredangle EBD = \measuredangle FCE = 60°$. Zatem trójkąty ADF, BED i CFE są przystające (cecha przystawania BKB), skąd wynika, że $DE = EF = FA$.

26. Na bokach BC, AC i BA trójkąta równobocznego ABC wybieramy odpowiednio punkty D, E i F tak, że $AF = BD = CE$. Odcinki AD i BE przecinają się w punkcie K; odcinki BE i CF przecinają się w punkcie L; odcinki CF i AD przecinają się w punkcie M (rys. 8.59). Udowodnij, że trójkąt KLM jest równoboczny.

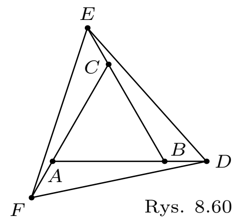
Rozwiązanie. Ponieważ z założenia mamy $AF = BD = CE$ oraz $AB = BC = CA$, więc $FB = DC = EA$. Z założenia wynika też, że $\measuredangle FBC = \measuredangle DCA = \measuredangle EAB = 60°$. Zatem trójkąty FBC, DCA i EAB są przystające (cecha przystawania BKB). Stąd dostajemy: $\measuredangle BCF = \measuredangle CAD = \measuredangle ABE$ oraz $\measuredangle BFC = \measuredangle CDA = \measuredangle AEB$. Trójkąty FBL, DCM i EAK mają po dwa kąty równe; zatem ich trzecie kąty również są równe: $\measuredangle FLB = \measuredangle DMC = \measuredangle EKA$. Stąd wynika, że równe są więc też kąty do nich wierzchołkowe: $\measuredangle KLM = \measuredangle LMK = \measuredangle MKL$. Trójkąt KLM ma trzy równe kąty, a więc jest równoboczny.



Rys. 8.59

27. Dany jest trójkąt równoboczny ABC. Na półprostych AB, BC i CA (na zewnątrz trójkąta ABC) wybrano punkty D, E i F tak, że $AD = BE = CF$ (rys. 8.60). Udowodnij, że trójkąt DEF jest równoboczny.

Rozwiązanie. Dowodzimy, że $\triangle ADF \equiv \triangle BED \equiv \triangle CFE$ (cecha przystawania BKB).



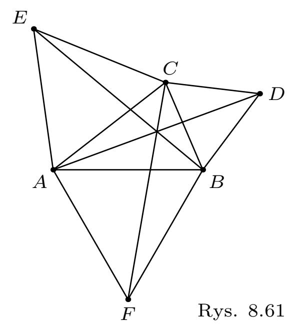
Rys. 8.60

28. Na bokach AB, BC i CA trójkąta ABC zbudowano (na zewnątrz trójkąta) trzy trójkąty równoboczne: AFB, BDC i CEA (rys. 8.61). Udowodnij, że $AD = BE = CF$.

Rozwiązanie. Najpierw dowodzimy, że $\triangle ABD \equiv \triangle FBC$. Mianowicie $AB = FB$ i $BD = BC$, bo trójkąty ABF i BCD są równoboczne. Ponadto

$$\measuredangle ABD = \measuredangle ABC + \measuredangle CBD = \measuredangle ABC + 60°,$$
$$\measuredangle FBC = \measuredangle ABC + \measuredangle FBA = \measuredangle ABC + 60°.$$

Zatem $\measuredangle ABD = \measuredangle FBC$. Teraz wystarczy skorzystać z cechy przystawania BKB. Stąd wynika, że $AD = CF$. Drugiej równości dowodzimy podobnie, wykazując, że trójkąty ACD i ECB są przystające.



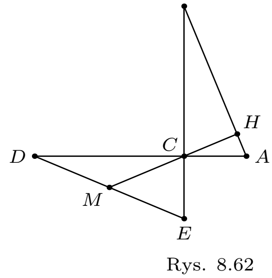
Rys. 8.61

29. W trójkącie ABC, w którym kąt C jest prosty, przedłużono bok AC poza punkt C do punktu D takiego, że $CD = CB$ oraz przedłużono bok BC poza punkt C do punktu E takiego, że $CE = CA$. Udowodnij, że przedłużenie wysokości CH trójkąta ABC jest środkową w trójkącie CDE (rys. 8.62).

Rozwiązanie. Najpierw zauważamy, że $\triangle ABC \equiv \triangle EDC$ ($AC = EC$, $BC = DC$, $\measuredangle ACB = \measuredangle ECD$, cecha przystawania BKB). Stąd wynika, że $\measuredangle ABC = \measuredangle EDC$. Następnie korzystamy z tego, że $CH \perp AB$:

$$\measuredangle ABC = 90° - \measuredangle BCH = \measuredangle ACH = \measuredangle DCM.$$

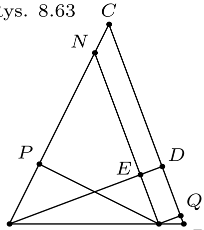
Zatem $\measuredangle CDM = \measuredangle DCM$, czyli $DM = CM$. W podobny sposób pokazujemy, że $EM = CM$, skąd ostatecznie dostajemy $DM = EM$.



Rys. 8.62

30. Udowodnij, że jeśli punkt M leży na podstawie AB trójkąta równoramiennego ABC, to suma odległości punktu M od ramion AC i BC nie zależy od położenia punktu M. Udowodnij, że suma odległości dowolnego punktu M znajdującego się wewnątrz trójkąta równobocznego od trzech boków tego trójkąta nie zależy od położenia punktu M.

Rys. 8.63

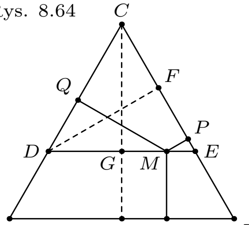


Rozwiązanie. Poprowadźmy wysokość AD i odcinek MN równoległy do boku BC. Niech E będzie punktem przecięcia tych dwóch nowych odcinków (rys. 8.63). Wówczas trójkąt AMN jest równoramienny, bo

$$\measuredangle MAN = \measuredangle BAC = \measuredangle ABC = \measuredangle AMN$$

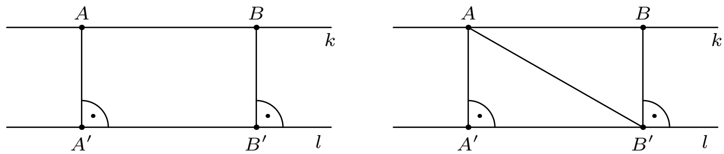
(ostatnia równość wynika z tego, że proste MN i BC są równoległe). Odcinki MP i AE są wysokościami w trójkącie równoramiennym AMN, więc $MP = AE$. Ponieważ proste BC i MN są równoległe, więc odległości punktów M i E od prostej BC są równe: $MQ = ED$. Stąd wynika, że $MP + MQ = AE + ED = AD$, a więc suma odległości punktu M od ramion trójkąta równoramiennego ABC jest równa wysokości AD, niezależnie od położenia punktu M na podstawie AB tego trójkąta.

Rys. 8.64



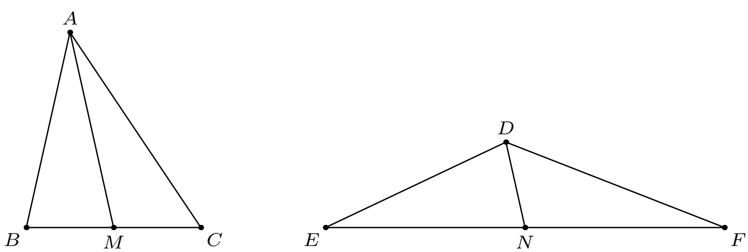
Niech teraz trójkąt ABC będzie równoboczny i niech P, Q i R będą rzutami punktu M na boki trójkąta. Przez punkt M prowadzimy odcinek DE równoległy do boku AB oraz prowadzimy dwie wysokości: DF trójkąta DEC i CH trójkąta ABC. Niech G będzie punktem przecięcia odcinków DE i CH (rys.8.64). Z udowodnionej pierwszej części zadania wynika, że $MP + MQ = DF = CG$. Ponieważ $MR = GH$, więc $MP + MQ + MR = CG + GH = CH$. Pokazaliśmy więc, że suma odległości punktu M od boków trójkąta równobocznego jest równa wysokości tego trójkąta, niezależnie od wyboru punktu M.

Wraz z trzecim zestawem zadań daję uczniom następny fragment tekstu z „teorią”. Nie będę go tutaj zamieszczać, jedynie krótko go omówię (całość tego tekstu znajduje się we wspomnianym we wstępie pliku pdf towarzyszącym poradnikowi). Definiuję w nim pojęcie rzutu prostokątnego punktu na prostą i odległość punktu od prostej. Następnie definiuję rzut odcinka na prostą. Dowodzę wtedy twierdzenia mówiącego, że jeśli punkt A nie leży na prostej k, a punkty B i C leżą na tej prostej, to $AB < AC$ wtedy i tylko wtedy, gdy rzut odcinka AB na prostą k jest krótszy od rzutu odcinka AC na tę prostą. Dowodzę następnie tzw. czwartej cechy przystawania trójkątów prostokątnych: dwa trójkąty prostokątne są przystające, jeśli mają równe przeciwprostokątne i jedną parę przyprostokątnych. Ta cecha, choć przydatna w niektórych zadaniach, stanie się zupełnie niepotrzebna po udowodnieniu twierdzenia Pitagorasa. Jednak uogólnia się ona na trójkąty rozwartokątne; ten dowód również zamieszczam w moim tekście, chociaż dokładnie go z uczniami nie omawiam. Kończę ten fragment tekstu wyjaśnieniem, co to jest odległość dwóch prostych równoległych. Dowodzę mianowicie twierdzenia, że jeśli dwie proste równoległe k i l przetniemy prostą prostopadłą do nich, to długość odcinka łączącego proste równoległe nie zależy od wyboru tej prostopadłej. Dokładniej: pokazuję, że jeśli odcinki AA' i BB' są prostopadłe do prostych k i l, to są równe. W tym celu prowadzę odcinek AB' i dowodzę, że trójkąty $AA'B'$ i $B'BA$ są przystające (rys.8.65). Szczegóły dowodu pominę, jednak zostanie on prawie bez zmian powtórzony w rozwiązaniach początkowych zadań z zestawu V. Zwracam jednak uwagę na to, że pojęcie odległości prostych równoległych było wykorzystane w powyższym rozwiązaniu zadania 30.



Rys. 8.65

Zadania 21 i 22 są zadaniami czysto technicznymi i polegają na tym, by uczniowie nauczyli się wykorzystywać cechy przystawania trójkątów. Zwracam tu uwagę na zadanie 21 e), w którym jeszcze raz została użyta sztuczka polegająca na przedłużeniu środkowej. Zadania 21 i 22 włączyłem do moich zestawów zadań po tym, jak moim uczniom zdarzało się kończyć dowód przystawania trójkątów stwierdzeniem: oba trójkąty są podzielone na dwa trójkąty odpowiednio do siebie przystające, a więc też są przystające. Trochę dokładniej: mamy dane dwa trójkąty ABC i DEF. Odcinek AM dzieli trójkąt na dwa trójkąty ABM i ACM; odcinek DN dzieli trójkąt DEF na dwa trójkąty DEN i DFN. Trójkąty ABM i DEN są przystające oraz trójkąty ACM i DFN są przystające. Czy trójkąty ABC i DEF są przystające? Otóż zaskoczeniem dla uczniów jest to, że z tych samych trójkątów czasem można złożyć większy trójkąt na dwa sposoby i otrzymane trójkąty nie są przystające (rys. 8.66):



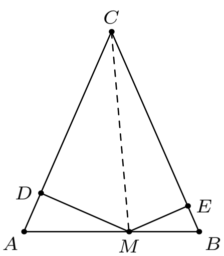
Rys. 8.66

Zwracam tu uwagę na to, że w przystawaniu zarówno lewych, jak i prawych trójkątów, na które podzieliliśmy duże trójkąty, nie została zachowana kolejność wierzchołków. Jest to może kolejny argument za tym, by starannie wymagać od uczniów, by tej kolejności przestrzegali. Chciałem też zwrócić ich uwagę na to, że dowód przystawania trójkątów powinien być przeprowadzony starannie i korzystać z odpowiedniej cechy przystawania — przynajmniej na początku, gdy dopiero zaczynają się uczyć dowodzenia twierdzeń. Zadania 21 i 22 mają właśnie nauczyć ich takiego stosowania cech przystawania.

Zadanie 23 ma przypomnieć uczniom pojęcie odległości punktu od prostej. Uczniowie często mówią, że w tym zadaniu nie ma czego dowodzić, bo z definicji środkowej odcinki BD i CD są równe; zapominają w ten sposób o tym, że odległość punktu od prostej mierzymy wzdłuż odcinków prostopadłych do tej prostej. Warto przy tym poruszyć problem, jakie proste leżą w jednakowej odległości od danych dwóch punktów A i B. Jednym z warunków wystarczających jest ten, by prosta przechodziła przez środek odcinka AB (drugim jest, by była równoległa do prostej AB). Zadanie 24 pokazuje nową konstrukcję dwusiecznej kąta: z wierzchoła kąta zakreślamy dwa łuki przecinające jedno ramię w punktach A i B, drugie zaś w punktach C i D; potem prowadzimy półprostą o początku O i przechodzącą przez punkt przecięcia odcinków AD i BC. W tym miejscu warto powiedzieć parę słów o uczeniu konstrukcji geometrycznych. Uczniowie na ogół znają kilka prostych konstrukcji ze szkoły podstawowej: konstrukcję trójkąta o danych bokach, konstrukcję środka odcinka, prostej prostopadłej i równoległej czy wreszcie konstrukcję dwusiecznej kąta. Warto powiedzieć, że poznane przez nich konstrukcje nie są jedyne; te same figury możemy konstruować inaczej. Zadania 25, 26 i 27 są ćwiczeniami dotyczącymi trójkątów równobocznych. Interesujące jest zwłaszcza zadanie 26. Najprostszy (chyba) dowód wymaga wykazania przystawania trzech trójkątów i pokazania następnie, że trójkąt KLM ma trzy równe kąty. Uczniowie jednak pokazują na ogół znacznie dłuższe dowody; dowodzą przystawania kolejnych trójkątów tak, aby ostatecznie pokazać, że trójkąt KLM ma trzy równe boki. Zadanie 28 jest łatwiejszą częścią zadania olimpijskiego; trudniejsza polega na pokazaniu, że odcinki AD, BE i CF przecinają się w jednym punkcie. Dowodzi się tego na ogół korzystając z własności okręgów, zatem to zadanie zostanie odłożone na później. Uczniowie, którzy wykonali staranny rysunek, dostrzegają, że te trzy odcinki przecinają się w jednym punkcie i często pytają, czy tak jest zawsze.

Jest to dobra okazja, by porozmawiać z uczniami o takich problemach w geometrii. Wyjaśniam uczniom, że dwie proste na ogół przecinają się w jednym punkcie; równoległość jest w pewnym sensie sytuacją wyjątkową. Trzy proste na ogół będą przecinać się w trzech punktach; to, żeby miały jeden punkt wspólny, jest też czymś wyjątkowym i takie sytuacje badamy ze szczególnym zainteresowaniem. Mówię im wtedy, co to są punkty szczególne trójkąta, dowody odkładając jednak najczęściej na później. Dotychczasowa wiedza uczniów pozwala jedynie na udowodnienie, że symetralne trzech boków trójkąta przecinają się w jednym punkcie; można też udowodnić własność charakteryzującą dwusieczną kąta i pokazać, że dwusieczne kątów trójkąta przecinają się w jednym punkcie. Dowód, że wysokości (a właściwie proste zawierające wysokości) przecinają się w jednym punkcie, wykorzystuje najprostsze własności równoległoboków i polega na sprowadzeniu do zadania o symetralnych boków pewnego innego trójkąta. Wreszcie to, że środkowe przecinają się w jednym punkcie, wymaga rozważania podziału odcinka w danym stosunku; takie zadania robię z uczniami w II lub III klasie.

Chcę jeszcze omówić zadanie 30. Jego sformułowanie jest dla wielu uczniów niezrozumiałe: co to znaczy, że coś nie zależy od położenia punktu M na podstawie trójkąta równoramiennego lub wewnątrz trójkąta równobocznego? A zwłaszcza, jak powinno się dowodzić czegoś takiego. Wyjaśniam im, że można postąpić dwojako: albo wybrać dwa dowolne punkty i pokazać, że dla nich odpowiednie sumy są równe, albo pokazać, że dla dowolnego punktu M ta suma jest równa jakiemuś szczególnemu odcinkowi w rozważanym trójkącie. Rozwiązanie, które zamieściłem wyżej, polega na tym drugim pomyśle. Pokazuję, że rozważana suma jest równa pewnej wysokości trójkąta. W tym rozwiązaniu korzystam z pojęcia odległości prostych równoległych. Zadanie 30 (w obu przypadkach) rozwiązuje się łatwiej za pomocą pól. Niech M będzie punktem położonym na podstawie AB i niech D i E będą jego rzutami na ramiona AC i BC tego trójkąta (rys. 8.67). Odcinek CM dzieli trójkąt ABC na dwa trójkąty AMC i MBC. Suma pól tych trójkątów jest równa polu całego trójkąta:

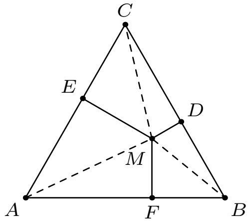


Rys. 8.67

$$\frac{1}{2} \cdot AC \cdot DM + \frac{1}{2} \cdot BC \cdot EM = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot h,$$

gdzie h jest wysokością opuszczoną z wierzchołka B na bok AC. Ponieważ $AC = BC$, więc z powyższej równości otrzymujemy $DM + EM = h$.

W podobny sposób odcinki AM, BM i CM dzielą trójkąt równoboczny ABC na trzy trójkąty (rys. 8.68). Znów mamy równanie:



Rys. 8.68

$$\frac{1}{2} \cdot BC \cdot DM + \frac{1}{2} \cdot AC \cdot EM + \frac{1}{2} \cdot AB \cdot FM = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot h,$$

gdzie h jest wysokością (dowolną) trójkąta ABC. Tak jak wyżej, otrzymujemy:

$$DM + EM + FM = h.$$

Do zadania 30 powracamy zatem, gdy (po przerobieniu zestawu VI) zajmujemy się polami wielokątów.

Zestaw IV — szkice rozwiązań.

31. Znajdź wszystkie wartości zmiennej x, dla których istnieje trójkąt o następujących długościach boków:

a) $a = 3x + 3$, $b = 4x + 1$, $c = 13 - 2x$;
b) $a = 3x - 6$, $b = 4x - 1$, $c = 11 - 2x$.

Rozwiązanie. Trójkąt o bokach a, b i c istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy spełnione są nierówności

$$a + b > c, \quad a + c > b, \quad b + c > a.$$

Rozwiązujemy zatem trzy nierówności z niewiadomą x.

a) Nierówność $a + b > c$ ma postać

$$(3x + 3) + (4x + 1) > 13 - 2x,$$

czyli $9x > 9$. Zatem $x > 1$. Nierówność $a + c > b$ ma postać

$$(3x + 3) + (13 - 2x) > 4x + 1,$$

czyli $3x < 15$. Zatem $x < 5$. Wreszcie trzecia nierówność ma postać

$$(4x + 1) + (13 - 2x) > 3x + 3,$$

czyli $x < 11$. Ostatecznie otrzymujemy $1 < x < 5$.

Uwaga. Przypomnijmy, że nie trzeba sprawdzać, czy dla znalezionych wartości x długości a, b i c będą liczbami dodatnimi. Jeśli bowiem spełnione są wszystkie trzy nierówności trójkąta, to $a, b, c > 0$.

b) Najpierw rozwiązujemy nierówność

$$(3x - 6) + (4x - 1) > 11 - 2x.$$

Po uproszczeniu otrzymujemy nierówność $9x > 18$, czyli $x > 2$. Następnie rozwiązujemy nierówność

$$(3x - 6) + (11 - 2x) > 4x - 1.$$

Otrzymujemy $3x < 6$, czyli $x < 2$. Ta nierówność jest sprzeczna z poprzednią, więc nie ma takiej wartości x, dla której liczby a, b i c byłyby długościami boków trójkąta.

32. Znajdź wszystkie wartości zmiennej x, dla których istnieje trójkąt równoramienny o następujących długościach boków:
a) $a = 2x + 5$, $b = 3x + 4$, $c = 4x + 1$,
b) $a = 2x + 1$, $b = 3x + 1$, $c = 4x + 1$,
c) $a = 2x + 3$, $b = 3x + 7$, $c = 4x + 1$,
d) $a = 8x - 1$, $b = 7x - 2$, $c = 9x - 2$.
W każdym przypadku oblicz długości boków trójkąta.

Rozwiązanie. W każdym z czterech powyższych zadań mamy do rozwiązania trzy równania (z niewiadomą x): $a = b$, $a = c$ i $b = c$. Dla każdego rozwiązania x tych równań, obliczamy a, b i c, a następnie sprawdzamy, czy trójkąt o takich bokach istnieje.

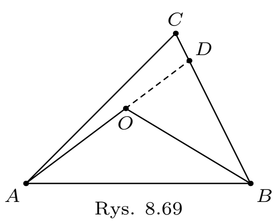
a) Równanie $a = b$ ma postać: $2x + 5 = 3x + 4$. Jego rozwiązaniem jest $x = 1$ i wtedy $a = b = 7$, $c = 5$. Oczywiście trójkąt o takich bokach istnieje. Równanie $a = c$ ma postać: $2x+5 = 4x+1$. Jego rozwiązaniem jest $x = 2$ i wtedy $a = c = 9$, $b = 10$. Taki trójkąt także istnieje. Wreszcie trzecie równanie $b = c$ ma postać: $3x + 4 = 4x + 1$ i jego rozwiązaniem jest $x = 3$. Tym razem otrzymujemy trójkąt o bokach $a = 11$, $b = c = 13$. Zadanie ma zatem trzy rozwiązania.

b) Wszystkie trzy równania mają to samo rozwiązanie: $x = 0$. Otrzymujemy trójkąt równoboczny o bokach $a = b = c = 1$.

c) Równanie $a = b$ ma rozwiązanie $x = -4$ i wtedy $a < 0$. Równanie $a = c$ ma rozwiązanie $x = 1$ i wtedy $a = c = 5$, $b = 10$. Taki trójkąt nie istnieje, bo $a + c = b$. Wreszcie równanie $b = c$ ma rozwiązanie $x = 6$ i otrzymujemy trójkąt o bokach $a = 15$, $b = c = 25$.

d) Równania $a = b$ i $b = c$ mają rozwiązania, w których $b < 0$. Równanie $a = c$ ma rozwiązanie $x = 1$ i otrzymujemy trójkąt o bokach $a = c = 7$, $b = 5$.

33. Punkt O leży wewnątrz trójkąta ABC. Udowodnij, że $AO + OB < AC + BC$.



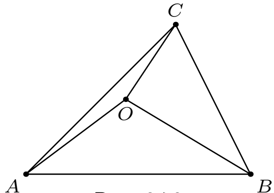
Rys. 8.69

Rozwiązanie. Przedłużamy odcinek AO do przecięcia z bokiem BC (rys. 8.69). Wówczas z nierówności trójkąta mamy $AC + CD > AD$ oraz $OD + BD > OB$, skąd dostajemy

$$AC + BC = AC + CD + BD > AD + BD =$$
$$= AO + OD + BD > AO + OB.$$

34. Punkt O leży wewnątrz trójkąta ABC. Udowodnij, że

$$\frac{1}{2} \cdot (AB + BC + CA) < AO + BO + CO < AB + BC + CA.$$



Rys. 8.70

Rozwiązanie. Skorzystamy trzykrotnie z poprzedniego zadania (rys. 8.70). Mamy zatem

$$AO + BO < AC + BC,$$
$$BO + CO < AB + AC,$$
$$AO + CO < AB + BC.$$

Po dodaniu stronami tych trzech nierówności, otrzymujemy

$$2 \cdot AO + 2 \cdot BO + 2 \cdot CO < 2 \cdot AB + 2 \cdot BC + 2 \cdot CA,$$

czyli

$$AO + BO + CO < AB + BC + CA.$$

Z drugiej strony, trzykrotnie korzystamy z nierówności trójkąta:

$$AB < AO + BO, \quad BC < BO + CO, \quad CA < CO + AO.$$

Po dodaniu stronami tych trzech nierówności, otrzymujemy:

$$AB + BC + CA < 2 \cdot (AO + BO + CO),$$

czyli

$$\frac{1}{2} \cdot (AB + BC + CA) < AO + BO + CO.$$

35. W trójkącie ABC połączono wierzchołek A z dowolnym punktem D boku BC. Udowodnij, że $2 \cdot AD > AB + AC - BC$. Udowodnij, że jeśli punkt D jest środkiem boku BC trójkąta ABC, to $2 \cdot AD < AB + AC$.

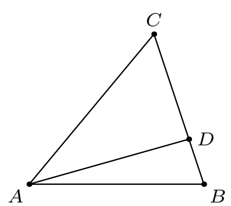
Rozwiązanie. Korzystamy z nierówności trójkąta dla trójkątów ABD i ACD (rys. 8.71). Otrzymujemy wówczas

$$AB < AD + BD, \quad AC < AD + CD.$$

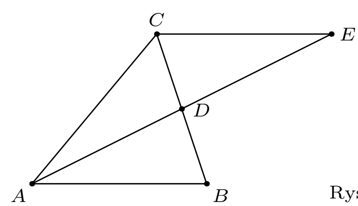
Po dodaniu tych nierówności stronami, otrzymujemy

$$AB + AC < 2 \cdot AD + BD + CD = 2 \cdot AD + BC,$$

czyli $2 \cdot AD > AB + AC - BC$. Niech teraz D będzie środkiem boku BC (rys. 8.72). Przedłużamy teraz środkową AD za punkt D do punktu E takiego, że $AD = DE$.



Rys. 8.71



Rys. 8.72

Wówczas, tak jak w zadaniu 21 e), dowodzimy, że $AB = CE$. Teraz skorzystamy z nierówności trójkąta dla trójkąta ACE:

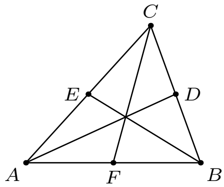
$$2 \cdot AD = AD + DE = AE < AC + CE = AC + AB.$$

36. Niech punkty D, E i F będą środkami boków BC, AC i AB trójkąta ABC (rys. 8.73). Udowodnij, że

$$\frac{1}{2} \cdot (AB + AC + BC) < AD + BE + CF < AB + AC + BC.$$

Rozwiązanie. Najpierw trzykrotnie skorzystamy z lewej nierówności z poprzedniego zadania:

$$2 \cdot AD > AB + AC - BC, \quad 2 \cdot BE > AB + BC - AC, \quad 2 \cdot CF > AC + BC - AB.$$



Rys. 8.73

Po dodaniu tych trzech nierówności stronami, otrzymamy nierówność

$$2 \cdot (AD + BE + CF) > AB + BC + CA,$$

czyli

$$AD + BE + CF > \frac{1}{2} \cdot (AB + BC + CA).$$

Teraz trzykrotnie skorzystamy z prawej nierówności z poprzedniego zadania (rys. 8.73).

$$2 \cdot AD < AB + AC, \quad 2 \cdot BE < AB + BC, \quad 2 \cdot CF < AC + BC.$$

Po dodaniu tych trzech nierówności stronami, otrzymamy nierówność

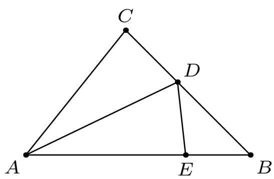
$$2 \cdot (AD + BE + CF) < 2 \cdot (AB + BC + CA),$$

czyli

$$AD + BE + CF < AB + BC + CA.$$

37. Dany jest trójkąt ABC, w którym $AB > AC$. Odcinek AD jest dwusieczną kąta A w trójkącie ABC. Udowodnij, że $BD > CD$ oraz $\measuredangle ADB > \measuredangle ADC$.

Rozwiązanie. Ponieważ $AB > AC$, więc wewnątrz odcinka AB istnieje taki punkt E, że $AE = AC$ (rys. 8.74). Trójkąty AED i ACD są przystające, bo mają wspólny bok AD, $AC = AE$ oraz $\measuredangle EAD = \measuredangle CAD$ (cecha przystawania BKB). Stąd wynika, że $\measuredangle AED = \measuredangle ACD$ oraz $ED = CD$. Stąd dostajemy:

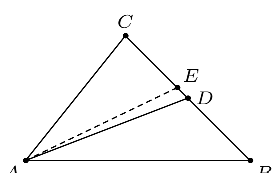


Rys. 8.74

$$\measuredangle BED = 180^\circ - \measuredangle AED = 180^\circ - \measuredangle ACD = \\ = \measuredangle BAC + \measuredangle ABC > \measuredangle ABC = \measuredangle EBD.$$

Zatem w trójkącie EBD mamy $BD > ED$, czyli $BD > CD$. Następnie, kąt ADB jest kątem zewnętrznym trójkąta ADC, więc $\measuredangle ADB = \measuredangle DAC + \measuredangle ACD$. Podobnie mamy $\measuredangle ADC = \measuredangle DAB + \measuredangle ABD$. Ponieważ $AB > AC$, więc $\measuredangle ACD > \measuredangle ABD$. Zatem $\measuredangle DAC = \measuredangle DAB$ oraz $\measuredangle ACD > \measuredangle ABD$, skąd wynika, że $\measuredangle ADB > \measuredangle ADC$.

38. Dany jest trójkąt ABC, w którym $AB > AC$. Odcinek AD jest środkową boku BC. Udowodnij, że $\measuredangle BAD < \measuredangle CAD$.



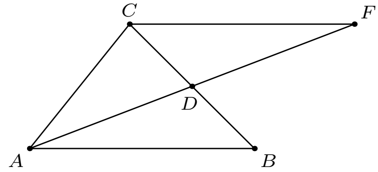
Rys. 8.75

Rozwiązanie. Poprowadźmy w trójkącie ABC dwusieczną AE kąta A (rys. 8.75). Z poprzedniego zadania wiemy, że $BE > EC$, czyli punkt E leży wewnątrz odcinka CD. Półprosta AE leży zatem wewnątrz kąta CAD. Stąd wynika, że

$$\measuredangle BAD < \measuredangle BAE = \measuredangle CAE < \measuredangle CAD.$$

Tej nierówności możemy też dowieść, korzystając z wielokrotnie stosowanej sztuczki polegającej na przedłużeniu środkowej AD do punktu F takiego, że $AD = DF$ (rys. 8.76). Tak jak w zadaniu 21 e) dowodzimy, że $\triangle ABD \equiv \triangle FCD$; z tego zaś wynika, że $\measuredangle CFA = \measuredangle BAD$ oraz $AB = CF$. Teraz $CF = AB > AC$, więc

$$\measuredangle CAD = \measuredangle CAF > \measuredangle CFA = \measuredangle BAD.$$

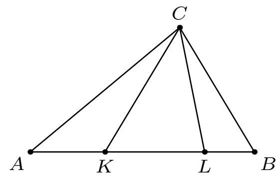


Rys. 8.76

39. Punkty K i L leżą na boku AB trójkąta ABC. Udowodnij, że obwód trójkąta KLC jest mniejszy od obwodu trójkąta ABC.

Rozwiązanie. Korzystamy dwukrotnie z nierówności trójkąta (rys. 8.77):

$$KC < AK + AC,$$
$$LC < LB + BC.$$



Rys. 8.77

Dodajemy stronami te nierówności, a następnie do obu stron dodajemy KL:

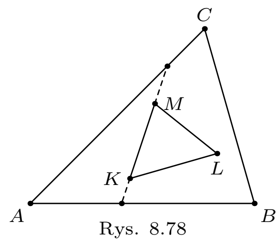
$$KC + LC + KL < AK + AC + LB + BC + KL = AB + AC + BC.$$

40. Trójkąt KLM leży wewnątrz trójkąta ABC. Udowodnij, że obwód trójkąta KLM jest mniejszy od obwodu trójkąta ABC.

Rozwiązanie. Rozważmy dla przykładu jedno możliwe położenie trójkąta KLM wewnątrz trójkąta ABC (rys. 8.78). Niech prosta KM przecina boki AB i AC w punktach P i Q. Wówczas $PQ < AP + AQ$. Zatem

$$AB + AC + BC = AP + PB + AQ + QB + BC >$$
$$> PB + BC + QC + PQ,$$

czyli obwód trójkąta ABC jest większy od obwodu czworokąta $PBCQ$.

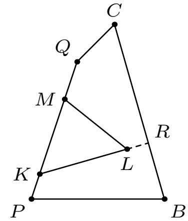


Rys. 8.78

Przypuśćmy teraz, że prosta KL przecina bok BC w punkcie R (rys. 8.79). Wówczas $KR < KP + PB + BR$. Zatem

$$PB + BC + CQ + PQ = KP + PB + BR + RC + CQ + QK >$$
$$> KR + RC + CQ + QK,$$

czyli obwód czworokąta $PBCQ$ jest większy od obwodu czworokąta $KRCQ$. Wreszcie zauważmy, że $ML < LR + RC + CQ + QM$. Zatem



Rys. 8.79

$$KR + RC + CQ + QK = KL + LR + RC + CQ + QM + MK >$$
$$> KL + LM + MK,$$

czyli obwód czworokąta $KRCQ$ jest większy od obwodu trójkąta KLM. Stąd ostatecznie dostajemy:

$$Obw_{ABC} > Obw_{PBCQ} > Obw_{KRCQ} > Obw_{KLM}.$$

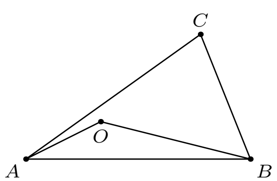
W zadaniu 31 nie trzeba sprawdzać, że liczby a, b i c są dodatnie (bo to wynika z trzech nierówności trójkąta), ale trzeba to wyraźnie napisać. Uczniowie jednak o tym zapominają — nieliczni przypominają sobie, że to już udowodniliśmy na lekcji lub dowodzą, że te liczby są dodatnie, pozostali kończą rozwiązanie na obliczeniu a, b i c. Przypominam uczniom, że napisanie (powołując się na wspomnianą ogólną własność lub tego dowodząc), iż te liczby są dodatnie, jest koniecznym fragmentem rozwiązania. W zadaniu 32 c) równanie $a = b$ ma rozwiązanie $x = -4$. Uczniowie często mówią wtedy, że takie rozwiązanie jest niemożliwe, bo x nie może być liczbą ujemną. Rzeczywiście, w tym przypadku rozwiązanie nie istnieje, ale dlatego, że $a < 0$. Wyjaśniam uczniom, że nawet dla $x < 0$ może się okazać, że liczby a, b i c będą dodatnie i trójkąt istnieje. Na przykład, jeśli

$$a = 3x + 10, \quad b = 4x + 12, \quad c = 2x + 9,$$

to równanie $a = b$ ma rozwiązanie $x = -2$. Wówczas $a = b = 4$ oraz $c = 5$ i trójkąt o takich bokach oczywiście istnieje. Zdarza się, że uczniowie rozpoczynają rozwiązywanie zadania 32 od rozwiązania nierówności takich jak w zadaniu 31, a następnie sprawdzają, czy otrzymane rozwiązania spełniają te nierówności. Oczywiście jest to niepotrzebny nadmiar pracy. Wystarczy przecież najpierw znaleźć rozwiązanie (w liczbach dodatnich) i sprawdzić, czy spełnia ono nierówności trójkąta (wystarczy jedna nierówność: jeśli $a = b$, to nierówności $a+c > b$ i $b+c > a$ są oczywiście spełnione). Takie niepotrzebne obliczenia wykonują dość często również uczniowie liceum.

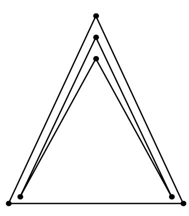
Popatrzmy na takie zadanie: znaleźć wartość parametru m, dla którego równanie kwadratowe $x^2+mx+7 = 0$ ma dwa rozwiązania, których suma jest równa 10. Oczywiście od razu widać, że $m = -10$ i że równanie $x^2 - 10x + 7 = 0$ ma dodatni wyróżnik Δ. Rozpoczynanie rozwiązania od zapisania i rozwiązania nierówności $m^2 - 7 > 0$ jest przykładem właśnie takiego dodawania sobie niepotrzebnej pracy.

Zadanie 33, mimo rozwiązania mieszczącego się w jednej linijce, jest niezwykle trudne.



Rys. 8.80

Dawałem je uczniom przez ponad 20 lat (zarówno w gimnazjum jak i w liceum) i tylko raz zdarzyło mi się, że uczeń rozwiązał je poprawnie. Najczęstszym błędem popełnianym przy rozwiązywaniu tego zadania jest przyjmowanie (bez uzasadnienia), że $AC > AO$ i $BC > BO$. Na rysunku 8.80 widzimy, że możliwe jest takie położenie punktu O wewnątrz trójkąta ABC, by jedna z tych nierówności (np. $BO < BC$) była nieprawdziwa. Okazuje się, że pomysł polegający na przedłużeniu odcinka AO jest dla zdecydowanej większości uczniów zbyt trudny do wymyślenia. Często dorysowują oni inny odcinek: CO; żadne próby rozwiązania nie prowadzą wówczas do sukcesu. Wydaje się, że pokazanie tego pomysłu (polegającego w gruncie rzeczy na dwukrotnym „przycinaniu" trójkąta ABC tak, by otrzymać trójkąt ABO — najpierw wzdłuż prostej AO odcinamy trójkąt ADC, potem wzdłuż prostej BO odcinamy trójkąt OBD — przy czym każde „przycinanie" zmniejsza obwód) powinno ułatwić rozwiązanie zadania 40. Okazuje się jednak, że tak nie jest. Wielu uczniów w ogóle nie dostrzega problemu; twierdzą, że jest **oczywiste**, iż figura mniejsza, zawarta w większej, ma mniejszy obwód. Pokazuję przykład (rys. 8.81). Czworokąt wklęsły zawarty w trójkącie ma większy obwód. Uczniowie zgadzają się wówczas na dopisanie dodatkowego założenia: wielokąt wypukły zawarty w innym


Rys. 8.81

wielokącie wypukłym ma **oczywiście** mniejszy obwód. Pytam wtedy, gdzie w swoim rozumowaniu (sprowadzającym się przecież do jednego słowa „oczywiste") wykorzystali założenie o wypukłości. Gdy wreszcie zaakceptują fakt, że to zadanie nie jest „oczywiste", na ogół nie potrafią go prawidłowo rozwiązać. Ostatecznie jest to zadanie olimpijskie! Zadanie 40 jest natomiast bardzo dobrym pretekstem do tego, by porozmawiać o wypukłości. Podaję uczniom wtedy trzy definicje wypukłości: zwykłą, obejmującą wszystkie figury geometryczne (odcinek łączący dwa punkty figury jest w niej w całości zawarty) i dwie dla wielokątów (wszystkie kąty są wypukłe; wielokąt leży w całości po jednej stronie prostej, zawierającej dowolny bok). Ta ostatnia definicja jest wprost idealna dla dowodu twierdzenia mówiącego, że jeśli wielokąt wypukły W jest zawarty w dowolnym wielokącie V, to obwód W jest mniejszy od obwodu V. Dowód oczywiście polega na przycinaniu wzdłuż prostych zawierających boki mniejszego wielokąta. Taki dowód pokazuję oczywiście na jednym przykładzie; uczniowie oczywiście dostrzegają jego ogólność. Zwracam uwagę na różnicę między zadaniem 39 i 40. Oba dotyczą porównania obwodów trójkątów, z których jeden jest zawarty wewnątrz drugiego. W zadaniu 39, ze względu na szczególne położenie mniejszego trójkąta, wystarczą dwie nierówności trójkąta; zadanie 40, ze względu na swoją ogólność, wymaga metod subtelniejszych.

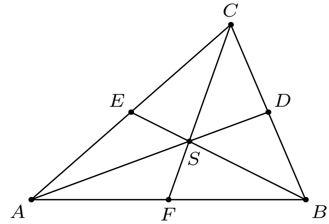
Zadanie 34 jest bardzo prostym wnioskiem z zadania 33 i uczniowie na ogół nie mają z nim problemów. Interesująca jest jednak kwestia szacowania sumy odległości punktu O od wierzchołków trójkąta. Z jednej strony może ona być dowolnie bliska obwodowi trójkąta (wystarczy wziąć trójkąt równoramienny o bardzo małej podstawie, długich ramionach i punkt leżący blisko wierzchołka), z drugiej powstaje pytanie, dla jakiego punktu O ta suma jest najmniejsza. To pytanie jednak pozostawiam bez odpowiedzi; punkt minimalizujący tę sumę pojawi się w jednym z następnych zadań, jednak również bez dowodu.

Chcę zwrócić uwagę na zadanie 36. Mówi ono, że:

$$\frac{1}{2} \cdot (\text{Obwód trójkąta}) < \text{Suma środkowych} < \text{Obwód trójkąta}.$$

Okazuje się, że można udowodnić więcej. Mówię wtedy uczniom, że trzy środkowe trójkąta przecinają się w jednym punkcie (zwanym środkiem ciężkości trójkąta), zaś odcinek od wierzchołka do środka ciężkości jest dwa razy dłuższy od odcinka biegnącego od środka ciężkości do boku (rys. 8.82):

$$AS = 2 \cdot SD, \quad BS = 2 \cdot SE, \quad CS = 2 \cdot SF.$$



Rys. 8.82

Wówczas możemy skorzystać trzy razy z nierówności trójkąta:

$$AB < AS + BS, \quad BC < BS + CS, \quad AC < AS + CS.$$

Dodając te trzy nierówności stronami, otrzymujemy

$$AB + AC + BS < 2 \cdot (AS + BS + CS) = 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot (AD + BE + CF) = \frac{4}{3} \cdot (AD + BE + CF).$$

Stąd otrzymujemy nierówność

$$\text{Suma środkowych} > \frac{3}{4} \cdot (\text{Obwód trójkąta}).$$

Dzięki dodatkowej wiedzy o środkowych trójkąta, udowodniliśmy twierdzenie mocniejsze. Odpowiednie przykłady pokazują, że obu nierówności

$$\frac{3}{4} \cdot (\text{Obwód trójkąta}) < \text{Suma środkowych} < \text{Obwód trójkąta}$$

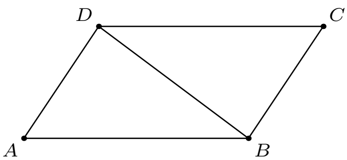
wzmocnić już nie można, tzn. nie istnieją stałe $a > \frac{3}{4}$ i $b < 1$ takie, że

$$a \cdot (\text{Obwód trójkąta}) < \text{Suma środkowych} < b \cdot (\text{Obwód trójkąta}).$$

Wystarczy w tym celu przyjrzeć się trójkątom równoramiennym: jednemu o długiej podstawie i bardzo krótkiej wysokości i drugiemu o bardzo krótkiej podstawie i bardzo długiej wysokości.

Zestaw V — szkice rozwiązań.

41. Dany jest równoległobok $ABCD$. Udowodnij, że przeciwległe boki i przeciwległe kąty są równe, tzn. $AB = CD$, $AD = BC$, $\measuredangle DAB = \measuredangle BCD$ i $\measuredangle ABC = \measuredangle ADC$.

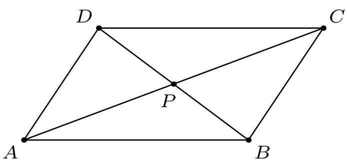


Rys. 8.83

Rozwiązanie. Poprowadźmy w danym równoległoboku przekątną BD (rys. 8.83). Wówczas trójkąty BDA i DBC są przystające: $\measuredangle ABD = \measuredangle CDB$ (kąty naprzemianległe), $\measuredangle ADB = \measuredangle CBD$ (kąty naprzemianległe), wspólny bok BD, cecha przystawania KBK. Stąd wynika, że $AB = CD$, $AD = BC$ oraz $\measuredangle DAB = \measuredangle BCD$. Wreszcie

$$\measuredangle ABC = \measuredangle ABD + \measuredangle CBD = \measuredangle CDB + \measuredangle ADB = \measuredangle ADC.$$

42. Przekątne równoległoboku $ABCD$ przecinają się w punkcie P. Udowodnij, że ten punkt jest środkiem obu przekątnych, tzn. $AP = CP$ oraz $BP = DP$.



Rys. 8.84

Rozwiązanie. Pokazujemy, że trójkąty ABP i CDP są przystające (rys. 8.84). Z poprzedniego zadania mamy $AB = CD$ oraz $\measuredangle ABD = \measuredangle CDB$. W podobny sposób, z równoległości prostych AB i CD wynika równość kątów naprzemianległych: $\measuredangle BAC = \measuredangle DCA$. Teraz wystarczy skorzystać z cechy przystawania KBK. Zatem $AP = CP$ oraz $BP = DP$.

43. Dany jest czworokąt $ABCD$ taki, że $AB = CD$ i $AD = BC$. Udowodnij, że ten czworokąt jest równoległobokiem.

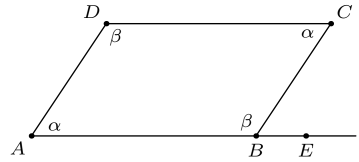
Rozwiązanie. Prowadzimy przekątną BD (rys. 8.83). Zauważamy, że trójkąty ABD i CDB są przystające: wspólny bok BD, $AB = CD$ i $AD = BC$, cecha przystawania BBB. Zatem $\measuredangle ABD = \measuredangle CDB$, czyli $AB \parallel CD$ (kąty naprzemianległe). Podobnie $AD \parallel BC$.

44. Dany jest czworokąt $ABCD$ taki, że $AB = CD$ i $AB \parallel CD$. Udowodnij, że ten czworokąt jest równoległobokiem.

Rozwiązanie. Znów prowadzimy przekątną BD oraz pokazujemy, że $\triangle ABD \equiv \triangle CDB$ (rys.8.83): wspólny bok BD, $AB = CD$, $\measuredangle ABD = \measuredangle CDB$ (kąty naprzemianległe), cecha przystawania BKB. Zatem $\measuredangle ADB = \measuredangle CBD$, skąd wynika, że $AD \parallel BC$.

45. Dany jest czworokąt $ABCD$ taki, że $\measuredangle DAB = \measuredangle DCB$ i $\measuredangle ABC = \measuredangle ADC$. Udowodnij, że ten czworokąt jest równoległobokiem.

Rozwiązanie. Oznaczmy: $\measuredangle BAD = \alpha$ i $\measuredangle ABC = \beta$ (rys. 8.85). Wówczas $\measuredangle BCD = \alpha$ oraz $\measuredangle ADC = \beta$. Weźmy punkt E na przedłużeniu boku AB poza punktem B. Mamy wówczas $2\alpha + 2\beta = 360°$, skąd wynika, że $\alpha + \beta = 180°$. Zatem $\measuredangle EBC = \alpha$, czyli $AD \parallel BC$ (kąty odpowiadające). Podobnie dowodzimy, że $AB \parallel DC$.



Rys. 8.85

46. Przekątne czworokąta $ABCD$ przecinają się w punkcie P, przy czym $AP = CP$ oraz $BP = DP$. Udowodnij, że ten czworokąt jest równoległobokiem.

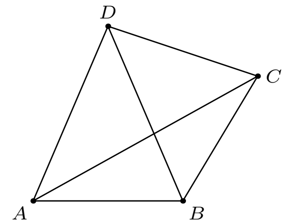
Rozwiązanie. Z cechy przystawania BKB łatwo wynika, że $\triangle ABP \equiv \triangle CDP$ (rys. 8.84). Zatem $\measuredangle BAP = \measuredangle DCP$, czyli $AB \parallel CD$ (kąty naprzemianległe) i podobnie pokazujemy, że $AD \parallel BC$.

47. Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$ taki, że $AD = BD$. Udowodnij, że $BC < AC$.

Rozwiązanie. Czworokąt $ABCD$ jest wypukły, więc przekątna AC przecina przekątną BD (rys. 8.86). Zatem

$$\measuredangle BAC < \measuredangle BAD = \measuredangle ABD < \measuredangle ABC,$$

skąd wynika, że $BC < AC$.



Rys. 8.86

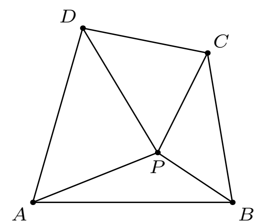
48. Udowodnij, że suma odległości dowolnego punktu płaszczyzny od wierzchołków danego czworokąta jest większa od połowy obwodu tego czworokąta.

Rozwiązanie. Połączmy punkt P z wierzchołkami czworokąta $ABCD$ (rys. 8.87). Przyjmijmy najpierw, że punkt P nie leży na prostych zawierających boki czworokąta. Mamy wówczas (z nierówności trójkąta dla trójkątów ABP i CDP):

$$AB < AP + BP \quad \text{oraz} \quad CD < CP + DP.$$

Podobnie

$$BC < CP + BP \quad \text{oraz} \quad AD < AP + DP.$$



Rys. 8.87

Dodając te cztery nierówności stronami, otrzymujemy

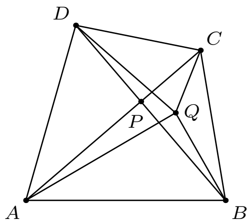
$$AB + BC + CD + AD < 2 \cdot (AP + BP + CP + DP),$$

czyli

$$AP + BP + CP + DP > \tfrac{1}{2} \cdot (AB + BC + CD + DA).$$

W przypadku, gdy punkt P leży na którymś boku czworokąta, co najwyżej dwie z rozważanych nierówności trójkąta stają się równościami, a więc po dodaniu wszystkich nierówności stronami znów otrzymamy nierówność ostrą.

49. Znajdź punkt położony wewnątrz czworokąta wypukłego, dla którego suma odległości od wierzchołków tego czworokąta jest najmniejsza.



Rys. 8.88

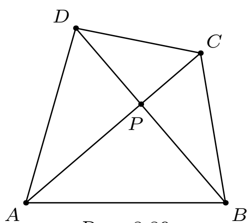
Rozwiązanie. Tym punktem jest punkt przecięcia przekątnych czworokąta. Niech P będzie tym punktem i niech punkt Q będzie dowolnym innym punktem wewnętrznym czworokąta. Przypuśćmy, że punkt Q nie leży na żadnej przekątnej czworokąta (rys. 8.88), przypadek, gdy punkt Q leży na jednej przekątnej pozostawię jako ćwiczenie. Wówczas

$$AC < AQ + CQ \quad \text{oraz} \quad BD < BQ + DQ.$$

Stąd

$$AP + BP + CP + DP = AC + BD < AQ + BQ + CQ + DQ.$$

50. Udowodnij, że suma długości przekątnych czworokąta wypukłego jest mniejsza od obwodu tego czworokąta, zaś większa od połowy obwodu czworokąta.



Rys. 8.89

Rozwiązanie. Niech P będzie punktem przecięcia przekątnych czworokąta (rys. 8.89). Nierówność

$$AC + BD = AP + BP + CP + DP > \tfrac{1}{2} \cdot (AB + BC + CD + DA)$$

wynika z zadania 48. Zastosujemy teraz nierówność trójkąta do trójkątów ABC, ACD, ABD i BCD. Mamy wówczas

$$AC < AB + BC, \quad AC < AD + CD, \quad BD < AB + AD, \quad BD < BC + CD.$$

Po dodaniu tych czterech nierówności stronami, otrzymujemy

$$2 \cdot (AC + BD) < 2 \cdot (AB + BC + CD + AD),$$

czyli

$$AC + BD < AB + BC + CD + AD.$$

Ostatecznie

$$\frac{1}{2} \cdot (\text{Obwód czworokąta}) < AC + BD < \text{Obwód czworokąta}.$$

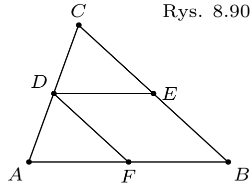
Zadania 41 i 42 pokazują najważniejsze własności równoległoboków. Przed omawianiem zadań z zestawu piątego uczniowie muszą zatem poznać definicję równoległoboku. Zaczynam jednak od pytania, co to jest równoległobok — przecież to pojęcie występowało już w szkole podstawowej. W odpowiedzi uczniowie często podają wszystkie znane im własności równoległoboków: są to czworokąty mające przeciwległe boki równoległe i równe oraz przeciwległe kąty równe. Uściślam wtedy: definicją równoległoboku jest to, iż ma on przeciwległe boki równoległe, reszta to są własności, których będziemy teraz dowodzić. To właśnie jest celem dwóch pierwszych zadań tego zestawu. Zadania od 43 do 46 pokazują z kolei, że pewne kombinacje powyższych własności są wystarczające do tego, by czworokąt był równoległobokiem.

Po udowodnieniu podstawowych własności równoległoboków nadszedł odpowiedni moment, by pokazać uczniom dwa często stosowane twierdzenia. Są to twierdzenia o tzw. liniach środkowych trójkąta i trapezu. Zacznijmy od następującego lematu:

Lemat. Punkt D jest środkiem boku AC trójkąta ABC. Przez punkt D prowadzimy prostą równoległą do boku AB, przecinającą bok BC w punkcie E. Wówczas $BE = EC$ oraz $DE = \frac{1}{2} \cdot AB$.

Dowód. Prowadzimy prostą równoległą do boku BC, przecinającą bok AB w punkcie F (rys. 8.90). Teraz wystarczy zauważyć, że trójkąty AFD i DEC są przystające (cecha KBK) oraz że czworokąt $FBED$ jest równoległobokiem.

Rys. 8.90



Twierdzenie. Punkty D i E są odpowiednio środkami boków AC i BC trójkąta ABC. Wówczas $DE \parallel AB$ oraz $DE = \frac{1}{2} \cdot AB$.

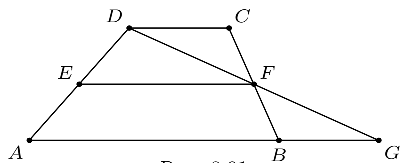
Dowód. Przez punkt D prowadzimy prostą równoległą do boku AB. Z lematu wiemy, że przecina ona bok BC w jego środku, a więc w punkcie E. To znaczy, że $DE \parallel AB$; równość $DE = \frac{1}{2} \cdot AB$ wynika teraz z lematu.

Odcinek DE jest nazywany **linią środkową** trójkąta (nie mylić ze środkową!). Definiujemy także linię środkową trapezu jako odcinek łączący środki ramion trapezu. Następujące twierdzenie dotyczy właśnie tej linii środkowej:

Twierdzenie. Dany jest czworokąt $ABCD$, w którym $AB \parallel CD$. Punkty E i F są odpowiednio środkami boków AD i BC. Wówczas $EF \parallel AB$ oraz $EF = \frac{1}{2} \cdot (AB + CD)$.

Dowód. Niech G będzie punktem przecięcia prostych AB i DF (rys. 8.91). Trójkąty BGF i CDF są przystające (cecha KBK); zatem $BG = CD$ oraz $GF = FD$. Odcinek EF jest więc linią środkową w trójkącie AGD. Z poprzedniego twierdzenia wynika, że $EF \parallel AB$ oraz

$$EF = \frac{1}{2} \cdot AG = \frac{1}{2} \cdot (AB + BG) = \frac{1}{2} \cdot (AB + CD),$$



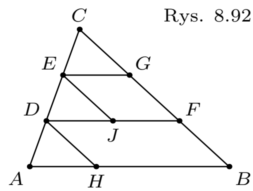
Rys. 8.91

co kończy dowód.

Udowodnione wyżej twierdzenia są szczególnymi przypadkami twierdzenia Talesa. Twierdzenie Talesa w całej ogólności nie występuje w podstawie programowej dla gimnazjum, jednak w moim programie rozszerzonym krótko je omawiam. Ogólny dowód twierdzenia Talesa odkładam na później (na początek III klasy lub — wyjątkowo — na koniec II klasy). W dowodzie twierdzenia Talesa korzystam z pól trójkątów, o których jeszcze nie mówiliśmy. Ponadto do samego sformułowania tego twierdzenia konieczne jest wyjaśnienie, co to jest podział odcinka (wewnętrzny i zewnętrzny) w danym stosunku. Te pojęcia omawiam z uczniami później — pola wielokątów jeszcze w I klasie, podział w danym stosunku bezpośrednio przed twierdzeniem Talesa w III lub II klasie. Natomiast teraz mogę dać uczniom jako zadanie udowodnienie analogicznego (do powyższego) lematu dla danej skończonej liczby odcinków; jest to w istocie twierdzenie Talesa dla odcinków równych. Oto ten lemat dla trzech odcinków:

Lemat. Punkty D i E (w tej kolejności) dzielą bok AC trójkąta ABC na trzy równe części. Przez punkt D prowadzimy prostą równoległą do boku AB, przecinającą bok BC w punkcie F; przez punkt E prowadzimy prostą równoległą do boku AB, przecinającą bok BC w punkcie G. Wówczas $BF = FG = GC$, $EG = \frac{1}{3} \cdot AB$ oraz $DF = \frac{2}{3} \cdot AB$.

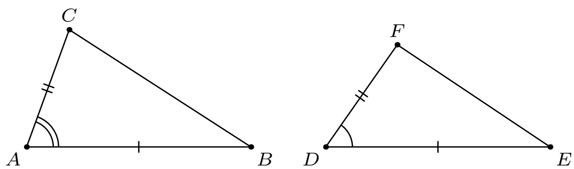
Szkic dowodu. Przez punkt D prowadzimy prostą równoległą do boku BC, przecinającą bok AB w punkcie H oraz przez punkt E prowadzimy prostą równoległą do boku BC, przecinającą odcinek DF w punkcie J (rys. 8.92). Następnie dowodzimy, że czworokąty $HBFD$ i $JFGE$ są równoległobokami oraz że trójkąty AHD, DJE i EGC są przystające.



Rys. 8.92

W zadaniu 47 widzimy dwa trójkąty ACD i BCD, mające po dwa boki równe (bok CD wspólny, $AD = BD$). Trzeci bok jest dłuższy w tym trójkącie, w którym jest większy kąt między pozostałymi bokami. Zadanie to zawiera więc dowód następującego twierdzenia:

Twierdzenie. Dane są dwa trójkąty ABC i DEF takie, że: $AB = DE$, $AC = DF$ oraz $\measuredangle BAC > \measuredangle EDF$ (rys. 8.93).



Rys. 8.93

Wówczas $BC > EF$.

Twierdzenie to jest czasem stosowane w zadaniach i warto je przy tej okazji podać uczniom. Zadanie 49 warto skonfrontować z problemem znalezienia punktu, dla którego suma odległości od wierzchołków trójkąta jest najmniejsza. O ile rozwiązanie zadania 49 jest bardzo łatwe, o tyle analogiczne zadanie dla trójkąta jest znacznie trudniejsze. Odpowiedź jest następująca: jeśli któryś kąt trójkąta ABC jest równy co najmniej $120°$, to szukanym punktem jest wierzchołek tego kąta; w przeciwnym przypadku, szukanym punktem jest punkt przecięcia odcinków AD, BE i CF z zadania 28. Można pokazać, że jeśli P jest tym punktem przecięcia, to

$$\measuredangle APB = \measuredangle BPC = \measuredangle CPA = 120°$$

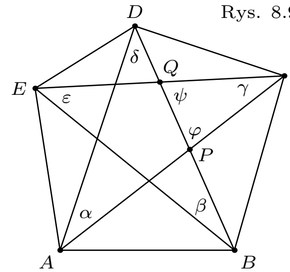
oraz P jest punktem wspólnym okręgów opisanych na trójkątach równobocznych dorysowanych do trójkąta ABC. Dowody tych stwierdzeń są jednak za trudne, by pokazać je uczniom w tym momencie. Punkt P nazywamy punktem Fermata (czasem także punktem Steinera lub punktem Torricelliego) dla trójkąta ABC. Przy okazji zadania 50 warto wspomnieć, że jego tezy nie można wzmocnić, tzn. nie istnieją stałe $a > \frac{1}{2}$ i $b < 1$ takie, że

$$a \cdot (\text{Obwód czworokąta}) < AC + BD < b \cdot (\text{Obwód czworokąta}).$$

Aby się o tym przekonać, wystarczy przyjrzeć się rombowi o bardzo długiej jednej przekątnej i bardzo krótkiej drugiej oraz prostokątowi o bardzo długim jednym boku i bardzo krótkim drugim.

Zestaw VI — szkice rozwiązań.

51. W pięciokącie wypukłym $ABCDE$ poprowadzono wszystkie przekątne. Oblicz sumę kątów $\measuredangle CAD + \measuredangle DBE + \measuredangle ECA + \measuredangle ADB + \measuredangle BEC$.

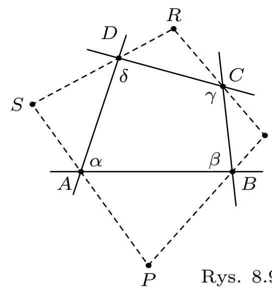


Rys. 8.94

Rozwiązanie. Niech P i Q będą punktami przecięcia przekątnej BD odpowiednio z przekątnymi AC i EC. Oznaczmy kąty literami greckimi, tak jak na rysunku 8.94. Kąt φ jest kątem zewnętrznym trójkąta APD, a więc $\varphi = \alpha + \delta$. Podobnie kąt ψ jest kątem zewnętrznym trójkąta BQE, więc $\psi = \beta + \varepsilon$. Suma kątów trójkąta PCQ jest równa $\varphi + \psi + \gamma = 180°$, skąd wynika, że

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon = (\alpha+\delta)+(\beta+\varepsilon)+\gamma = \varphi+\psi+\gamma = 180°.$$

52. Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$. Punkty P, Q, R i S są punktami przecięcia dwusiecznych kątów zewnętrznych czworokąta $ABCD$. Udowodnij, że sumy przeciwległych kątów czworokąta $PQRS$ są równe.



Rys. 8.95

Rozwiązanie. Oznaczmy kąty czworokąta tak jak na rysunku 8.95. Wówczas $\measuredangle PAB = \frac{1}{2} \cdot (180° - \alpha) = 90° - \frac{\alpha}{2}$. Podobnie $\measuredangle PBA = 90° - \frac{\beta}{2}$. Stąd $\measuredangle APB = \frac{\alpha+\beta}{2}$. W podobny sposób $\measuredangle CRD = \frac{\gamma+\delta}{2}$. Zatem

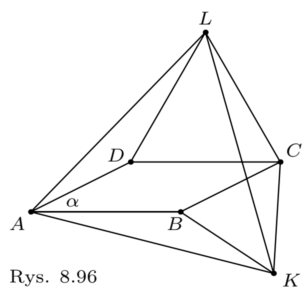
$$\measuredangle APB + \measuredangle CRD = \frac{\alpha+\beta}{2} + \frac{\gamma+\delta}{2} = \frac{360°}{2} = 180°$$

i, podobnie, $\measuredangle BQC + \measuredangle DSA = 180°$.

53. Na bokach BC i CD równoległoboku $ABCD$ zbudowano (na zewnątrz równoległoboku) trójkąty równoboczne BCK i DCL. Udowodnij, że trójkąt AKL jest równoboczny.

Rozwiązanie. Przypuśćmy, że kąt α jest kątem ostrym równoległoboku oraz $\alpha < 60°$ (rys. 8.96). Pozostałe przypadki pozostawimy jako ćwiczenie.
Wówczas $AB = LD = LC$ oraz $BK = DA = CK$. Ponadto

$$\begin{aligned}
\measuredangle ABK &= 360° - \measuredangle ABC - \measuredangle CBK = \\
&= 360° - (180° - \alpha) - 60° = 120° + \alpha, \\
\measuredangle LDA &= 360° - \measuredangle ADL - \measuredangle LDC = \\
&= 360° - (180° - \alpha) - 60° = 120° + \alpha, \\
\measuredangle LCK &= \measuredangle BCD + \measuredangle BCK + \measuredangle LCD = \\
&= \alpha + 60° + 60° = 120° + \alpha.
\end{aligned}$$

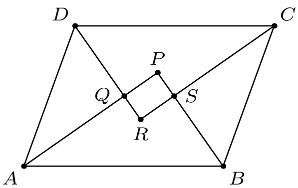


Rys. 8.96

Stąd wynika, że trójkąty ABK, LDA i LCK są przystające, a więc $AK = LA = LK$.

54. Udowodnij, że punkty przecięcia dwusiecznych kątów równoległoboku nie będącego rombem są wierzchołkami prostokąta.

Rozwiązanie. Mamy udowodnić, że czworokąt $PQRS$ jest prostokątem (rys. 8.97). Zauważmy, że

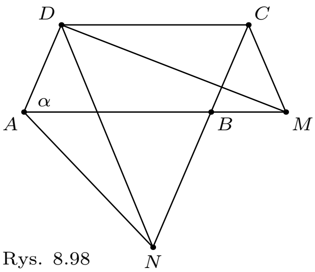


Rys. 8.97

$$\measuredangle BAP + \measuredangle ABP = \frac{1}{2} \cdot \measuredangle BAD + \frac{1}{2} \cdot \measuredangle ABC =$$
$$= \frac{1}{2} \cdot (\measuredangle BAD + \measuredangle ABC) = \frac{1}{2} \cdot 180^\circ = 90^\circ.$$

Zatem $\measuredangle APB = 90^\circ$; podobnie dowodzimy, że pozostałe kąty czworokąta $PQRS$ są proste.

55. Dany jest równoległobok $ABCD$ z kątem ostrym przy wierzchołku A. Na półprostej AB wyznaczono punkt M ($M \neq B$) taki, że $CB = CM$, a na półprostej CB punkt N ($N \neq B$) taki, że $AB = AN$. Udowodnij, że $DM = DN$.



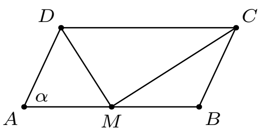
Rys. 8.98

Rozwiązanie. Oznaczmy kąt BAD literą α (rys. 8.98). Wtedy $\measuredangle BCD = \alpha$. Zauważamy teraz, że trójkąty BMC i NBA są równoramienne i ich kąty przy podstawie są równe (bo kąty MBC i NBA są wierzchołkowe). Zatem mamy $\measuredangle BCM = \measuredangle NAB$, skąd wynika, że

$$\measuredangle NAD = \measuredangle NAB + \alpha = \measuredangle BCM + \alpha = \measuredangle DCM.$$

Zatem trójkąty NAD i DCM są przystające (cecha przystawania BKB) i $DN = DM$.

56. W równoległoboku $ABCD$, w którym bok AB jest dwa razy dłuższy od boku BC, połączono środek M boku AB z wierzchołkami C i D. Udowodnij, że kąt CMD jest prosty.



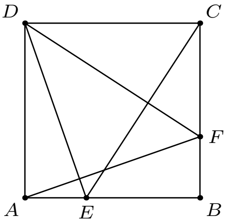
Rys. 8.99

Rozwiązanie. Oznaczmy kąt BAD równoległoboku $ABCD$ literą α (rys. 8.99). Trójkąty MDA i MCB są równoramienne, bo $AD = AM = MB = CB$. Zatem $\measuredangle AMD = \frac{180^\circ - \alpha}{2}$ oraz $\measuredangle BMC = \frac{180^\circ - (180^\circ - \alpha)}{2} = \frac{\alpha}{2}$. Stąd wynika, że

$$\measuredangle AMD + \measuredangle BMC = \frac{180^\circ - \alpha}{2} + \frac{\alpha}{2} = 90^\circ,$$

czyli $\measuredangle CMD = 90^\circ$.

57. Na bokach AB i BC kwadratu $ABCD$ obrano odpowiednio punkty E i F takie, że $EB + BF = AB$. Udowodnij, że suma kątów BAF, EDF i ECB wynosi 90°.



Rys. 8.100

Rozwiązanie. Skoro $EB = AB - BF$ (rys. 8.100), więc

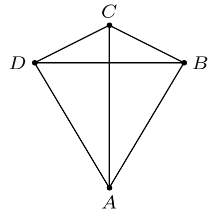
$$AE = AB - EB = AB - (AB - BF) = BF.$$

Zatem także $EB = FC$. Z założeń wynika, że trójkąty ABF i DAE są przystające ($AB = DA$, $\measuredangle ABF = \measuredangle DAE = 90^\circ$, $AE = BF$, cecha przystawania BKB). Zatem $\measuredangle BAF = \measuredangle ADE$. Podobnie trójkąty CBE i DCF są przystające. Stąd wynika, że $\measuredangle ECB = \measuredangle FDC$, a więc ostatecznie

$$\measuredangle BAF + \measuredangle EDF + \measuredangle ECB = \measuredangle ADE + \measuredangle EDF + \measuredangle FDC = \measuredangle ADC = 90^\circ.$$

58. W czworokącie $ABCD$ mamy $AB = AD$ i $BC = CD$. Wykaż, że kąty B i D są równe. Wykaż, że przekątne tego czworokąta są prostopadłe.

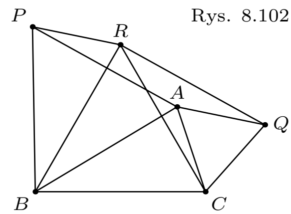
Rozwiązanie. W czworokącie $ABCD$ prowadzimy przekątne AC i BD (rys. 8.101). Trójkąty ACB i ACD są przystające (wspólny bok AC, $AB = AD$ i $BC = CD$, cecha przystawania BBB). Stąd wynika, że $\measuredangle ABC = \measuredangle ADC$. Następnie zauważamy, że z równości $AB = AD$ wynika, że punkt A leży na symetralnej odcinka BD. Również punkt C leży na tej symetralnej. A więc prosta AC jest symetralną odcinka BD; jest więc do niej prostopadła.



Rys. 8.101

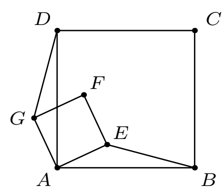
59. Na bokach AB, BC i CA trójkąta ABC zbudowano trzy trójkąty równoboczne: APB, BRC i CQA. Trójkąt BRC leży po tej samej stronie boku BC co trójkąt ABC; pozostałe dwa leżą na zewnątrz trójkąta ABC. Udowodnij, że punkty A, P, R i Q są współliniowe lub są wierzchołkami równoległoboku.

Rozwiązanie. Przypuśćmy, że punkty A, P, R i Q nie są współliniowe. Rozpatrujemy tylko przypadek, gdy $\measuredangle CBA < 60°$, tzn. gdy półprosta BA leży wewnątrz kąta CBR oraz $\measuredangle BCA > 60°$, tzn. półprosta CR leży wewnątrz kąta BCA (rys. 8.102). Pozostałe przypadki zostawiam Czytelnikowi. Trójkąty BCA i BRP są przystające ($\measuredangle CBA = 60° - \measuredangle ABR = \measuredangle RBP$, $BC = BR$, $BA = BP$, cecha przystawania BKB). Stąd wynikają równości $PR = AC = AQ$. W podobny sposób dowodzimy, że trójkąty BCA i RCQ są przystające ($BC = RC$, $\measuredangle BCA = 60° + \measuredangle RCA = \measuredangle RCQ$, $AC = QC$, cecha przystawania BKB). Wynika z tego, że $PA = BA = RQ$. Czworokąt $PAQR$ ma zatem przeciwległe boki równe, a więc jest równoległobokiem.

Rys. 8.102


60. Dane są dwa kwadraty: $ABCD$ i $AEFG$. W obu kwadratach podana kolejność wierzchołków jest przeciwna do ruchu wskazówek zegara. Udowodnij, że $BE = DG$.

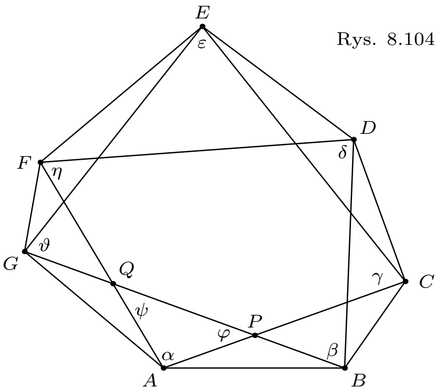
Rozwiązanie. Rozpatrujemy przypadek, gdy wierzchołek E leży wewnątrz kwadratu $ABCD$ (rys. 8.103). Trójkąty ABE i ADG są przystające ($\measuredangle BAE = 90° - \measuredangle EAD = \measuredangle DAG$, $AB = AD$, $AE = AG$, cecha przystawania BKB). Zatem $BE = DG$. Pozostałe przypadki (zależne od położenia punktu E) pozostawiam jako ćwiczenie.



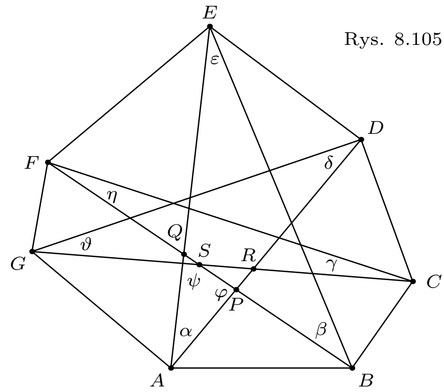
Rys. 8.103

Uwaga. To zadanie znalazło się w informatorze maturalnym; jego niewielka modyfikacja znalazła się też w arkuszu maturalnym w 2010 roku.

Zestaw VI składa się z zadań dotyczących wielokątów. Interesujące, ze względu na uogólnienia, jest zadanie 51, w którym rozpatrujemy gwiazdę wewnątrz pięciokąta wypukłego. Jeśli połączymy co drugi wierzchołek sześciokąta wypukłego, to otrzymana gwiazda (tzw. gwiazda Dawida) składa się z dwóch trójkątów. Suma kątów takiej gwiazdy wynosi oczywiście 360°. Popatrzmy teraz na siedmiokąt wypukły $ABCDEFG$. Możemy w nim utworzyć dwie gwiazdy siedmioramienne: łącząc co drugi (rys. 8.104) lub co trzeci wierzchołek (rys. 8.105):



Rys. 8.104



Rys. 8.105

Oznaczmy kąty gwiazdy literami greckimi α, β, γ, δ, ε, η i ϑ, tak jak na rysunkach 8.104 i 8.105. Wybierzmy przy tym punkty P i Q: w pierwszym przypadku są to punkty przecięcia przekątnej BG z przekątnymi AC i AF. W drugim przypadku są to punkty przecięcia przekątnej BF z przekątnymi AD i AE. Wreszcie φ i ψ są kątami trójkąta APQ przy wierzchołkach P i Q.

W pierwszym przypadku korzystamy z tego, że suma kątów każdego z czworokątów $PCEG$ i $QBDF$ jest równa 360°:

$$(180^\circ - \varphi) + \gamma + \varepsilon + \vartheta = 360^\circ \quad \text{oraz} \quad (180^\circ - \psi) + \beta + \delta + \eta = 360^\circ.$$

Po dodaniu tych równości stronami, otrzymamy

$$\beta + \gamma + \delta + \varepsilon + \eta + \vartheta = 360^\circ + \varphi + \psi.$$

Do obu stron dodajemy teraz α i korzystamy z tego, że suma kątów trójkąta APQ jest równa 180°:

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon + \eta + \vartheta = 360^\circ + \alpha + \varphi + \psi = 360^\circ + 180^\circ = 540^\circ.$$

W drugim przypadku kąt ψ jest kątem zewnętrznym trójkąta BEQ; zatem $\psi = \beta + \varepsilon$. Niech następnie R i S będą punktami przecięcia przekątnej GC z przekątnymi AD i BF. Kąt φ jest kątem zewnętrznym trójkąta PRS, więc $\varphi = \measuredangle PRS + \measuredangle PSR$. Z kolei kąt PRS jest kątem zewnętrznym trójkąta RDG, a kąt PSR jest kątem zewnętrznym trójkąta SCF. Zatem

$$\measuredangle PRS = \delta + \vartheta \quad \text{oraz} \quad \measuredangle PSR = \gamma + \eta.$$

Zatem

$$\varphi = \gamma + \delta + \eta + \vartheta$$

i ostatecznie

$$180^\circ = \alpha + \varphi + \vartheta = \alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon + \eta + \vartheta.$$

W tym przypadku suma kątów gwiazdy jest równa 180°. Oczywiście te badania można kontynuować, obliczając sumy kątów gwiazd ośmiokątnych, dziewięciokątnych i tak dalej.

Nie można jednak oczekiwać, by uczeń pierwszej klasy gimnazjum był w stanie wyprowadzić jakieś ogólne wnioski z tych badań.

Pozostałe zadania z tego zestawu są dość rutynowymi zadaniami dotyczącymi wielokątów i mają dać uczniowi szansę nabrania wprawy w wykorzystywaniu dotychczas poznanych metod (rachunek kątów i cechy przystawania trójkątów) w dowodzeniu twierdzeń geometrycznych. Moje dotychczasowe doświadczenia pokazują, że uczniowie, którzy nauczyli się solidnie tego wszystkiego, co jest w pierwszych sześciu zestawach zadań, mogą już przystąpić do samodzielnego rozwiązywania zadań olimpijskich (oczywiście mam tu na myśli Olimpiadę Matematyczną Gimnazjalistów).

Po przerobieniu zestawu VI daję uczniom następny fragment tekstu „teoretycznego”, w którym omawiam pojęcie pola wielokątów i dowodzę twierdzenia Pitagorasa oraz twierdzeń odwrotnych do niego (celowo używam tu liczby mnogiej). Te fragmenty tekstu załączam w całości.

▼

1. Aksjomaty pola

Każdemu wielokątowi przypisujemy nieujemną liczbę rzeczywistą, którą nazywamy jego **polem**. Pole wielokąta F będziemy oznaczać symbolem P_F (spotykane jest też oznaczenie $[F]$). Na przykład, pole trójkąta ABC oznaczamy symbolem P_{ABC} (lub $[ABC]$), pole pięciokąta $KLMNP$ oznaczamy symbolem P_{KLMNP} (lub $[KLMNP]$).

To przyporządkowanie ma trzy własności, które nazywamy **aksjomatami pola**.

Aksjomat 1. Pole prostokąta o bokach długości a i b jest równe $a \cdot b$. Na przykład dla prostokąta $ABCD$ na rysunku 8.106 mamy $P_{ABCD} = a \cdot b$.

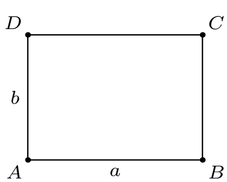
Aksjomat 2. Pola trójkątów przystających są równe, tzn. jeśli $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$, to $P_{ABC} = P_{DEF}$.

Aksjomat 3. Jeśli wielokąt F rozetniemy na wielokąty $F_1, \ldots, F_n$, to pole całego wielokąta F jest równe sumie pól wielokątów, na które go rozcięto:

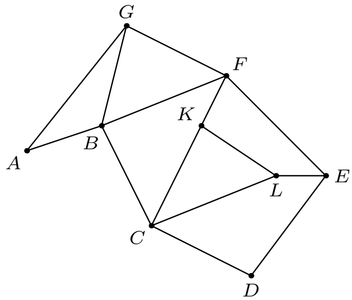
$$P_F = P_{F_1} + \ldots + P_{F_n}.$$

Jeśli na przykład, siedmiokąt $ABCDEFG$ (rys. 8.107) rozetniemy na sześć wielokątów: cztery trójkąty ABG, BFG, BCF i CLK oraz dwa czworokąty $KLEF$ i $CDEL$, to

$$P_{ABCDEFG} = P_{ABG} + P_{BFG} + P_{BCF} + P_{CLK} + P_{KLEF} + P_{CDEL}.$$



Rys. 8.106

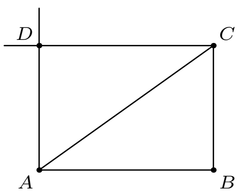


Rys. 8.107

2. Pole trójkąta

Najpierw wyprowadzimy wzór na pole trójkąta prostokątnego. Załóżmy, że mamy dany trójkąt prostokątny ABC, w którym kąt B jest prosty.

Poprowadźmy przez wierzchołek C prostą równoległą do boku AB, a przez wierzchołek A prostą równoległą do boku BC. Oznaczmy przez D punkt przecięcia tych prostych. Ponieważ $AB \parallel CD$ oraz $\measuredangle ABC = 90°$, więc $\measuredangle BCD = 90°$. Podobnie dowodzimy, że $\measuredangle BAD = 90°$. Czworokąt $ABCD$ ma zatem trzy kąty proste, z czego wynika, że jego czwarty kąt też jest prosty. Zatem czworokąt $ABCD$ jest prostokątem, czyli $P_{ABCD} = AB \cdot BC$. Zauważamy następnie, że $\triangle ABC \equiv \triangle CDA$ ($\measuredangle BAC = \measuredangle DCA$, wspólny bok AC, $\measuredangle ACB = \measuredangle CAD$, cecha przystawania KBK). Zatem $P_{ABC} = P_{CDA}$ oraz $P_{ABCD} = P_{ABC} + P_{CDA}$. Stąd wynika, że

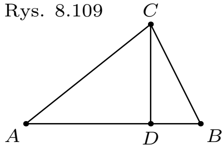


Rys. 8.108

$$P_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot CD.$$

Pole trójkąta prostokątnego jest zatem połową iloczynu przyprostokątnych.

Weźmy teraz dowolny trójkąt ABC i opuśćmy wysokość CD z wierzchołka C na prostą AB. Możliwe są dwa przypadki: wysokość spada na podstawę AB lub na jej przedłużenie.

Rys. 8.109


Zajmijmy się najpierw przypadkiem, w którym wysokość spada na podstawę AB (rys. 8.109). Trójkąty ADC i BDC są prostokątne. Zatem

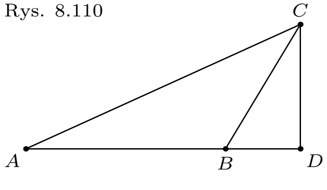
$$P_{ADC} = \frac{1}{2} \cdot AD \cdot DC \quad \text{oraz} \quad P_{BDC} = \frac{1}{2} \cdot BD \cdot DC.$$

Wysokość CD podzieliła trójkąt ABC na trójkąty ADC i BDC, więc

$$P_{ABC} = P_{ADC} + P_{BDC} = \frac{1}{2} \cdot AD \cdot DC + \frac{1}{2} \cdot BD \cdot DC = \frac{1}{2} \cdot (AD + BD) \cdot DC = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot DC.$$

Pole trójkąta ABC jest zatem połową iloczynu podstawy przez wysokość.

W drugim przypadku punkt D leży na przedłużeniu podstawy AB (rys. 8.110). Trójkąty ADC i BDC są prostokątne. Zatem

Rys. 8.110


$$P_{ADC} = \frac{1}{2} \cdot AD \cdot DC \quad \text{oraz} \quad P_{BDC} = \frac{1}{2} \cdot BD \cdot DC.$$

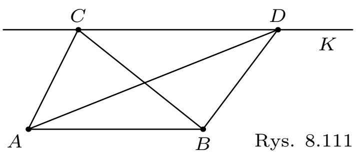
Tym razem trójkąt ADC jest podzielony na dwa trójkąty: ABC i BDC. Zatem $P_{ADC} = P_{ABC} + P_{BDC}$, skąd wynika, że

$$P_{ABC} = P_{ADC} - P_{BDC} = \frac{1}{2} \cdot AD \cdot DC - \frac{1}{2} \cdot BD \cdot DC = \frac{1}{2} \cdot (AD - BD) \cdot DC = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot DC.$$

W tym przypadku pole trójkąta również okazało się równe połowie iloczynu podstawy przez wysokość.

We wszystkich przypadkach otrzymaliśmy ten sam wynik: pole trójkąta ABC o podstawie AB i wysokości CD jest równe

$$P_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot CD.$$

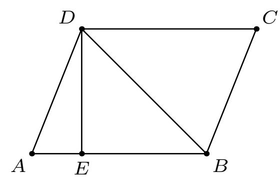


Rys. 8.111

Z tego wzoru wynika ważny wniosek. Mówi on, że pola trójkątów o tej samej podstawie, których wierzchołki leżą na prostej k równoległej do podstawy, są równe (rys. 8.111). A więc, jeśli $k \parallel AB$, to pola trójkątów ABC i ABD są równe: $P_{ABC} = P_{ABD}$.

3. Pole równoległoboku

Wyprowadzimy teraz wzór na pole równoległoboku. Podzielmy równoległobok $ABCD$ na dwa trójkąty przekątną BD. Poprowadźmy w nim wysokość DE (rys. 8.112). Najpierw zauważamy, że trójkąty ABD i BCD są przystające: $\triangle ABD \equiv \triangle BCD$ (bok BD wspólny, $\measuredangle ABD = \measuredangle CDB$, $\measuredangle BDA = \measuredangle DBC$, cecha przystawania KBK). Zatem pola tych dwóch trójkątów są równe. Suma pól trójkątów ABD i BCD jest równa polu równoległoboku $ABCD$, więc pole trójkąta ABD jest połową pola równoległoboku:



Rys. 8.112

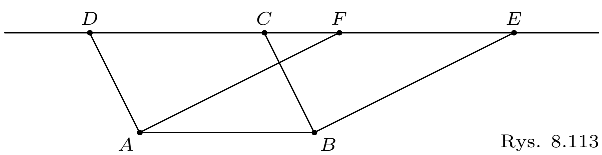
$$P_{ABD} = \frac{1}{2} \cdot P_{ABCD}.$$

Pole równoległoboku $ABCD$ jest więc równe

$$P_{ABCD} = 2 \cdot P_{ABD} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot AB \cdot DE = AB \cdot DE.$$

Pole równoległoboku jest więc iloczynem podstawy przez wysokość.

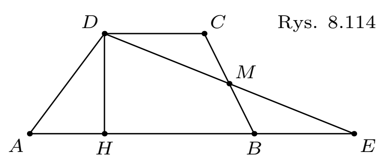
W szczególności dwa równoległoboki o tej samej podstawie i tej samej wysokości mają równe pola. Jeśli zatem punkty D, C, F i E leżą na prostej równoległej do AB, to $P_{ABCD} = P_{ABEF}$ (rys. 8.113):



Rys. 8.113

4. Pole trapezu

Wyprowadzimy teraz wzór na pole trapezu. Niech będzie dany trapez $ABCD$ o podstawach AB i CD. Niech punkt M będzie środkiem ramienia BC. Poprowadźmy prostą DM i niech punkt E będzie punktem przecięcia tej prostej z prostą AB (rys. 8.114). Trójkąty DMC i EMB są przystające: $CM = BM$, bo punkt M jest środkiem boku BC; $\measuredangle DMC = \measuredangle EMB$, bo są to kąty wierzchołkowe, a $\measuredangle DCM = \measuredangle EBM$, bo są to kąty naprzemianległe przy siecznej BC, przecinającej proste

Rys. 8.114


równoległe AE i CD. Zatem pola tych trójkątów są równe. Stąd wynika, że pole trapezu $ABCD$ jest równe polu trójkąta AED, więc

$$P_{ABCD} = P_{AED} = \frac{1}{2} \cdot AE \cdot DH.$$

Z tego, że trójkąty DMC i EMB są przystające, wynika również, że $CD = BE$. Zatem

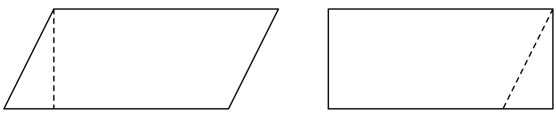
$$AE = AB + BE = AB + CD.$$

Stąd otrzymujemy:

$$P_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot (AB + CD) \cdot DH.$$

Pole trapezu jest więc iloczynem średniej arytmetycznej podstaw przez wysokość trapezu. ▲

Pole wielokąta zostało wprowadzone aksjomatycznie. Okazuje się, że trzy podane aksjomaty wystarczą do całego dalszego wykładu geometrii. Zwracam uwagę na to, że nie podaję twierdzenia, że figury przystające mają równe pola. Jest tak dlatego, że przez dłuższy czas nie rozważam przystawania innych figur niż trójkąty. Ogólna definicja przystawania wymaga wprowadzenia pojęcia izometrii, czego w I klasie gimnazjum nie chcę robić. Przy okazji nauki symetrii wspominam dość nieformalnie o przekształceniach geometrycznych, jednak nie wprowadzam ogólnego pojęcia izometrii. Kolejność dowodzenia wzorów wydaje mi się naturalna. W wielu podręcznikach najpierw dowodzi się wzoru na pole równoległoboku, a potem wyprowadza się z niego wzór na pole trójkąta, ale często ten dowód ma istotną lukę: autorzy podręczników pokazują, że równoległobok ma takie samo pole jak prostokąt, posługując się rysunkiem takim jak rys. 8.115.

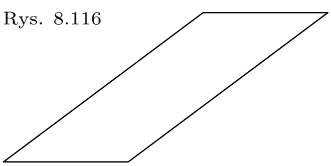


Rys. 8.115

Trójkąt odcięty z lewej strony zostaje przeniesiony na prawo i z równoległoboku tworzy się prostokąt. To dowodzi, że pole równoległoboku jest iloczynem podstawy przez wysokość.

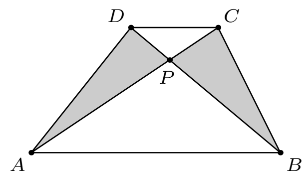
Ten dowód jednak nie działa w przypadku, gdy równoległobok jest dużo wyższy (rys. 8.116). Tym razem nie da się odciąć z lewej strony takiego trójkąta, by po dołożeniu go z prawej strony przekształcić równoległobok w prostokąt. Można argumentować, że ten równoległobok możemy położyć na drugim boku, ale wzór na pole równoległoboku jest potrzebny dla każdej podstawy i każdej wysokości. Wiele rozumowań polega na obliczeniu pola dwoma sposobami, a więc potrzebne są oba wzory. Oczywiście ten dowód można uratować, rozcinając równoległobok liniami poziomymi na wiele mniejszych równoległoboków; trzeba tylko udowodnić, że tak się da zrobić — a to już wykracza poza poziom gimnazjum. Zwłaszcza, że zamiana kolejności wyprowadzania wzorów usuwa ten problem.

Rys. 8.116



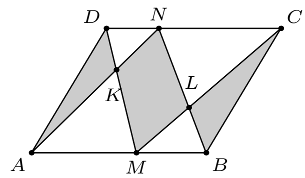
Wprowadzenie pojęcia pola wielokąta pozwala wrócić do zadania 30 i rozwiązać je pokazaną wcześniej metodą. Daję wtedy uczniom kilka nowych zadań. Oto one:

1. Punkt P jest punktem przecięcia przekątnych czworokąta wypukłego $ABCD$. Udowodnij, że pola trójkątów BCP i DAP są równe wtedy i tylko wtedy, gdy boki AB i CD są równoległe (rys. 8.117).



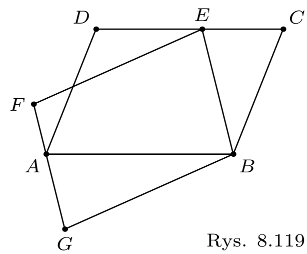
Rys. 8.117

2. Punkty M i N leżą odpowiednio na bokach AB i CD równoległoboku $ABCD$. Odcinki AN i DM przecinają się w punkcie K, zaś odcinki BN i CM przecinają się w punkcie L. Udowodnij, że pole czworokąta $KMLN$ jest równe sumie pól trójkątów AKD i BCL (rys. 8.118).



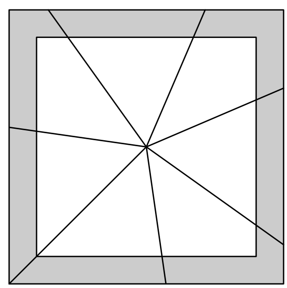
Rys. 8.118

3. Dane są dwa równoległoboki $ABCD$ i $BEFG$ takie, że punkt E leży na boku CD, a punkt A leży na boku FG. Udowodnij, że te równoległoboki mają równe pola (rys. 8.119).



Rys. 8.119

4. Dany jest kwadratowy tort, oblany z brzegów i z góry warstwą czekolady równej grubości. Chcemy za pomocą prostoliniowych cięć poprowadzonych ze środka tortu do brzegów podzielić ten tort między 7 osób tak, by każda z nich dostała tyle samo „masy” tortu i polewy czekoladowej. Czy jest to możliwe? Jeśli tak, to wskaż metodę podziału. Rysunek 8.120 przedstawia tort bez wierzchniej warstwy czekolady, ale należy o niej również pamiętać.


Rys. 8.120

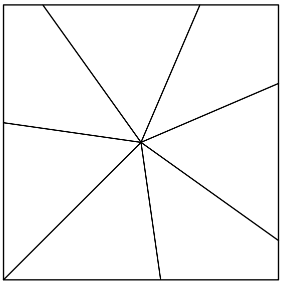
Rozwiązania niektórych zadań wymagają pomysłu; tutaj jedynie naszkicuję te pomysły. W zadaniu 1 należy zauważyć, że punkty C i D leżą po tej samej stronie prostej AB i wtedy następujące warunki są równoważne:

- trójkąty BCP i DAP mają równe pola;
- trójkąty ABC i ABD mają równe pola;
- trójkąty ABC i ABD mają równe wysokości;
- punkty C i D leżą w jednakowych odległościach od prostej AB;
- proste AB i CD są równoległe.

W zadaniu 2 zauważamy, że pole trójkąta ABN jest równe sumie pól trójkątów AMD i MBC (i równe połowie pola równoległoboku).

W zadaniu 3 trzeba zauważyć, że oba równoległoboki mają pole dwa razy większe od pola trójkąta ABE.

Zadanie 4 jest trudniejsze. Wydaje się, że osoby, które dostają części narożne, dostaną też więcej czekolady. Rozwiązanie polega na tym, by podzielić obwód kwadratu na siedem równych części i udowodnić, że pola odpowiednich wycinków są wtedy równe (rys. 8.121). Taką część zadania można zrobić z uczniami dokładnie, chociaż dowód też wymaga pomysłu. Pokazujemy, że pole jednego wycinka jest równe iloczynowi połowy tej części obwodu, która jest w danym wycinku, przez połowę boku kwadratu (tzn. wysokość tego wycinka w przypadku, gdy jest on trójkątem). Jest to oczywiste, gdy wycinek jest trójkątem. W przypadku, gdy wycinek zawiera róg kwadratu, trzeba go podzielić na dwie części odcinkiem biegnącym ze środka kwadratu do wierzchołka. Potem trzeba pokazać, że — jeśli podzielimy na siedem równych części obwód kwadratu zewnętrznego — to tak samo zostanie podzielony kwadrat wewnętrzny; to wymaga podobieństwa trójkątów lub jednokładności i może być tylko opowiedziane uczniom. Ścisły dowód musi być odłożony na później. Teraz widzimy, że cały kwadrat zostanie podzielony na siedem równych części, a także na siedem równych części zostanie podzielony kwadrat wewnętrzny. Z kolei z tego wynika, że także różnica tych dwóch kwadratów, czyli boczna polewa czekoladowa zostanie podzielona na równe części. Oczywiście górna polewa też zostanie podzielona na równe części. Szczegóły dowodu pozostawiam jako ćwiczenie.



Rys. 8.121

Po rozwiązaniu zadań z zestawu VI i zadań dodatkowych, dotyczących pól wielokątów, przechodzimy do twierdzenia Pitagorasa. Uczniowie dostają kolejny fragment tekstu teoretycznego. Zwracam uwagę, że w tym Poradniku nie zachowuję ciągłości numeracji twierdzeń geometrycznych; każdy fragment tekstu ma oddzielną numerację. A oto tekst o twierdzeniu Pitagorasa:

PoczatekTekstu

1. Twierdzenie Pitagorasa

Twierdzenie 1. Dany jest trójkąt prostokątny ABC, w którym $\measuredangle C = 90°$. Wtedy $AC^2 + BC^2 = AB^2$.

Twierdzenie Pitagorasa jest jednym z najważniejszych twierdzeń geometrii. Dzisiaj znamy wiele różnych dowodów tego twierdzenia. Przedstawię tu trzy dowody, pierwszy z nich jest dowodem Euklidesa, drugi pochodzi prawdopodobnie od Pitagorasa, autorem trzeciego jest matematyk hinduski Bhâskara żyjący w XII wieku.

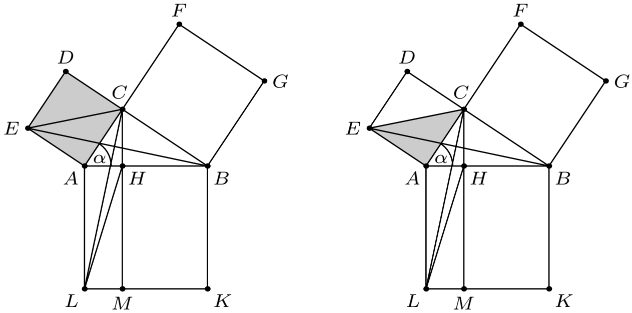
Dowód I. (Euklides, *Elementy*)
Na bokach AC, BC i AB trójkąta ABC budujemy kwadraty $ACDE$, $BCFG$ i $ABKL$, leżące na zewnątrz trójkąta. Prowadzimy odcinek CM prostopadły do boku AB; punkt H jest punktem przecięcia tego odcinka z bokiem AB. Oznaczmy literą α kąt A trójkąta ABC. Naszym celem jest udowodnienie, że pole kwadratu $ABKL$ jest równe sumie pól kwadratów $ACDE$ i $BCFG$:

$$P_{ACDE} + P_{BCFG} = P_{ABKL}.$$

Główny pomysł dowodu polega na wykazaniu, że

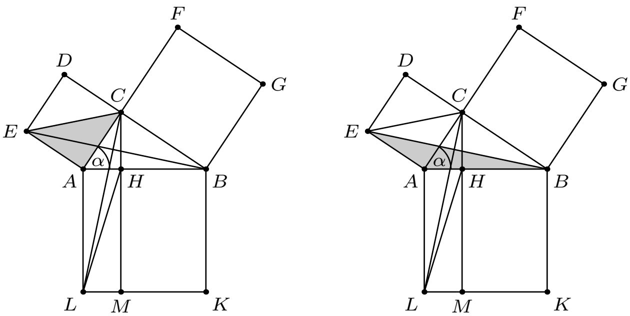
$$P_{ACDE} = P_{ALHM} \quad \text{oraz} \quad P_{BCFG} = P_{BHMK}.$$

Pokażę najpierw serię rysunków (rys. 8.122, 8.123, 8.124, 8.125, 8.126 i 8.127) ilustrujących dowód równości $P_{ACDE} = P_{ALHM}$:



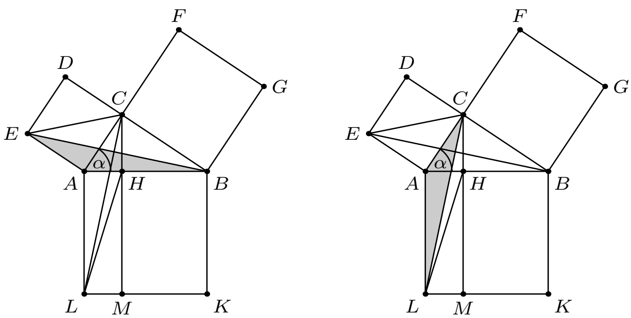
Rys. 8.122

$$P_{ACDE} = 2 \cdot P_{ACE}$$



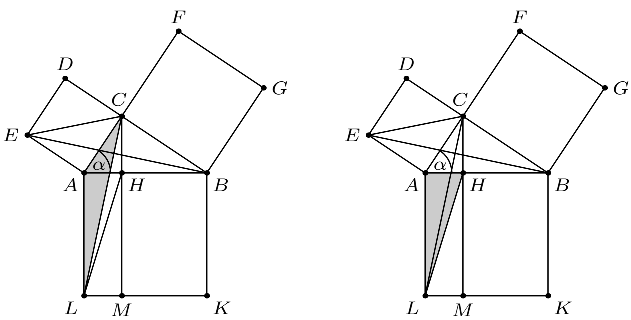
Rys. 8.123

$$P_{ACE} = P_{ABE}$$



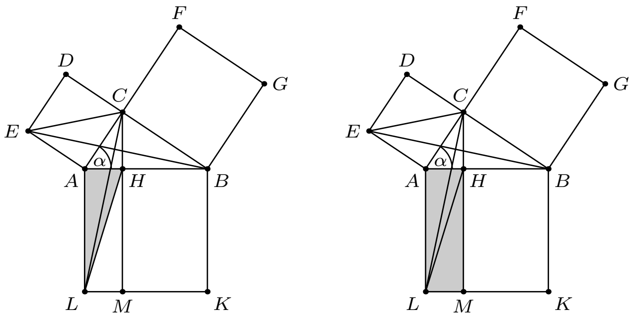
Rys. 8.124

$$P_{ABE} = P_{ALC}$$



Rys. 8.125

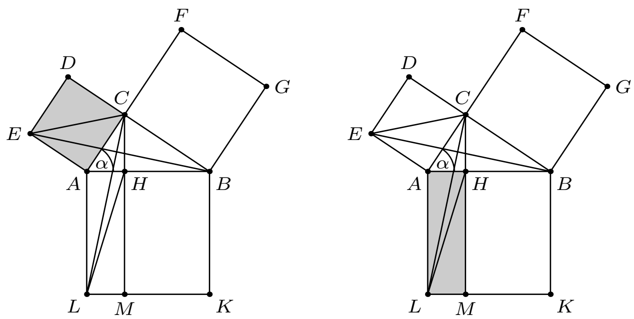
$$P_{ALC} = P_{ALH}$$



Rys. 8.126

$$P_{ALMH} = 2{\cdot}P_{ALH}$$

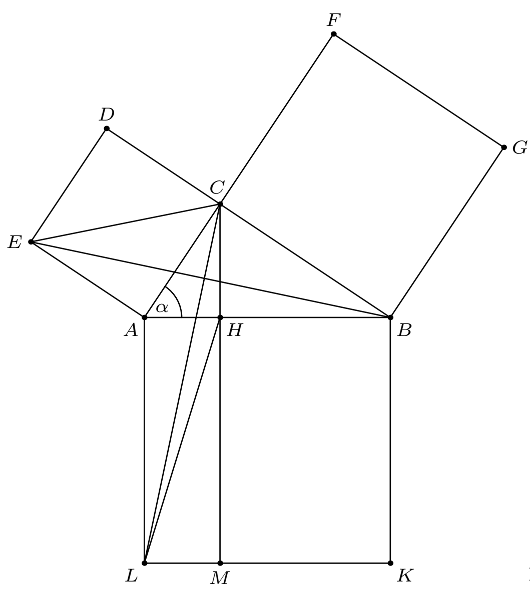
Ostatecznie dostajemy:



Rys. 8.127

$$P_{ACDE} = P_{ALMH}$$

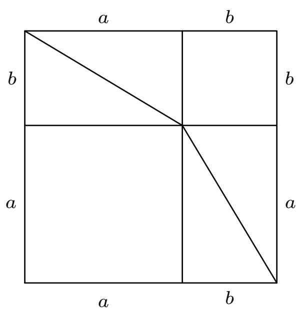
A teraz dowód twierdzenia (rys. 8.128).



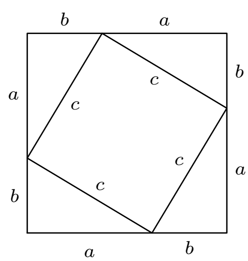
Rys. 8.128

Nr	Wniosek	Uzasadnienie
1.	$P_{ACDE} = 2 \cdot P_{ACE}$	EC jest przekątną kwadratu $ACDE$,
2.	$P_{ACE} = P_{ABE}$	$CB \parallel EA$,
3.	$EA = CA$	z konstrukcji,
4.	$AB = AL$	z konstrukcji,
5.	$\measuredangle EAB = 90° + \alpha$	półprosta AC leży wewnątrz kąta EAB,
6.	$\measuredangle CAL = 90° + \alpha$	półprosta AB leży wewnątrz kąta CAL,
7.	$\measuredangle EAB = \measuredangle CAL$	5, 6,
8.	$\triangle ABE \equiv \triangle ALC$	3, 4, 7, cecha przystawania BKB,
9.	$P_{ABE} = P_{ALC}$	8,
10.	$P_{ALC} = P_{ALH}$	$CH \parallel AL$,
11.	$P_{ALMH} = 2 \cdot P_{ALH}$	HL jest przekątną prostokąta $ALMH$,
12.	$P_{ACDE} = P_{ALMH}$	1, 2, 9, 10, 11,
13.	$P_{BCFG} = P_{BHMK}$	analogicznie,
14.	$P_{ACDE} + P_{BCFG} = P_{ABKL}$	12, 13,
	c. b. d. o.	

Dowód II. (Pitagoras?) Kwadrat o boku $a + b$ dzielimy na dwa kwadraty (o bokach a i b) i cztery trójkąty prostokątne o przyprostokątnych a i b (rys. 8.129). Inny podział tego kwadratu widzimy na rysunku 8.130. Mamy na nim jeden kwadrat o boku c i cztery trójkąty prostokątne o przyprostokątnych a i b i przeciwprostokątnej c.

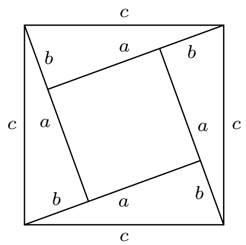


Rys. 8.129



Rys. 8.130

Stąd wynika, że kwadrat o boku c ma pole równe sumie pól kwadratów o bokach a i b, czyli $a^2 + b^2 = c^2$, c. b. d. o.



Rys. 8.131

Dowód III. (Bhâskara) Kwadrat o boku c dzielimy na cztery trójkąty prostokątne o przyprostokątnych a i b i jeden kwadrat o boku $a - b$ (rys. 8.131). Stąd

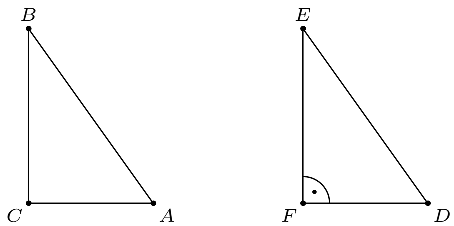
$$c^2 = 4 \cdot \frac{ab}{2} + (a-b)^2 = 2ab + a^2 - 2ab + b^2 = a^2 + b^2,$$

c. b. d. o.

2. Twierdzenie odwrotne do twierdzenia Pitagorasa

Twierdzenie 2. Dany jest trójkąt ABC, w którym $AC^2 + BC^2 = AB^2$. Wtedy trójkąt ABC jest prostokątny i $\measuredangle C = 90°$.

Dowód. Budujemy trójkąt DEF taki, że $AC = DF$, $BC = EF$ oraz $\measuredangle DFE = 90°$ (rys. 8.132).



Rys. 8.132

Trójkąt DEF jest prostokątny, więc z twierdzenia Pitagorasa wynika, że

$$DE^2 = DF^2 + EF^2 = AC^2 + BC^2 = AB^2,$$

czyli $DE = AB$. Zatem trójkąty ABC i DEF są przystające (cecha przystawania BBB) i $\measuredangle C = \measuredangle F = 90°$, c. b. d. o.

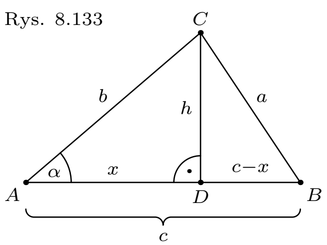
Pokażemy teraz inny dowód twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Pitagorasa. W tym celu udowodnimy najpierw dwa ważne twierdzenia. Przypuśćmy, że dany jest trójkąt ABC, którego boki oznaczamy literami a, b i c, a kąty literami α, β i γ.

Twierdzenie 3. Załóżmy, że kąt α jest ostry. Poprowadźmy wysokość CD trójkąta ABC i oznaczmy literą x długość odcinka AD. Wtedy

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2cx.$$

Dowód. Rozróżniamy trzy przypadki w zależności od tego, gdzie leży punkt D.

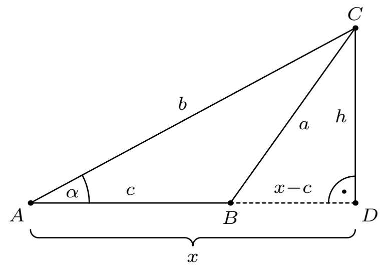
Rys. 8.133



Przypadek 1. Punkt D leży wewnątrz boku AB (rys. 8.133). Oznaczamy literą h wysokość CD. Odcinek DB jest równy $c - x$. Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta ADC wynika, że $x^2 + h^2 = b^2$. Korzystamy teraz z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta DBC:

$$\begin{aligned} a^2 &= (c-x)^2 + h^2 = c^2 - 2cx + x^2 + h^2 = \\ &= c^2 - 2cx + b^2 = b^2 + c^2 - 2cx. \end{aligned}$$

Przypadek 2. Punkt D leży na zewnątrz boku AB. Oznaczamy literą h wysokość CD (rys. 8.134). Odcinek BD jest teraz równy $x - c$. Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta ADC wynika, że $x^2 + h^2 = b^2$. Korzystamy znów z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta BDC:



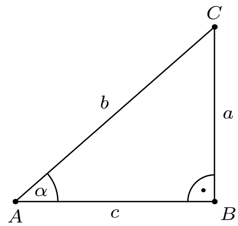
Rys. 8.134

$$\begin{aligned} a^2 &= (x-c)^2 + h^2 = x^2 - 2cx + c^2 + h^2 = \\ &= c^2 - 2cx + x^2 + h^2 = c^2 - 2cx + b^2 = \\ &= b^2 + c^2 - 2cx. \end{aligned}$$

Przypadek 3. Punkt D pokrywa się z punktem B (rys. 8. 135). Wtedy $x = c$ i z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta ABC wynika, że

$$a^2 = b^2 - c^2 = b^2 + c^2 - 2c^2 = b^2 + c^2 - 2cx,$$

c. b. d. o.



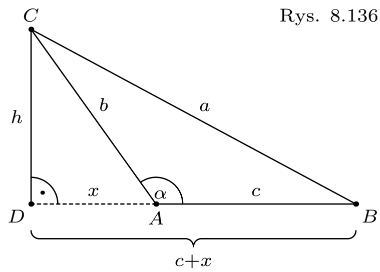
Rys. 8.135

Wniosek. Jeśli kąt α jest ostry, to $a^2 < b^2 + c^2$.

Twierdzenie 4. Załóżmy, że kąt α jest rozwarty. Poprowadźmy wysokość CD trójkąta ABC i oznaczmy literą x długość odcinka AD. Wtedy

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2cx.$$

Dowód. Oznaczamy literą h wysokość CD. Odcinek DB jest teraz równy $c + x$ (rys. 8.136). Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta DAC wiemy, że $x^2 + h^2 = b^2$. Korzystamy następnie z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta DBC:

Rys. 8.136


$$\begin{aligned} a^2 &= (c+x)^2 + h^2 = c^2 + 2cx + x^2 + h^2 = \\ &= c^2 + 2cx + b^2 = b^2 + c^2 + 2cx, \end{aligned}$$

c. b. d. o.

Wniosek. Jeśli kąt α jest rozwarty, to $a^2 > b^2 + c^2$.

Twierdzenie 5. Dany jest trójkąt ABC. Jeśli $a^2 = b^2 + c^2$, to $\alpha = 90°$.

Dowód. Przypuśćmy, że $\alpha \neq 90°$. Mamy wtedy dwa przypadki:

1. $\alpha < 90°$. Wówczas z twierdzenia 3 wynika, że $a^2 < b^2 + c^2$, co przeczy założeniu.
2. $\alpha > 90°$. Wtedy z twierdzenia 4 dostajemy $a^2 > b^2 + c^2$, co też jest sprzeczne z założeniem.

Otrzymane sprzeczności dowodzą, że kąt α musi być równy $90°$, c. b. d. o.

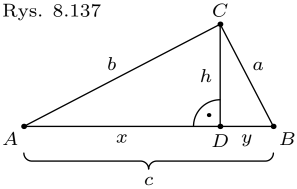
Uwaga. Twierdzenia 3 i 4 pokazują, w jaki sposób można obliczyć długość boku a, gdy znane są długości boków b i c oraz długość rzutu boku b na prostą AB. Twierdzenia te nie obejmowały jednego przypadku: gdy kąt α jest prosty. Wtedy oczywiście z twierdzenia

Pitagorasa dostajemy $a^2 = b^2 + c^2$. Zauważmy też, że rzut boku AC na prostą AB jest odcinkiem zerowym (a więc $x = 0$). Wtedy

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2cx = b^2 + c^2 + 2cx,$$

a więc w założeniach twierdzeń 3 i 4 można było przyjąć także, że $\alpha = 90°$.

Rys. 8.137



Twierdzenie 6. Dany jest taki trójkąt prostokątny ABC, w którym $\measuredangle C = 90°$. W trójkącie tym poprowadzono wysokość CD. Oznaczmy boki trójkąta ABC literami a, b i c, a następnie oznaczmy $CD = h$, $AD = x$ i $BD = y$. Wtedy

$$h = \frac{ab}{c}, \quad x = \frac{b^2}{c}, \quad y = \frac{a^2}{c} \quad \text{oraz} \quad xy = h^2.$$

Dowód. Zapiszmy pole trójkąta ABC dwoma sposobami:

$$P_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot ab = \frac{1}{2} \cdot ch.$$

Stąd dostajemy równość $ch = ab$, a więc $h = \frac{ab}{c}$. Następnie z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta ADC dostajemy

$$x^2 = b^2 - h^2 = b^2 - \frac{a^2b^2}{c^2} = \frac{b^2c^2 - a^2b^2}{c^2} = \frac{b^2(c^2 - a^2)}{c^2} = \frac{b^2 \cdot b^2}{c^2} = \frac{b^4}{c^2}.$$

Zatem $x = \frac{b^2}{c}$ i podobnie $y = \frac{a^2}{c}$. Wreszcie

$$xy = \frac{a^2}{c} \cdot \frac{b^2}{c} = \frac{a^2b^2}{c^2} = h^2,$$

c. b. d. o.

3. Trójki pitagorejskie i Wielkie Twierdzenie Fermata

Naturalne pytanie, czy istnieją trójkąty prostokątne takie, że długości ich wszystkich boków są liczbami całkowitymi, ma odpowiedź pozytywną. Przykładem jest trójkąt o bokach długości 3, 4 i 5:

$$3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25 = 5^2.$$

Trójkę (a, b, c) liczb całkowitych takich, że $a^2 + b^2 = c^2$ nazywamy **trójką pitagorejską**. Przykładem trójki pitagorejskiej jest więc trójka liczb $(3, 4, 5)$. Okazuje się, że trójek pitagorejskich (a, b, c) jest nieskończenie wiele. Zauważmy bowiem, że jeśli (a, b, c) jest trójką pitagorejską, to dla dowolnej liczby naturalnej k trójka (ka, kb, kc) też jest pitagorejska. Mianowicie

$$(ka)^2 + (kb)^2 = k^2a^2 + k^2b^2 = k^2(a^2 + b^2) = k^2c^2 = (kc)^2.$$

Na przykład trójki liczb $(6, 8, 10)$, $(9, 12, 15)$, $(12, 16, 20)$, $(15, 20, 25)$, ... są trójkami pitagorejskimi. Wszystkie one powstały jednak z trójki $(3, 4, 5)$. To nie są wszystkie trójki pitagorejskie. Można łatwo sprawdzić, że na przykład trójki $(5, 12, 13)$, $(7, 24, 25)$

i $(8, 15, 17)$ też są pitagorejskie. Wzory skróconego mnożenia pokazują, w jaki sposób możemy otrzymać nieskończenie wiele trójek pitagorejskich. Skorzystajmy ze wzoru

$$(a-b)^2 + 4ab = (a+b)^2.$$

Jeśli liczba $4ab$ będzie kwadratem: $4ab = k^2$, to trójka $(a-b, k, a+b)$ będzie pitagorejska. A więc wystarczy przyjąć $a = m^2$ i $b = n^2$. Wtedy $4ab = 4m^2n^2 = (2mn)^2$ i $k = 2mn$. Stąd wynika, że dla dowolnych liczb całkowitych dodatnich m i n takich, że $m > n$, trójka $(m^2 - n^2, 2mn, m^2 + n^2)$ jest pitagorejska.

Można udowodnić więcej. Trójkę pitagorejską (a, b, c) nazywamy **trójką pierwotną**, jeśli liczby a, b i c nie mają wspólnego dzielnika. Okazuje się, że istnieje nieskończenie wiele trójek pitagorejskich pierwotnych. Diofantos w drugiej połowie III w. n. e. znalazł postać wszystkich trójek pierwotnych. Udowodnił najpierw, że jeśli (a, b, c) jest trójką pierwotną, to jedna z liczb a i b jest parzysta, a druga nieparzysta. Następnie pokazał, że trójka (a, b, c) jest trójką pitagorejską pierwotną, w której liczba b jest parzysta, wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją liczby naturalne s i t (gdzie $s > t$) różnej parzystości, względnie pierwsze (tzn. takie, że jedynym wspólnym dzielnikiem s i t jest jedynka) i takie, że

$$a = s^2 - t^2, \quad b = 2st, \quad c = s^2 + t^2.$$

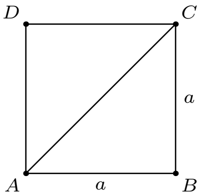
A oto przykłady pierwotnych trójek pitagorejskich (wraz z odpowiednimi liczbami s i t):

s	t	a	b	c	s	t	a	b	c	s	t	a	b	c
2	1	3	4	5	6	1	35	12	37	8	3	55	48	73
3	2	5	12	13	6	5	11	60	61	8	5	39	80	89
4	1	15	8	17	7	2	45	28	53	8	7	15	112	113
4	3	7	24	25	7	4	33	56	65	9	2	77	36	85
5	2	21	20	29	7	6	13	84	85	9	4	65	72	97
5	4	9	40	41	8	1	63	16	65	9	8	17	144	145

W połowie XVII wieku Pierre de Fermat (1601 – 1665), prawnik i matematyk mieszkający w Tuluzie, na marginesie czytanej książki *Arytmetyka* Diofantosa zapisał następujące twierdzenie: *Nie można podzielić sześcianu na dwa sześciany ani czwartej potęgi na dwie czwarte potęgi, ani ogólnie żadnej potęgi wyższej niż druga na dwie takie same potęgi.* Inaczej mówiąc, Fermat twierdził, że równanie $x^n + y^n = z^n$ dla $n \geq 3$ nie ma rozwiązania w liczbach całkowitych. Twierdzenie to znane jest pod nazwą *Wielkiego Twierdzenia Fermata*. Fermat dodał dalej: *Znalazłem naprawdę zadziwiający dowód, który nie zmieści się na tym zbyt wąskim marginesie.* Nigdy nie poznaliśmy dowodu Fermata; dziś przypuszczamy raczej, że Fermat pomylił się. Znamy natomiast oryginalny dowód Fermata dla wykładnika $n = 4$. Dowód (z luką) dla $n = 3$ podał dopiero Euler w roku 1770. Na pełne rozwiązanie problemu Fermata trzeba było czekać aż do roku 1994. Pierwsza wiadomość pojawiła się 23 czerwca 1993 roku; wtedy to, na trzecim ze swoich wykładów w Instytucie Newtona w Cambridge, angielski matematyk Andrew Wiles przedstawił szkic dowodu wielkiego twierdzenia Fermata. Jego pracę, zawierającą pełny dowód, przestudiowało dokładnie kilku specjalistów, znajdując w dowodzie usterki wymagające poprawek. W październiku 1994 roku Wiles przedstawił dwie prace, jedną wspólną z Richardem Taylorem. Prace te uzupełniały przedstawiony wcześniej dowód tak, że ostatecznie wielkie twierdzenie Fermata zostało uznane za udowodnione. Ostatecznie praca Wilesa i praca Wilesa i Taylora zostały opublikowane w 1995 roku w czasopiśmie *Annals of Mathematics*. Liczą one łącznie 129 stron druku.

4. Przekątna kwadratu i wysokość trójkąta równobocznego

Twierdzenie 7. Przekątna AC kwadratu $ABCD$ o boku a ma długość $a\sqrt{2}$.



Rys. 8.138

Dowód. Trójkąt ABC jest prostokątny (rys. 8.138). Z twierdzenia Pitagorasa dostajemy

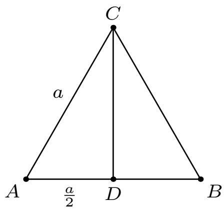
$$AC^2 = AB^2 + BC^2 = a^2 + a^2 = 2a^2,$$

czyli

$$AC = \sqrt{2a^2} = a\sqrt{2},$$

c. b. d. o.

Twierdzenie 8. Wysokość CD trójkąta równobocznego ABC o boku a ma długość $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.



Rys. 8.139

Dowód. Trójkąt ADC jest prostokątny (rys. 8.139). Z twierdzenia Pitagorasa dostajemy

$$CD^2 = AC^2 - AD^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{3a^2}{4},$$

czyli

$$AC = \sqrt{\frac{3a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{2},$$

c. b. d. o.

▲

Na tym kończę zamieszczony w tym poradniku fragment tekstu teoretycznego o twierdzeniu Pitagorasa, który daję uczniom. Pozostała część tekstu zawiera dowód wzoru Herona i jego zastosowanie do tzw. zagadnienia izoperymetrycznego dla trójkątów. Ten fragment tekstu traktuję wyłącznie informacyjnie i nie omawiam go na lekcji. Natomiast polecam uczniom przeczytanie go i najlepsi uczniowie zazwyczaj to robią. Cały tekst teoretyczny znajduje się we wspomnianym pliku pdf.

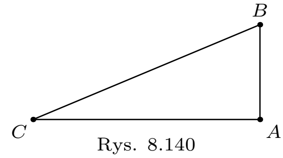
Zwracam uwagę uczniów na punkt 13 w dowodzie twierdzenia Pitagorasa i wyjaśniam, co to znaczy, że dowód jest analogiczny. Proszę ich przy tym, by ten analogiczny dowód napisali starannie w punktach. Zazwyczaj nie mają z tym większych problemów. Twierdzenia 3 i 4 to oczywiście twierdzenie cosinusów w postaci geometrycznej. Twierdzenia cosinusów w całej ogólności oczywiście w gimnazjum nie omawiam. Pokazane jego warianty geometryczne są wystarczające do rozwiązywania wielu zadań. Te twierdzenia, wraz z twierdzeniem odwrotnym do twierdzenia Pitagorasa, pozwalają rozpoznać, czy dany kąt trójkąta jest ostry, prosty czy rozwarty — gdy znane są długości trzech boków tego trójkąta. Teraz przechodzimy do rozwiązywania zadań z zestawu VII.

Zestaw VII — szkice rozwiązań.

61. Dwaj turyści wyruszają jednocześnie z tego samego miejsca. Jeden z nich idzie na północ z prędkością 5 kilometrów na godzinę, drugi jedzie na rowerze na zachód z prędkością 12 kilometrów na godzinę. Po jakim czasie odległość między nimi będzie wynosiła 39 kilometrów?

Uwaga. Na potrzeby tego zadania przyjmij, że Ziemia jest płaska.

Rozwiązanie. Turyści wyruszają z punktu A. Po czasie t (liczonym w godzinach) pierwszy turysta znajduje się w punkcie B, drugi w punkcie C (rys. 8.140). Wówczas $AB = 5t$, $AC = 12t$ oraz $BC = 39$. Korzystając z twierdzenia Pitagorasa układamy równanie



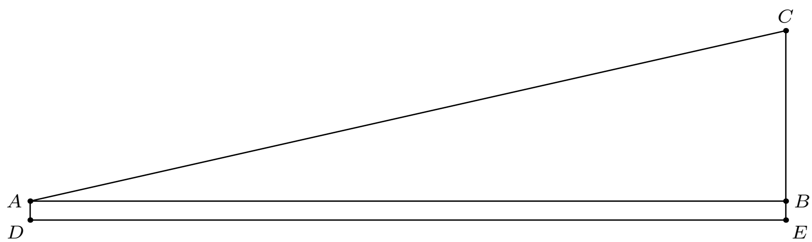
Rys. 8.140

$$(5t)^2 + (12t)^2 = 39^2.$$

Po wykonaniu obliczeń dostajemy równanie $169t^2 = 1521$, czyli $t^2 = 9$. Jedynym rozwiązaniem dodatnim tego równania jest $t = 3$.
Odpowiedź: Po 3 godzinach.

62. Jeden koniec linki od latawca, mającej 41 m długości, umocowano na wysokości 1 m do tyczki wbitej pionowo w ziemię. Latawiec znajduje się nad miejscem odległym od tyczki o 40 m. Na jakiej wysokości znajduje się latawiec? Przyjmij, że linka jest tak napięta, że stanowi odcinek linii prostej.

Rozwiązanie. Stosujemy twierdzenie Pitagorasa do trójkąta ABC (rys. 8.141).



Rys. 8.141

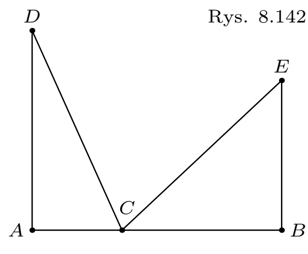
Wtedy $BC^2 = AC^2 - AB^2 = 41^2 - 40^2 = 1681 - 1600 = 81$. Zatem $BC = 9$, czyli $EC = 10$.
Odpowiedź: Latawiec znajduje się na wysokości 10 m nad ziemią.

63. Dwie wieże, jedna o wysokości 40 metrów i druga o wysokości 30 metrów, stoją w odległości 50 metrów od siebie. W jakiej odległości od wyższej wieży znajduje się (na powierzchni ziemi) punkt jednakowo oddalony od wierzchołków obu wież?

Rozwiązanie. Niech punkt C będzie jednakowo oddalony od wierzchołków wież AD i BE (rys. 8.142). Niech x oznacza odległość AC. Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkątów ACD i BCE otrzymujemy równanie

$$x^2 + 40^2 = (50 - x)^2 + 30^2.$$

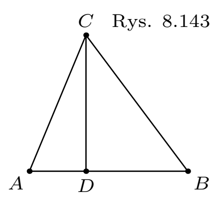
Po wykonaniu obliczeń otrzymujemy $x = 18$

Rys. 8.142


Odpowiedź: Szukany punkt znajduje się 18 m od podstawy wyższej wieży.

64. Dany jest trójkąt ABC, w którym $AB = 14$, $AC = 13$ oraz $BC = 15$. Oblicz długości wszystkich wysokości tego trójkąta.

Rozwiązanie. Najpierw obliczymy wysokość CD (rys. 8.143). Oznaczmy: $CD = h$ oraz $AD = x$. Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta ADC otrzymujemy $x^2 + h^2 = 13^2$. Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta BCD otrzymujemy następujące równanie:

Rys. 8.143


$$(14 - x)^2 + h^2 = 15^2,$$

czyli
$$14^2 - 28x + x^2 + h^2 = 15^2,$$

Po podstawieniu $x^2 + h^2 = 13^2$ otrzymujemy równanie
$$14^2 - 28x + 13^2 = 15^2,$$

którego rozwiązaniem jest $x = 5$. Teraz możemy obliczyć h; otrzymujemy
$$h^2 = 13^2 - x^2 = 169 - 25 = 144,$$

czyli $h = 12$. Pozostałe wysokości obliczamy ze wzoru na pole trójkąta. Otóż
$$P_{ABC} = \frac{AB \cdot CD}{2} = \frac{14 \cdot 12}{2} = 84.$$

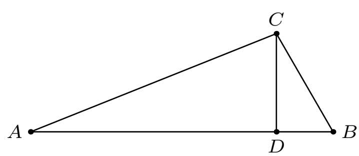
Zatem
$$\frac{BC \cdot h_A}{2} = 84,$$

czyli
$$h_A = \frac{2 \cdot 84}{15} = \frac{56}{5} = 11{,}2.$$

Podobnie
$$h_B = \frac{2 \cdot 84}{13} = \frac{168}{13} \approx 12{,}923.$$

65. W trójkącie ABC mamy dane: $AB = 16$, $BC = 6$ oraz $\measuredangle B = 60^\circ$. Oblicz długość boku AC.

Rozwiązanie. Poprowadźmy w trójkącie ABC wysokość CD. Wówczas $\measuredangle CDB = 90^\circ$ oraz $\measuredangle DCB = 30^\circ$ (rys. 8.144).



Rys. 8.144

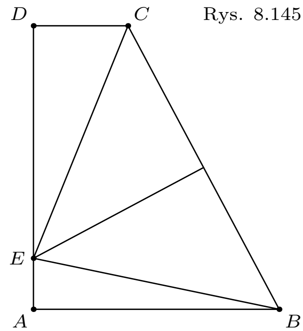
Z własności trójkąta BCD o kątach 30°, 60° i 90° wynika, że
$$BD = \frac{1}{2} \cdot BC = 3 \quad \text{oraz} \quad CD = DB \cdot \sqrt{3} = 3\sqrt{3}.$$

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta ADC otrzymujemy teraz
$$AC^2 = 13^2 + (3\sqrt{3})^2 = 169 + 27 = 196,$$

czyli $AC = 14$.

66. Podstawy AB i CD trapezu $ABCD$ mają odpowiednio długości 13 i 5. Ramię AD jest prostopadłe do podstaw i ma długość 15. Symetralna ramienia BC przecina ramię AD w punkcie E. Oblicz długość odcinka AE.

Rozwiązanie. Niech $AE = x$. Z własności symetralnej mamy $EB = EC$ (rys. 8.145). Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkątów ABE i EDC otrzymujemy



Rys. 8.145

$$\begin{aligned} 13^2 + x^2 = BE^2 = CE^2 &= (15 - x)^2 + 5^2, \\ x^2 + 169 &= 15^2 - 30x + x^2 + 25, \\ 30x &= 81, \\ x &= 2{,}7. \end{aligned}$$

Zatem $AE = 2{,}7$.

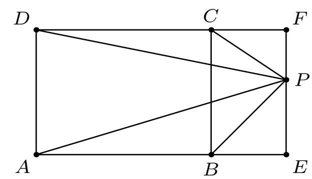
67. Dany jest prostokąt $ABCD$ i dowolny punkt P, położony na płaszczyźnie. Udowodnij, że $AP^2 + CP^2 = BP^2 + DP^2$.

Rozwiązanie. Rozpatrujemy jedno z wielu możliwych położeń punktu P na płaszczyźnie (rys. 8.146). Zbadanie pozostałych przypadków pozostawiam Czytelnikowi. Niech E i F będą rzutami punktu P na proste AB i CD: Z twierdzenia Pitagorasa otrzymujemy

$$AP^2 + CP^2 = AE^2 + EP^2 + CF^2 + FP^2$$

oraz

$$BP^2 + DP^2 = BE^2 + EP^2 + DF^2 + FP^2.$$



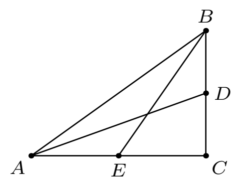
Rys. 8.146

Ponieważ $AE = DF$ i $BE = CF$, więc $AP^2 + CP^2 = BP^2 + DP^2$.

68. Dany jest trójkąt prostokątny ABC, w którym $\measuredangle C = 90°$. W tym trójkącie poprowadzono środkowe AD i BE. Udowodnij, że $4 \cdot (AD^2 + BE^2) = 5 \cdot AB^2$.

Rozwiązanie. Korzystamy z twierdzenia Pitagorasa dla trójkątów ACD i BCE. Mamy wówczas (rys. 8.147)

$$AD^2 = AC^2 + CD^2 = AC^2 + \left(\frac{1}{2} \cdot BC\right)^2 = AC^2 + \frac{1}{4} \cdot BC^2,$$



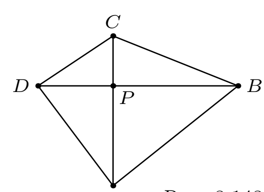
Rys. 8.147

czyli $4 \cdot AD^2 = 4 \cdot AC^2 + BC^2$. W podobny sposób dowodzimy, że $4 \cdot BE^2 = AC^2 + 4 \cdot BC^2$. Dodając stronami dwie ostatnie równości dostajemy:

$$4 \cdot (AD^2 + BE^2) = 5 \cdot (AC^2 + BC^2) = 5 \cdot AB^2.$$

69. Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$. Udowodnij, że przekątne AC i BD tego czworokąta są prostopadłe wtedy i tylko wtedy, gdy $AB^2 + CD^2 = AD^2 + BC^2$.

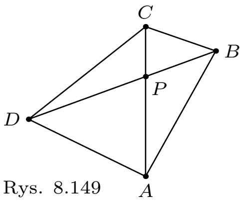
Rozwiązanie. Niech P będzie punktem przecięcia przekątnych czworokąta $ABCD$. Załóżmy najpierw, że przekątne czworokąta są prostopadłe (rys. 8.148). Mamy wówczas



Rys. 8.148

$$\begin{aligned} AB^2 + CD^2 &= AP^2 + BP^2 + CP^2 + DP^2 = \\ &= AP^2 + DP^2 + BP^2 + CP^2 = AD^2 + BC^2. \end{aligned}$$

Dowód w drugą stronę jest prowadzony metodą niewprost. Załóżmy, że



Rys. 8.149

$$AB^2 + CD^2 = AD^2 + BC^2$$

i przypuśćmy, że przekątne nie są prostopadłe. Załóżmy na przykład, że kąt BPC jest ostry (rys. 8.149). Wówczas kąt APD też jest ostry, natomiast kąty APB i CPD są rozwarte. Mamy zatem

$$AD^2 < AP^2 + DP^2 \quad \text{oraz} \quad BC^2 < BP^2 + CP^2.$$

Stąd wynika, że

$$AD^2 + BC^2 < AP^2 + BP^2 + CP^2 + DP^2.$$

Następnie $AB^2 > AP^2 + BP^2$ oraz $CD^2 > CP^2 + DP^2$; stąd wynika, że

$$AB^2 + CD^2 > AP^2 + BP^2 + CP^2 + DP^2.$$

Zatem $AB^2 + CD^2 > AD^2 + BC^2$, co przeczy założeniu.

70. Znajdź wszystkie takie liczby rzeczywiste x, by trójkąt o bokach następujących długości był prostokątny:
a) $a = x + 16$, $b = x + 18$, $c = x + 34$;
b) $a = x + 2$, $b = x + 3$, $c = x + 11$.

Rozwiązanie. Oczywiście bok c jest najdłuższym bokiem obu trójkątów. Z twierdzenia Pitagorasa mamy zatem $a^2 + b^2 = c^2$. W przypadku a) otrzymujemy równanie

$$\begin{gathered}(x+16)^2 + (x+18)^2 = (x+34)^2,\\ x^2 + 32x + 256 + x^2 + 36x + 324 = x^2 + 68x + 1156,\\ 2x^2 + 68x + 580 = x^2 + 68x + 1156,\\ x^2 = 576,\\ x = 24,\end{gathered}$$

gdyż $x > -16$. Zatem $a = 40$, $b = 42$ i $c = 58$. W przypadku b) otrzymujemy

$$\begin{gathered}(x+2)^2 + (x+3)^2 = (x+11)^2,\\ x^2 + 4x + 4 + x^2 + 6x + 9 = x^2 + 22x + 121,\\ 2x^2 + 10x + 13 = x^2 + 22x + 121,\\ x^2 - 12x = 108,\\ x^2 - 12x + 36 = 144,\\ (x-6)^2 = 144,\\ x - 6 = 12 \quad \text{lub} \quad x - 6 = -12,\\ x = 18 \quad \text{lub} \quad x = -6.\end{gathered}$$

Ponieważ $x > -2$, więc ostatecznie otrzymujemy $x = 18$ i $a = 20$, $b = 21$, $c = 29$.

W tym zestawie chcę zwrócić szczególną uwagę na zadania 64 i 65. Zadanie 64 pokazuje, że umiemy obliczyć wysokości trójkąta, gdy dane są jego boki. Zatem umiemy także obliczyć pole trójkąta. Przeprowadzenie żmudnych obliczeń prowadzi do tzw. wzoru Herona. Tych obliczeń z uczniami nie przeprowadzam, choć sam wzór podaję w tekście teoretycznym, który im daję. Zadanie 65 pokazuje, że umiemy obliczyć długość trzeciego boku trójkąta, gdy dane są dwa boki i kąt 60° między nimi. Proponuję uczniom wyprowadzenie wzoru ogólnego dla sytuacji, gdy dwa dane boki mają długości a i b. Następnie proponuję uczniom rozwiązanie analogicznego zadania dla kątów 30°, 45°, 120°, 135° i 150°. Jest to dobre ćwiczenie, które warto wykonać przed nauczeniem się twierdzenia cosinusów.

Po przerobieniu z uczniami zadań zestawu VII na ogół omawiam tzw. punkty szczególne trójkąta. Dobrym punktem wyjścia jest twierdzenie Carnota (daję komuś do zreferowania artykuł, który napisałem wspólnie z moim kolegą Waldemarem Pompe [Guzicki-Pompe-1] i który ukazał się w sprawozdaniu z II Olimpiady Matematycznej Gimnazjalistów). Twierdzenie to, pokazujące jeden przypadek współpękowości pewnych prostych, jest pretekstem, by porozmawiać z uczniami o sytuacjach, w których trzy różne proste przecinają się w jednym punkcie.

Innym artykułem, który daję uczniom do zreferowania, jest artykuł o długości odcinków w trójkącie [Guzicki-Pompe-1].

9. Papier w kratkę

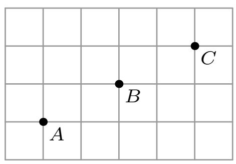
Zadania geometryczne na papierze w kratkę stanowią znakomitą ilustrację wielu ważnych pojęć geometrycznych oraz są doskonałym wstępem do nauki geometrii analitycznej. Te zadania rozwiązuję z uczniami jeszcze w I klasie, zanim na lekcji będę omawiał twierdzenie Pitagorasa. To bardzo ważne; wiele zadań znacznie się upraszcza, gdy możemy zastosować to twierdzenie. Cała zabawa z niektórymi zadaniami polega na tym, że dla uczniów, którzy twierdzenia Pitagorasa nie znają, są one zaskoczeniem. Zanim przystąpimy do rozwiązywania takich zadań, musimy wyjaśnić uczniom dokładnie, jakie są własności papieru w kratkę.

Na papierze w kratkę wszystkie linie pionowe są równoległe i odległości między sąsiednimi liniami są jednakowe. Podobnie wszystkie linie poziome są równoległe, odległości między sąsiednimi liniami są jednakowe i jednocześnie takie same jak między liniami pionowymi. Wreszcie każda linia pionowa jest prostopadła do każdej linii poziomej. Inaczej mówiąc, wszystkie kratki są kwadratami (o boku 5 mm). Punkty przecięcia linii nazywamy **punktami kratowymi**.

Ta własność papieru w kratkę pozwala łatwo mierzyć odległości między punktami położonymi na tej samej prostej pionowej lub poziomej. Jeśli punkty A i B leżą w odległości 15 kratek, to długość odcinka AB wynosi 7,5 cm. W dalszym ciągu przyjmiemy, że jednostką długości jest 1 kratka, czyli 5 mm.

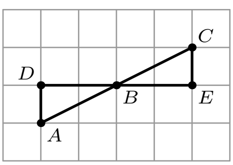
Pierwsze zadania mają wyjaśnić, kiedy punkty kratowe są współliniowe.

1. Udowodnij, że następujące punkty A, B i C są współliniowe (rys. 9.1):



Rys. 9.1

Rozwiązanie. Zauważmy najpierw, że trójkąty BDA i BEC są przystające: boki BD i BE mają po dwie kratki, boki DA i EC mają po jednej kratce, a kąty BDA i BEC są proste (rys. 9.2). Zatem $\measuredangle ABD = \measuredangle CBE$. Stąd wynika, że

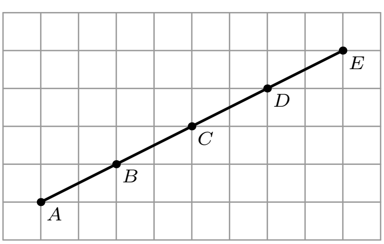


Rys. 9.2

$$\measuredangle ABC = \measuredangle ABD + \measuredangle DBC = \measuredangle DBC + \measuredangle CBE = \measuredangle DBE = 180°.$$

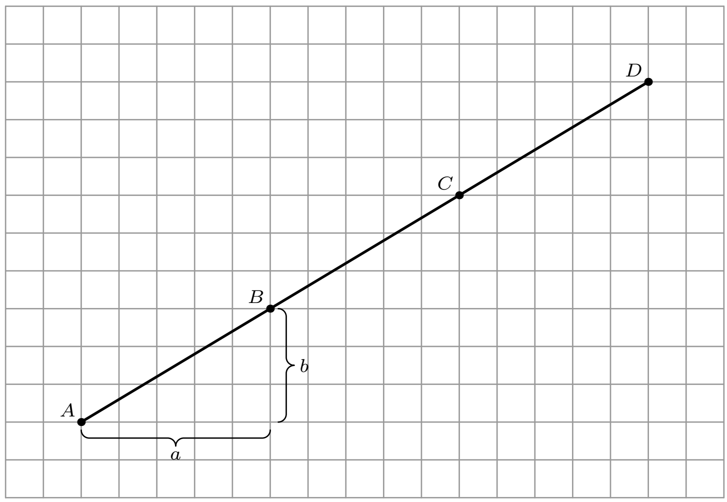
To kończy dowód.

Z tego zadania wynika, że kolejnymi punktami kratowymi na prostej AB są punkty C, D, E itd., powstające w ten sposób, że od każdego punktu idziemy dwie kratki w prawo, jedną kratkę do góry (lub dwie kratki w lewo i jedną w dół), i w ten sposób dochodzimy do następnego punktu (rys. 9.3). Ważne jest to, że zawsze idziemy tyle samo kratek w prawo (w powyższym zadaniu dwie kratki) i tyle samo kratek w górę (w tym zadaniu jedną kratkę). Nie ma natomiast znaczenia to, że w prawo idziemy akurat 2 kratki, a w górę akurat jedną kratkę.



Rys. 9.3

2. Udowodnij, że dla dowolnych liczb naturalnych a i b (na rysunku 9.4 mamy $a = 5$ i $b = 3$) punkty A, B, C i D są współliniowe.



Rys. 9.4

Kolejne punkty kratowe prostej AB otrzymujemy tu w podobny sposób: od każdego punktu kratowego na prostej AB idziemy a kratek w prawo i b kratek do góry (lub a kratek w lewo i b kratek w dół), dochodząc w ten sposób do innego punktu kratowego na tej samej prostej.

Oczywiście współliniowe będą też punkty powstające w ten sposób, że od danego punktu idziemy a kratek w prawo i b kratek w dół (lub a kratek w lewo i b kratek w górę). Powstaje pytanie, czy w ten sposób dojdziemy zawsze do następnego punktu kratowego na tej prostej.

Możemy łatwo przekonać się, że nie. Jeśli bowiem $a = 10$ i $b = 6$, to od punktu A doszlibyśmy do punktu C, a następnym po A punktem kratowym na prostej AC jest punkt B. Następne dwa zadania wyjaśniają tę kwestię do końca. Są to jednak zadania trudniejsze i nie wymagam, by uczniowie umieli je rozwiązać; wymagam natomiast, by zapamiętali ich treść.

3. Jeśli liczby a i b są **względnie pierwsze**, tzn. $\mathrm{NWD}(a, b) = 1$, to na odcinku AB nie ma innych punktów kratowych. Jeśli punkt kratowy C leży na prostej AB, to punkty kratowe na tej prostej, leżące najbliżej punktu C, otrzymamy przesuwając się od punktu C o a kratek w prawo i o b kratek do góry lub o a kratek w lewo i o b kratek w dół.

4. Załóżmy, że punkt D leży o m kratek na prawo i o n kratek do góry od punktu A. Załóżmy następnie, że $\mathrm{NWD}(m, n) = d$ oraz $a = \frac{m}{d}$ i $b = \frac{n}{d}$. Wtedy liczby a i b są względnie pierwsze, zaś punkt B położony o a kratek na prawo i o b kratek do góry od punktu A leży na prostej AD. Ponadto, wewnątrz odcinka AD leży $d - 1$ punktów kratowych (pierwszym z nich, licząc od A, jest punkt B).

Na poprzednim rysunku mamy $m = 15$ i $n = 9$. Wtedy $\mathrm{NWD}(m, n) = \mathrm{NWD}(15, 9) = 3$, więc $d = 3$. Stąd dostajemy

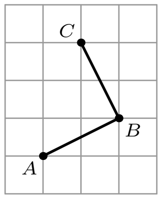
$$a = \frac{15}{3} = 5 \quad \text{i} \quad b = \frac{9}{3} = 3.$$

Na odcinku AD znajdują się 2 punkty kratowe: B i C.

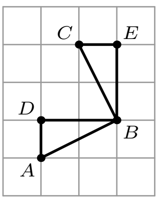
Oczywiście nie ma żadnego znaczenia to, czy od punktu A do B idziemy w prawo i do góry, czy w prawo i na dół.

Następne zadania wyjaśniają, kiedy proste przechodzące przez punkty kratowe są prostopadłe.

5. Udowodnij, że kąt ABC na rysunku 9.5 jest prosty.



Rys. 9.5



Rys. 9.6

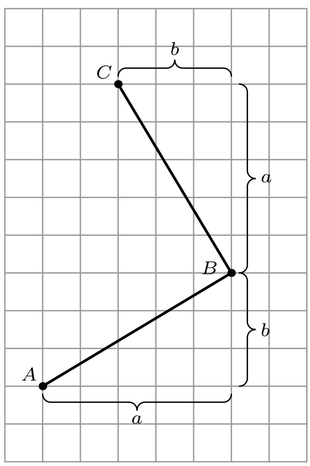
Rozwiązanie. Tak jak w zadaniu 1 dowodzimy, że trójkąty BDA i BEC są przystające (rys. 9.6). Mamy wówczas $\measuredangle ABD = \measuredangle CBE$. Stąd wynika, że

$$\measuredangle ABC = \measuredangle ABD + \measuredangle DBC = \measuredangle DBC + \measuredangle CBE = \measuredangle DBE = 90°.$$

To kończy dowód.

Podobne zadanie można udowodnić dla dowolnych liczb a i b.

6. Udowodnij, że kąt ABC na rysunku 9.7 jest prosty.



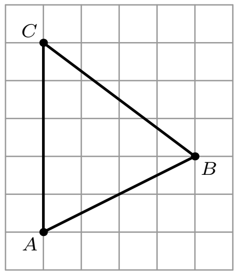
Rys. 9.7

Następne zadania dotyczą trójkątów równoramiennych.

7. Narysuj kilka trójkątów równoramiennych, których wierzchołki leżą w punktach kratowych.

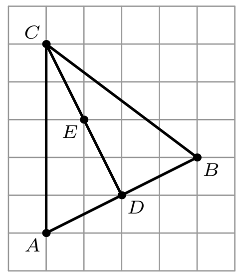
Trójkąty równoramienne narysowane przez uczniów mają zawsze podstawę poziomą lub pionową; uczniom wydaje się nieprawdopodobne, by trójkąty równoramienne mogły być położone inaczej. W szczególności, dla wielu uczniów zaskoczeniem jest to, że odcinek pionowy (lub poziomy) może mieć taką samą długość jak odcinek ukośny; pamiętajmy, że nie mamy tu do czynienia z dowolnymi odcinkami, ale z odcinkami o końcach w punktach kratowych. To bardzo poważne ograniczenie i uczniowie wyczuwają je intuicyjnie, dlatego nie spodziewają się, by odcinek ukośny mógł mieć długość równą całkowitej liczbie kratek.

8. Udowodnij, że trójkąt ABC na rysunku 9.8 jest równoramienny (ramionami są boki AC i BC):



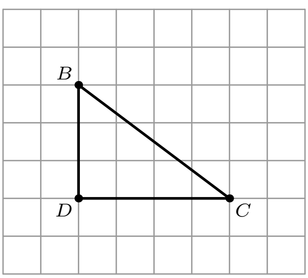
Rys. 9.8

Rozwiązanie. Zauważmy, że punkty A, D i B są współliniowe; podobnie punkty C, E i D są współliniowe (rys. 9.9). Ponadto kąt ADE jest prosty. Wynika z tego, że trójkąty ADC i BDC są przystające, a więc $AC = BC$.

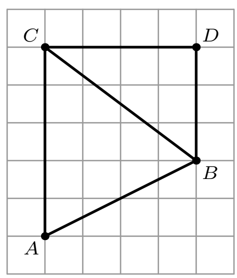


Rys. 9.9

Bok BC ma zatem długość 5 kratek. Stąd wynika, że trójkąt prostokątny BCD, w którym przyprostokątne mają długości $BD = 3$ i $CD = 4$, ma przeciwprostokątną BC długości 5 (rys. 9.10). Taki trójkąt można dostrzec także na poprzednich rysunkach, na przykład widzimy go na rysunku 9.11.



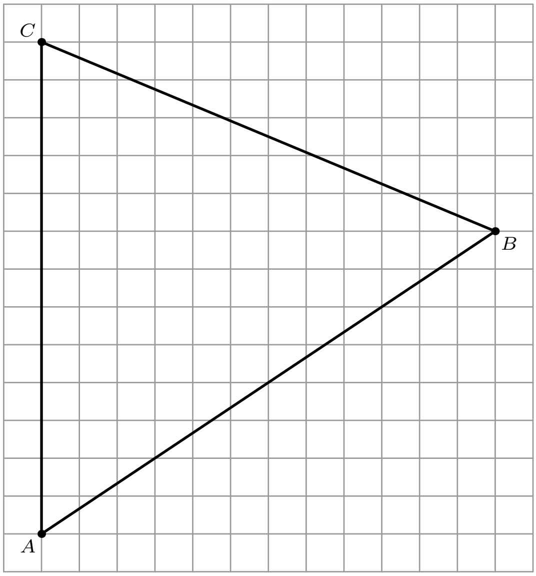
Rys. 9.10



Rys. 9.11

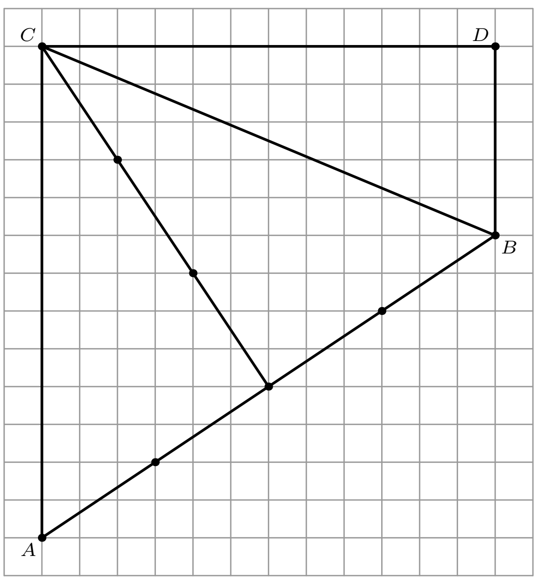
Zauważmy, że mamy tu czysto geometryczny dowód tego, że trójkąt prostokątny o przyprostokątnych długości 3 i 4 ma przeciwprostokątną długości 5. Dowód odwołujący się do twierdzenia Pitagorasa ma w istocie charakter obliczeniowy: możemy obliczyć, że $\sqrt{3^2 + 4^2} = 5$, a więc przeciwprostokątna ma długość 5. Jednak w powyższym dowodzie możemy to zobaczyć na rysunku, bez żadnych obliczeń. Inny przykład trójkąta prostokątnego, w którym długości wszystkich boków są liczbami naturalnymi, zobaczymy w następnym zadaniu.

9. Udowodnij, że trójkąt ABC na rysunku 9.12 jest równoramienny ($AC = BC$).



Rys. 9.12

Tym razem trójkąt prostokątny BCD ma przyprostokątne BD i CD długości odpowiednio 5 i 12 kratek oraz przeciwprostokątną BC długości 13 kratek (rys. 9.13).

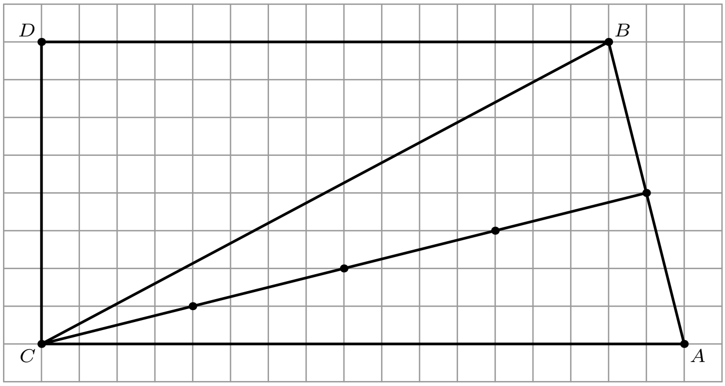


Rys. 9.13

Ostatnie dwa zadania pokazywały nam przykłady trójek pitagorejskich. Jest to dobry moment, by je uczniom zdefiniować — przypominam, że takie zadania robię z uczniami w I klasie, zanim udowodnię twierdzenie Pitagorasa. Jak pamiętamy, trójką pitagorejską nazywamy trójkę (a, b, c) liczb naturalnych o tej własności, że a i b są długościami przyprostokątnych trójkąta prostokątnego, a c jest długością przeciwprostokątnej tego samego trójkąta. Powyższe dwa zadania pokazały dwa przykłady trójek pitagorejskich:

$$(3, 4, 5) \quad \text{oraz} \quad (5, 12, 13).$$

Na rysunku 9.14 widzimy jeszcze jeden przykład trójki pitagorejskiej $(8, 15, 17)$:

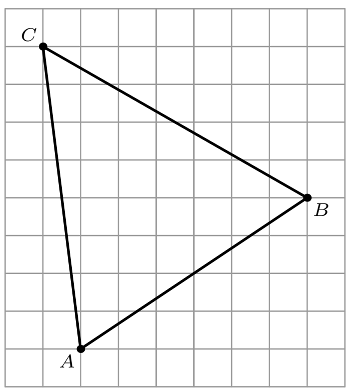


Rys. 9.14

Jako ćwiczenie polecam narysowanie odpowiedniego rysunku dla trójki $(7, 24, 25)$ (jest on na tyle duży, że z trudem zmieściłby się na tej stronie).

Trójkąty równoramienne o wierzchołkach w punktach kratowych mogą być położone jeszcze inaczej.

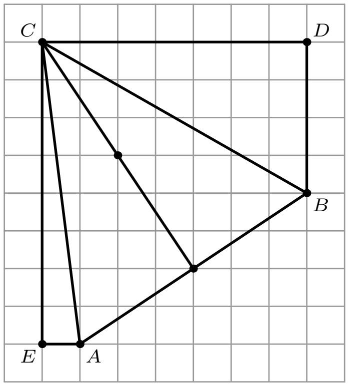
10. Udowodnij, że trójkąt ABC na rysunku 9.15 jest równoramienny ($AC = BC$).



Rys. 9.15

Z tego ostatniego zadania wynika, że dwa trójkąty prostokątne na rysunku 9.16 (trójkąt ACE o przyprostokątnych CE i AE długości 8 i 1 oraz trójkąt BCD o przyprostokątnych CD i BD długości 7 i 4) mają przeciwprostokątne tej samej długości. Z twierdzenia Pitagorasa rzeczywiście dostaniemy taki wniosek:

$$8^2 + 1^2 = 64 + 1 = 65 = 49 + 16 = 7^2 + 4^2.$$



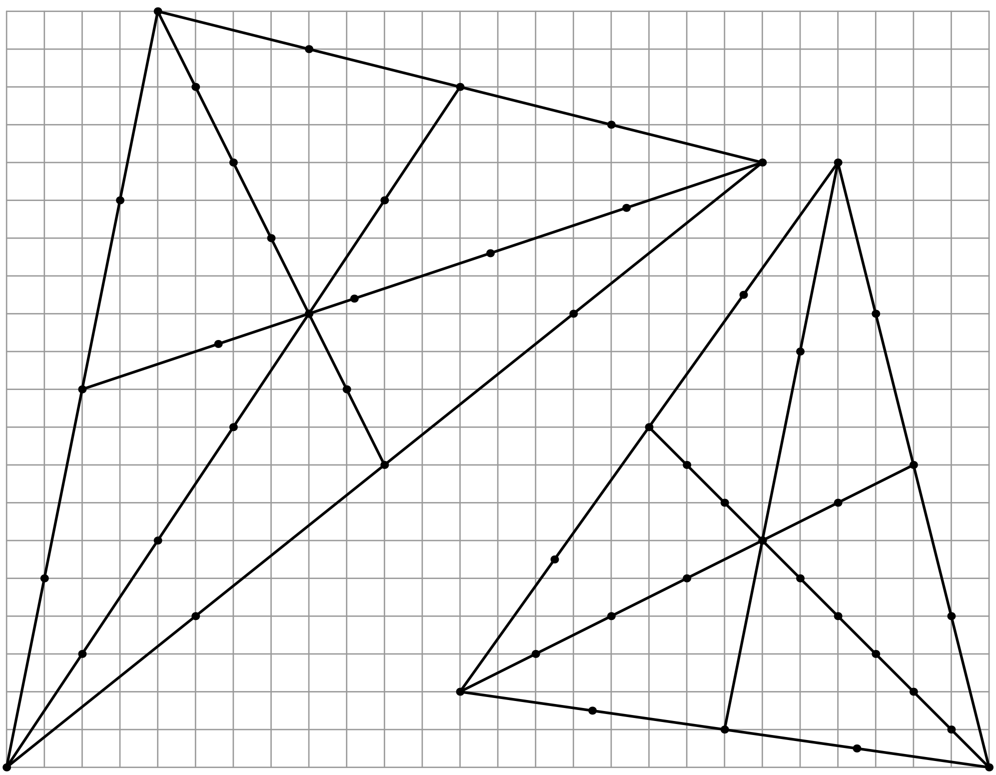
Rys. 9.16

To zadanie ilustruje ciekawą własność niektórych liczb naturalnych; mianowicie mają one dwa różne rozkłady na sumę dwóch kwadratów. Jak widzieliśmy wyżej, tę własność ma na przykład liczba 65. Oto kilka innych przykładów takich liczb:

$$50 = 7^2 + 1^2 = 5^2 + 5^2, \qquad 85 = 9^2 + 2^2 = 7^2 + 6^2, \qquad 125 = 11^2 + 2^2 = 10^2 + 5^2.$$

Proponuję jako ćwiczenie zrobienie odpowiednich rysunków na papierze w kratkę.

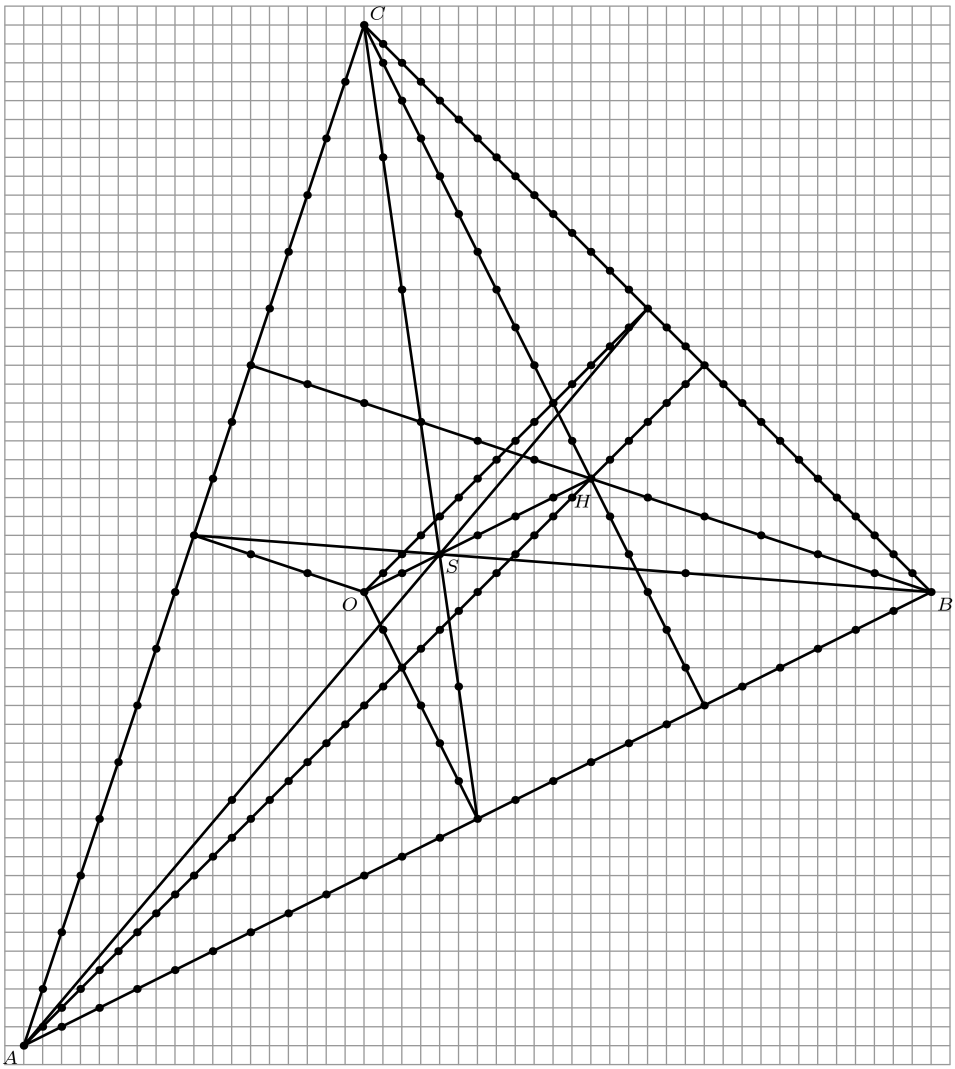
Papier w kratkę świetnie nadaje się do zilustrowania niektórych własności trójkątów. Popatrzmy na dwa trójkąty z narysowanymi środkowymi na rysunku 9.17.



Rys. 9.17

W każdym trójkącie zaznaczone są punkty kratowe, przez które przechodzą boki i środkowe. Widzimy wyraźnie, że trzy środkowe przecinają się w jednym punkcie (środku ciężkości) oraz że ten środek ciężkości dzieli każdą środkową w stosunku $2:1$. Zwracam uwagę na to, że te rysunki nie wymagają mierzenia odcinków oraz że nie musimy jakoś specjalnie uzasadniać, iż środkowe rzeczywiście przecinają się w jednym punkcie. Jest to po prostu widoczne na rysunku; mamy pewność, że odpowiednie odcinki przechodzą przez zaznaczone punkty kratowe.

Rysunek 9.18 ilustruje znane twierdzenie Eulera, mówiące, że środek okręgu opisanego, środek ciężkości i ortocentrum trójkąta leżą na jednej prostej (tzw. prostej Eulera):



Rys. 9.18

Punkt O jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC, punkt S jest środkiem ciężkości, a punkt H jest ortocentrum tego trójkąta. Widzimy, że te trzy punkty leżą na jednej prostej oraz że $HS : SO = 2 : 1$.

Zliczając kratki łatwo znajdujemy współrzędne punktów. Przyjmijmy, że punkt A leży w początku układu współrzędnych oraz że oś Ox jest położona poziomo. Mamy wtedy następujące współrzędne punktów:

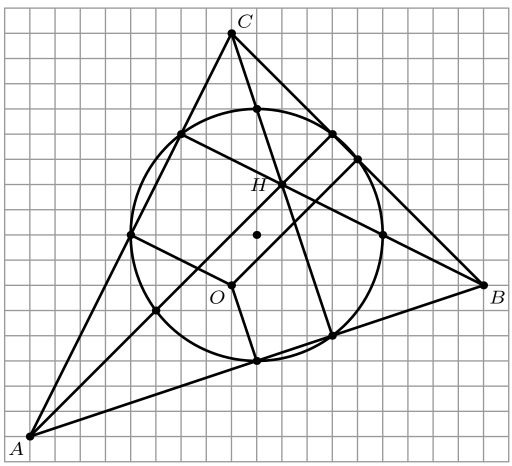
$$\begin{array}{lll} A = (0, 0), & B = (48, 24), & C = (18, 54), \\ O = (18, 24), & S = (22, 26), & H = (30, 30). \end{array}$$

Korzystając z ostatnich rysunków, możemy pokazać uczniom, że współrzędne środka ciężkości otrzymujemy obliczając średnie arytmetyczne współrzędnych trzech wierzchołków. Takie obserwacje nie stanowią oczywiście dowodu, ale mogą być dobrą podstawą do tego, by podać uczniom te własności trójkątów, zapewniając przy tym, że odpowiednie dowody można przeprowadzić.

Oczywiście podobne doświadczenia można przeprowadzić bez papieru w kratkę, wykonując starannie rysunki za pomocą cyrkla i linijki. Pamiętajmy jednak, że na papierze w kratkę rysuje się znacznie łatwiej i mamy pewność, że odpowiednie linie przecięły się w danym punkcie kratowym. Dlatego taki rysunek jak ostatni uczniowie mogą przygotować sami, rysując linie nawet od ręki, bez przyrządów. Inny rysunek ilustrujący twierdzenie Eulera otrzymamy wybierając $A = (0, 0)$, $B = (30, 0)$ oraz $C = (12, 36)$. Wówczas $O = (15, 15)$, $S = (14, 12)$ oraz $H = (12, 6)$.

Wreszcie rysunek 9.19 ilustruje twierdzenie o tzw. okręgu dziewięciu punktów. Rysujemy trójkąt ABC, w którym $A = (0, 0)$, $B = (18, 6)$ oraz $C = (8, 16)$. W tym trójkącie znajdujemy środek okręgu opisanego i ortocentrum. Wówczas następujące punkty leżą na jednym okręgu (którego środkiem jest środek odcinka OH):

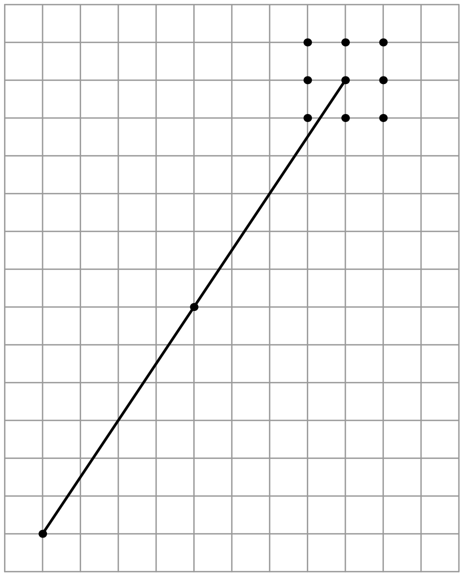
- spodki wysokości trójkąta ABC;
- środki boków trójkąta ABC;
- środki odcinków łączących ortocentrum z wierzchołkami trójkąta ABC.



Rys. 9.19

Nietrudno zauważyć, że te punkty na rysunku 9.19 leżą na okręgu o promieniu równym 5 kratkom (przypominam tu o trójkącie prostokątnym o bokach 3, 4 i 5 kratek).

Dobrym wprowadzeniem do wektorów są następujące wyścigi samochodowe. Mamy tor wyścigowy z zaznaczoną linią startu i mety: na niej zaznaczone są trzy punkty. Wyścig rozpoczyna się w dowolnym z tych trzech punktów. Zawodnik wykonuje pierwszy ruch do jednego z sąsiednich punktów kratowych. Reguła wykonywania następnych ruchów jest następująca; przypuśćmy, że w poprzednim ruchu pojechaliśmy z punktu A do punktu B. Przedłużamy poprzedni ruch AB, zaznaczamy otrzymany koniec odcinka (punkt C) i możemy poruszyć się do zaznaczonego punktu lub do jednego z ośmiu sąsiadujących z nim punktów kratowych (rys. 9.20).



Rys. 9.20

W języku wektorów: jeśli $\overrightarrow{AB} = [a, b]$, to następny ruch jest jednym z następujących 9 wektorów $[a + i, b + j]$, gdzie $i, j \in \{-1, 0, 1\}$. Inaczej mówiąc, następny ruch jest jednym z 9 wektorów:

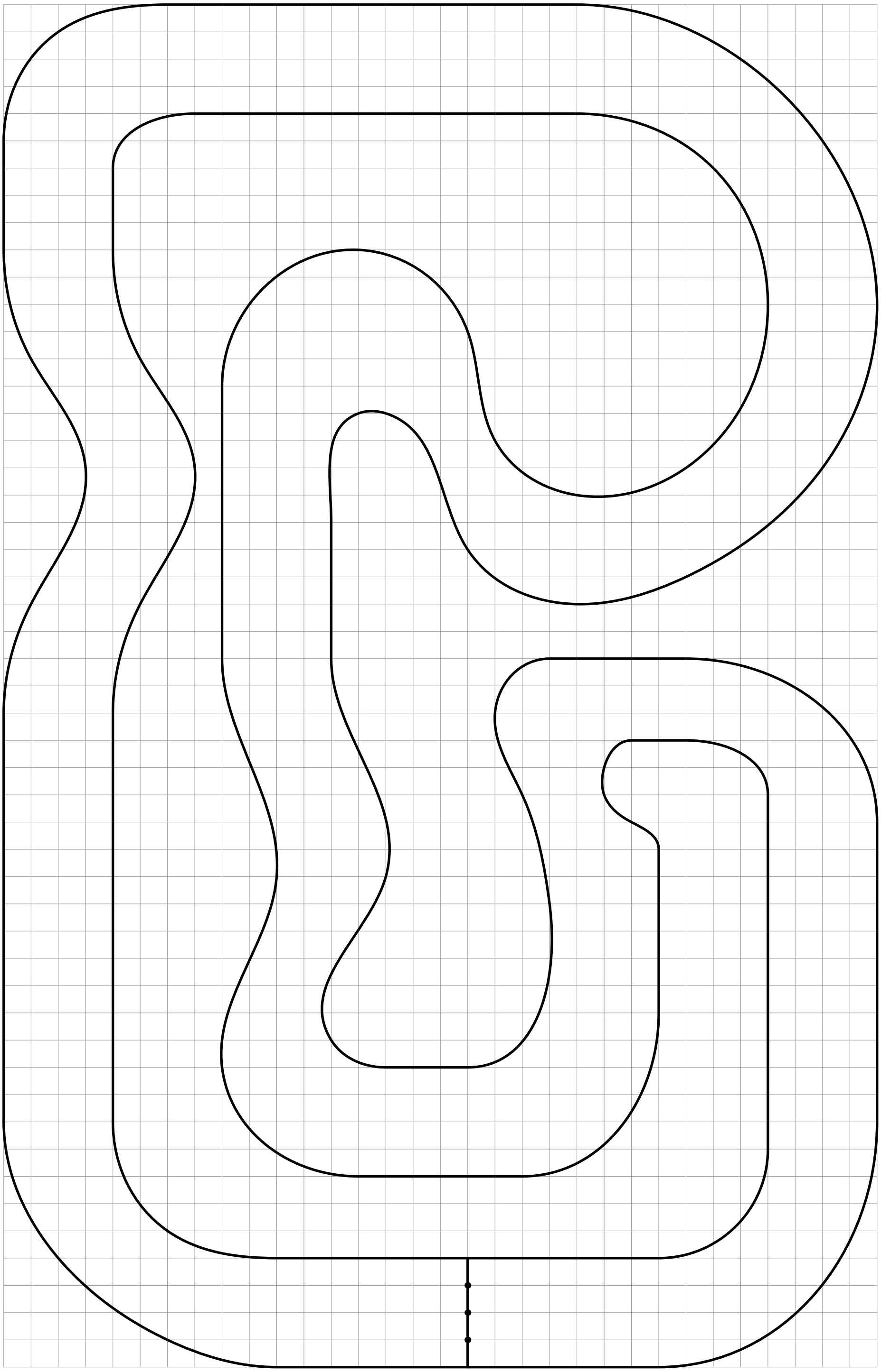
$$\begin{array}{ccc} [a-1, b-1], & [a-1, b], & [a-1, b+1], \\ [a, b-1], & [a, b], & [a, b+1], \\ [a+1, b-1], & [a+1, b], & [a+1, b+1]. \end{array}$$

Wyścig kończy się na trasie startu; samochód musi zatrzymać się na tej linii (tzn. następny ruch zgodny z regułami może być ruchem w miejscu, czyli wektorem zerowym). Oczywiście, jeśli zawodnik wypadnie z trasy, to przegrywa. Teraz każdy zawodnik wykonuje swoje ruchy na torze niezależnie od innych zawodników; wygrywa ten, kto przejedzie trasę w najmniejszej liczbie ruchów.

Zauważmy, że reguła ruchów powoduje, że samochodu bardzo mocno rozpędzonego nie da się szybko zatrzymać. Nie da się także gwałtownie zmienić kierunku jazdy. Przed każdym zakrętem należy odpowiednio wcześnie zacząć wytracać prędkość, by nie wypaść z trasy. Po przejechaniu trasy każdy zawodnik musi zapisać wszystkie swoje ruchy za pomocą współrzędnych wektorów. Pokazuję również zawodnikom przykładowe ruchy, informując ich, że nie jest to trasa optymalna i zachęcając do uzyskania lepszego wyniku.

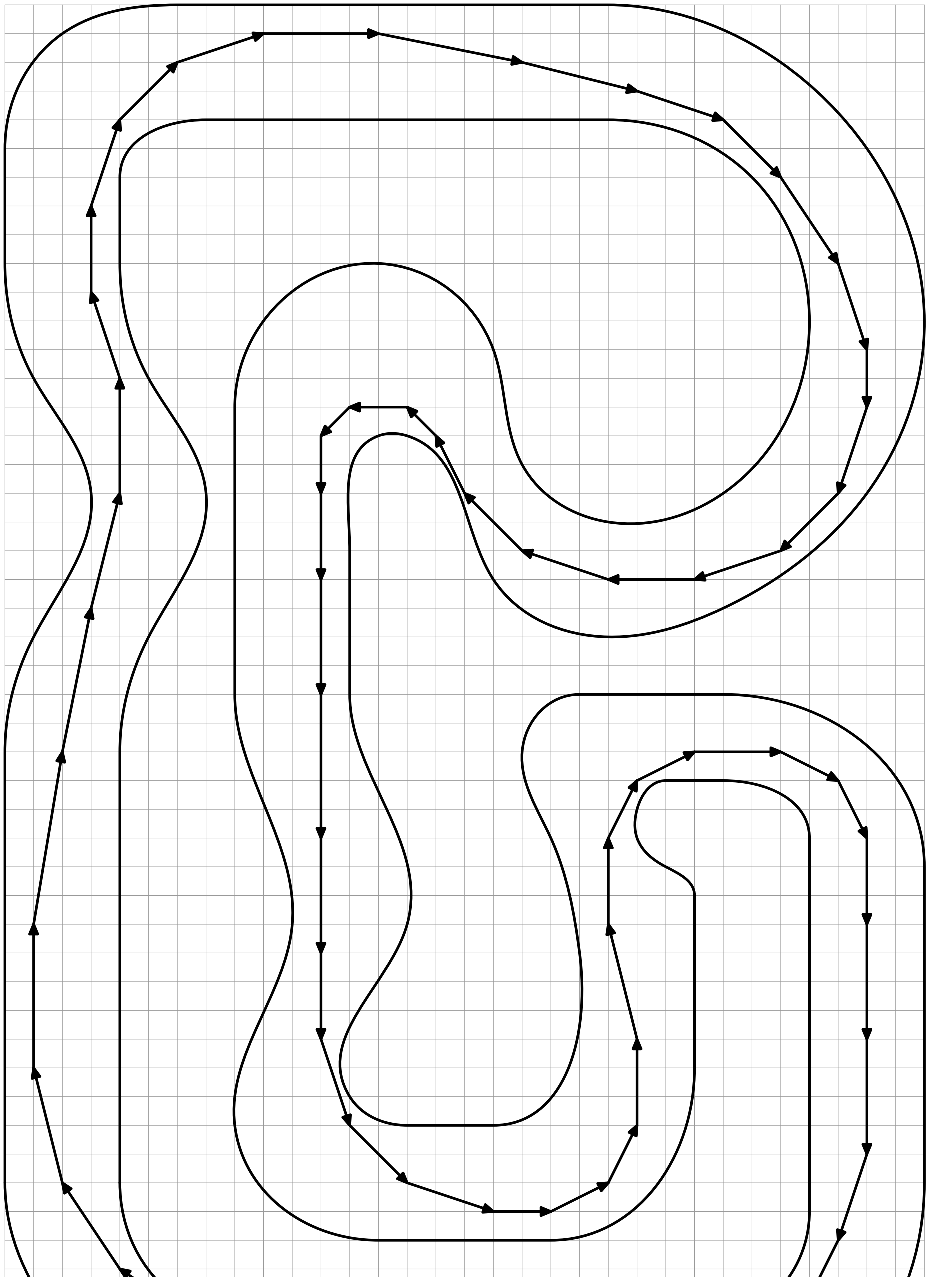
Zapis ruchu za pomocą wektorów jest bardzo naturalny: pokazuje, o ile kratek w prawo (lub w lewo w zależności od znaku) oraz do góry (lub w dół) przemieści się samochód.

A oto trasa wyścigu (rys. 9.21).



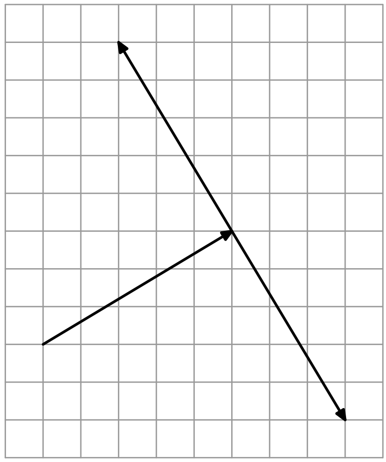
Rys. 9.21

Na rysunku 9.22 widzimy przykładową drogę samochodu.



Rys. 9.22

Po wprowadzeniu wektorów można zadać uczniom pytanie o współrzędne wektora prostopadłego do danego wektora. Istnieją dwa wektory prostopadłe tej samej długości. Na przykład, dla wektora $[5, 3]$ będą to wektory $[-3, 5]$ oraz $[3, -5]$ (rys. 9.23).



Rys. 9.23

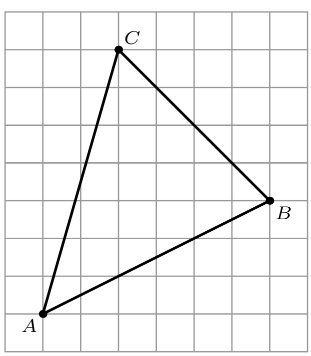
Ogólnie, dla wektora $[a, b]$ mamy dwa wektory prostopadłe tej samej długości:

$$[-b, a] \quad \text{oraz} \quad [b, -a].$$

Wektor $[-b, a]$ otrzymujemy z wektora $[a, b]$ przez obrót o kąt 90° w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara, zaś wektor $[b, -a]$ otrzymujemy przez obrót w kierunku zgodnym z ruchem wskazówek zegara.

Następne zadania dotyczą obliczania pól trójkątów o wierzchołkach w punktach kratowych. Umiemy łatwo obliczyć pole prostokąta, którego boki zawierają się w prostych tworzących kratki. Umiemy również obliczyć pole trójkąta prostokątnego, którego przyprostokątne zawierają się w prostych tworzących kratki. Trochę ogólniej: umiemy łatwo obliczyć pole trójkąta, którego jeden bok zawiera się w prostej poziomej lub pionowej. Nietrudne jest też obliczenie pola trapezu, którego podstawy zawierają się w dwóch prostych poziomych lub dwóch prostych pionowych. Obliczenie pola dowolnego trójkąta o wierzchołkach w punktach kratowych można sprowadzić do obliczenia pól takich figur.

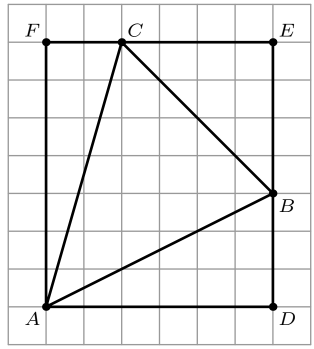
11. Oblicz pole trójkąta ABC na rysunku 9.24 (jednostką pola jest 1 kratka).



Rys. 9.24

Rozwiązanie. Od pola prostokąta $ADEF$ odejmujemy pola trójkątów ADB, BEC i CFA (rys. 9.25). Mamy zatem:

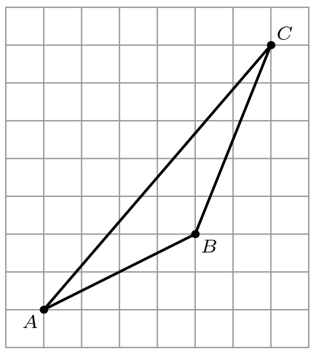
$$\begin{aligned} P_{ADEF} &= 6 \cdot 7 = 42, \\ P_{ADB} &= \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 3 = 9, \\ P_{BEC} &= \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 = 8, \\ P_{CFA} &= \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 7 = 7, \\ P_{ABC} &= P_{ADEF} - P_{ADB} - P_{BEC} - P_{CFA} = \\ &= 42 - 9 - 8 - 7 = 18. \end{aligned}$$



Rys. 9.25

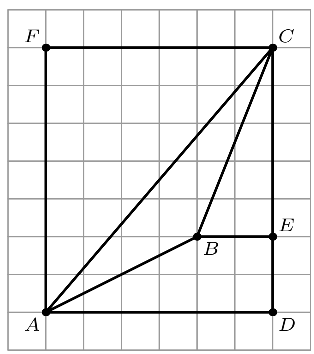
Nieco trudniej rozwiązuje się następne zadanie:

12. Oblicz pole trójkąta ABC na rysunku 9.26.



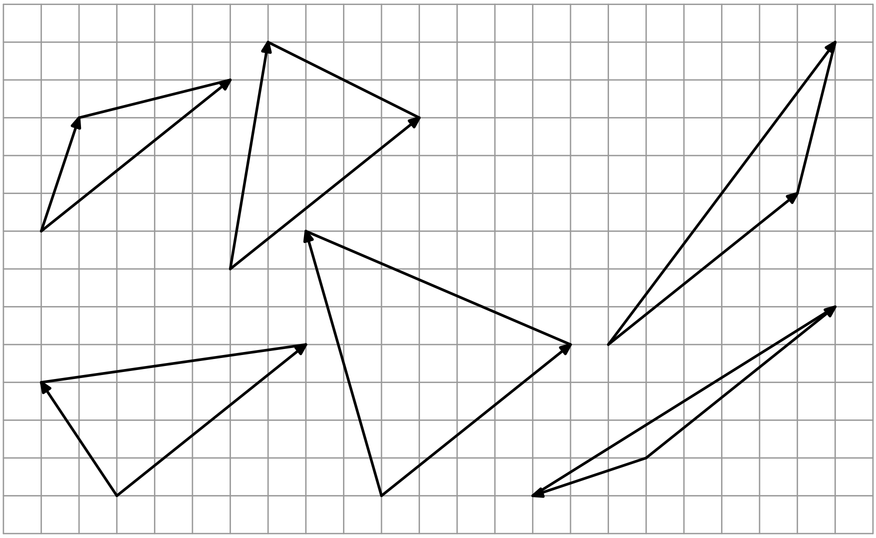
Rys. 9.26

Rozwiązanie. Tym razem od pola prostokąta $ADCF$ odejmujemy: pole trapezu $ADEB$, pole trójkąta BEC i pole trójkąta CFA (rys. 9.27). Szczegóły obliczeń pozostawię jako ćwiczenie.



Rys. 9.27

Następujące rysunki pokazują, w jaki sposób możemy wyprowadzić wzór ogólny na pole trójkąta o wierzchołkach w punktach kratowych. Przypuśćmy, że dwa boki trójkąta powstały z wektorów o współrzędnych $[a, b]$ i $[c, d]$, zaczepionych w jednym punkcie, przy czym półprosta zawierająca wektor $[c, d]$ powstaje z półprostej zawierającej wektor $[a, b]$ przez obrót o kąt wypukły zgodnie z ruchem wskazówek zegara. Nasz trójkąt możemy obrócić tak, by obie współrzędne wektora $[a, b]$ były dodatnie. Mamy wtedy sześć możliwych położeń wektora $[c, d]$. We wszystkich przypadkach na rysunku 9.28 mamy $[a, b] = [5, 4]$:



Rys. 9.28

Nietrudno wtedy obliczyć z uczniami (różne grupy uczniów dostają do obliczenia inne przypadki), że w każdym przypadku pole trójkąta wyraża się wzorem:

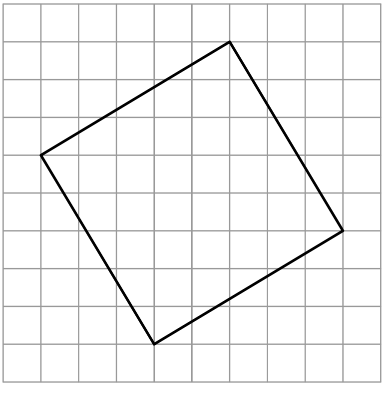
$$P = \frac{1}{2} \cdot (ad - bc).$$

Jeśli zamienimy wektory miejscami, to we wzorze na pole zmieni się znak. Ogólnie zatem wzór ma postać:

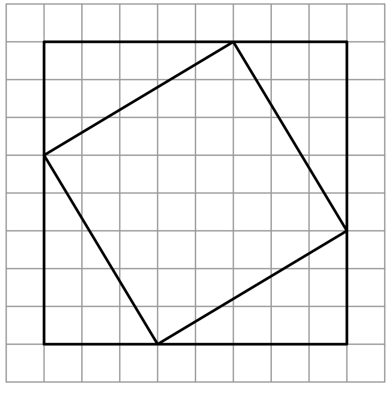
$$P = \frac{1}{2} \cdot |ad - bc|.$$

Oczywiście znów można powiedzieć, że obliczenie pola trójkąta nie ma nic wspólnego z papierem w kratkę i może być przeprowadzone całkiem ogólnie. To prawda, ale na papierze w kratkę to rozumowanie narzuca się samo i jest znacznie łatwiejsze do zauważenia. Jednak oczywiście wzór jest ten sam dla dowolnych wektorów, nie tylko o współrzędnych całkowitych.

W podobny sposób obliczamy pole kwadratu. Dowolny kwadrat o wierzchołkach w punktach kratowych albo ma boki zawarte w prostych tworzących kratki, albo wygląda tak jak na rysunku 9.29.



Rys. 9.29



Rys. 9.30

Obliczmy pole tego kwadratu. Od pola kwadratu o boku 8 odejmujemy pola czterech jednakowych trójkątów prostokątnych (rys. 9.30). Mamy zatem

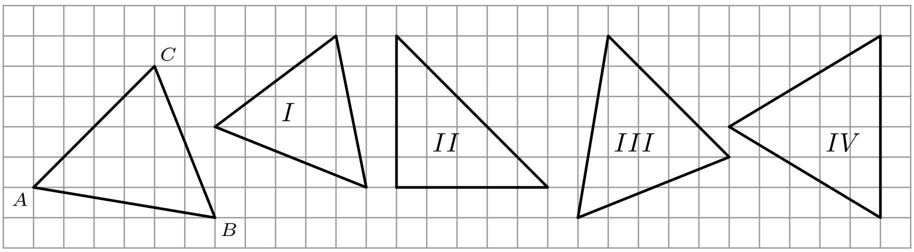
$$P = 8 \cdot 8 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 3 = 64 - 30 = 34.$$

Zauważmy, że jeśli zamiast wektora $[5, 3]$, z którego został utworzony powyższy kwadrat, weźmiemy dowolny wektor $[a, b]$, to pole będzie równe

$$(a+b)^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot b = (a+b)^2 - 2ab = a^2 + b^2.$$

To dowodzi, że długość przeciwprostokątnej trójkąta prostokątnego o bokach a i b wynosi $\sqrt{a^2+b^2}$. Oczywiście rozumowanie jest znów całkowicie ogólne; z papieru w kratkę pochodzi tylko motywacja.

Na zakończenie przytoczę zadanie z jednego z podręczników szkolnych. Który z narysowanych trójkątów jest przystający do trójkąta ABC na rysunku 9.31?

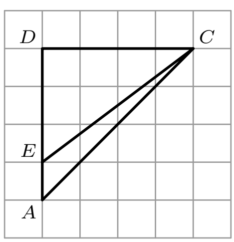


Rys. 9.31

Odpowiedź, że jest to trójkąt III, nie zadowala mnie. Oczywiście nietrudno wykazać, że trójkąt III jest przystający do trójkąta ABC (otaczamy oba prostokątami i wykazujemy, że trzy trójkąty otaczające trójkąt ABC są przystające do trójkątów otaczających trójkąt III). Ale czy jest to jedyne rozwiązanie? A może jeszcze któryś trójkąt jest przystający do trójkąta ABC? Zadanie znajduje się w podręczniku do I klasy; twierdzenie Pitagorasa jest dopiero w podręczniku do II klasy. Próbujmy więc nie korzystać z tego twierdzenia.

Jedna metoda polega na obliczeniu pól wszystkich trójkątów (wprawdzie rozdział o polach wielokątów jest za tym zadaniem, ale to nie szkodzi...). Okazuje się, że tylko trójkąt III ma takie pole jak trójkąt ABC. A czy można poradzić sobie bez obliczania pól? Okazuje się, że tak i jest to bardzo interesujące ćwiczenie dla uczniów.

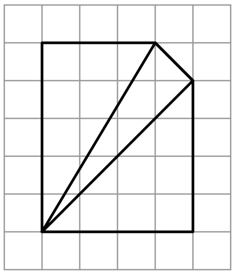
Trójkąty I i II mają boki długości 5 (w przypadku trójkąta I przypominam o trójce pitagorejskiej $(3, 4, 5)$). Okazuje się, że trójkąt ABC nie ma boku długości 5. Bok AB ma długość większą od 6, bok BC ma długość większą od 5; to wynika z tego, że przeciwprostokątna jest dłuższa od przyprostokątnej. Natomiast kwestię boku AC wyjaśnia rysunek 9.32.



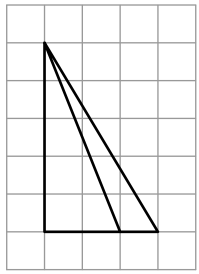
Rys. 9.32

Odcinek EC ma długość 5, odcinek AC jest od niego dłuższy.

Nieco inny dowód mamy w przypadku trójkąta IV. Jest to trójkąt równoramienny; ma dwa boki równe przeciwprostokątnej trójkąta prostokątnego o przyprostokątnych długości 5 i 3. Trójkąt ABC ma natomiast dwa boki krótsze od takiej prrzeciwprostokątnej. Proponuję dostrzec to na rysunkach 9.33 i 9.34 (na rysunku 9.33 trzeba zauważyć trzy trójkąty prostokątne!):



Rys. 9.33



Rys. 9.34

Trójkąt ABC nie może zatem mieć dwóch boków równych ramionom trójkąta równoramiennego IV.

10. Geometria okręgu

W drugiej klasie zaczynam uczyć geometrii okręgu. Zadania wykorzystujące własności okręgów będą rozwiązywane przez całą II klasę oraz w klasie III w czasie przygotowań do OMG. Korzystam z kilku zestawów zadań, będących kontynuacją zestawów I – VII z I klasy oraz z wielu zadań znajdujących się w dostępnych zbiorach zadań. Przede wszystkim chcę tu wymienić zbiory zadań olimpijskich, zarówno z Olimpiady Matematycznej, jak i z OMG.

W nowej podstawie programowej do gimnazjum, geometria okręgu jest bardzo okrojona. Pozostało tylko kilka ważnych tematów: wzajemne położenie prostej i okręgu, własności stycznej do okręgu, kąt środkowy, okrąg wpisany w trójkąt i opisany na trójkącie (wraz z konstrukcjami), długość okręgu i łuku oraz pole koła i wycinka kołowego. W moim rozszerzonym programie uczę znacznie więcej, ponieważ trudno sobie wyobrazić poważną naukę geometrii okręgu na przykład bez twierdzenia o kącie wpisanym i środkowym czy bez pojęcia okręgów stycznych.

Zanim omówię kolejne tematy geometrii okręgu w moim programie, wyjaśnię jedną bardzo ważną rzecz. W drugiej klasie nie rozdaję uczniom dodatkowych materiałów teoretycznych. Uczniowie muszą opierać się jedynie na wyjaśnieniach nauczyciela. Jest to zabieg celowy. Chodzi o to, żeby nauczyć uczniów korzystania z wykładów, prowadzenia dobrych notatek i uczenia się z nich. Oczywiście zmusza to nauczyciela nawet do kilkakrotnego powtórzenia treści, ponieważ uczniowie nie potrafią od razu zanotować wszystkiego, co jest ważne, ponadto zdarzają się nieobecności i inne powody, dla których materiał nie został nauczony i zapamiętany. Bardzo często uczniowie, którzy nie nadążają z robieniem rysunków, fotografują te wykonane na tablicy. Okazuje się, że uczniowie jednak umieją to, co najważniejsze.

Jest jeszcze kolejna nowość. Jeden temat całkowicie pomijam na lekcjach i niczego nie wyjaśniam. Każę uczniom samodzielnie nauczyć się tego z podręcznika oraz rozwiązać zadania. Następnie robię z tego klasówkę. Tematem, który w tym celu wybieram, jest długość okręgu i pole koła (oraz długość łuku i pole wycinka). Jest to łatwy temat do samodzielnego opracowania, ponieważ nie wymaga żadnych wyjaśnień teoretycznych. I tak w szkole nie można udowodnić ściśle wzoru na pole koła, co najwyżej w podręczniku znajują się rysunki mające przekazać pewne intuicje. Nie mają one jednak żadnego znaczenia dla tego, co będzie dalej. To, co jest w podręczniku ważne, to zaledwie kilka typów zadań opierających się na czterech wzorach (długość okręgu, pole koła, długość łuku i pole wycinka). Na ogół uczniowie dość łatwo opanowują te wzory i klasówka wypada nieźle. Po omówieniu pracy klasowej (tu po raz pierwszy pojawiają się wyjaśnienia nauczyciela), następuje jej poprawa, która daje już bardzo dobre rezultaty.

Powróćmy do geometrii. Naukę geometrii okręgu zaczynam od podstawowych jego własności. Uczniowie ze szkoły podstawowej wiedzą, co to jest okrąg, jego promień i średnica. Przypominam również, co to jest cięciwa i łuk. Zwracam uwagę, że środek okręgu jest jednakowo oddalony od końców cięciwy, a więc leży na symetralnej cięciwy. Odcinek łączący środek cięciwy ze środkiem okręgu jest zatem prostopadły do cięciwy. Będzie to powodowało, że w wielu zadaniach korzystamy z twierdzenia Pitagorasa. Omawiam wzajemne położenie prostej i okręgu, definiuję styczną do okręgu i podaję jej podstawową własność, że jest ona prostopadła do promienia. Następnie omawiam wzajemne położenie dwóch okręgów i definiuję okręgi styczne (wewnętrznie i zewnętrznie). Podaję uczniom twierdzenie, że punkt styczności jest współliniowy z obydwoma środkami. Wreszcie wyjaśniam, co to znaczy, że punkt leży wewnątrz lub na zewnątrz okręgu (punkty leżące wewnątrz okręgu i na nim tworzą koło). Podaję uczniom twierdzenie o tym, że koło jest figurą wypukłą. Na ogół te podstawowe własności okręgów podaję uczniom bez dowodu. Następnie przechodzę do pierwszej serii zadań dotyczących okręgów, które pokazują zastosowania twierdzenia Pitagorasa w geometrii okręgu.

Zestaw VIII

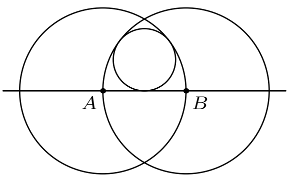
71. W okręgu poprowadzono dwie równe cięciwy. Udowodnij, że środek okręgu jest jednakowo oddalony od obu tych cięciw.

72. W okręgu poprowadzono dwie cięciwy różnych długości. Udowodnij, że środek okręgu leży bliżej dłuższej cięciwy.

73. Dane są dwa okręgi współśrodkowe i prosta przecinająca każdy z nich w dwóch punktach. Udowodnij, że odcinki tej prostej zawarte między okręgami są równe.

74. Dany jest okrąg o środku O i promieniu r. Cięciwę AB tego okręgu przedłużono poza punkt B do punktu C tak, że $BC = r$. Półprosta CO przecina okrąg w dwóch punktach D i E; punkt D leży na zewnątrz odcinka CO, a punkt E wewnątrz tego odcinka. Udowodnij, że $\angle AOD = 3 \cdot \angle ACD$.

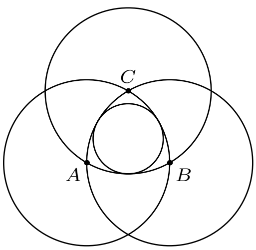
75.



Rys. 10.1

Dany jest odcinek AB o długości 2. Punkty A i B są środkami okręgów o promieniu 2. Udowodnij, że okrąg styczny do prostej AB oraz styczny wewnętrznie do obu okręgów o środkach A i B (rys. 10.1), ma promień równy $\frac{3}{4}$.

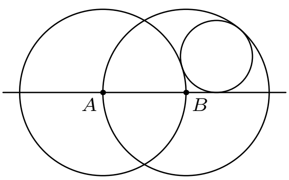
76.



Rys. 10.2

Dany jest trójkąt równoboczny ABC o boku długości 2. Punkty A, B i C są środkami okręgów o promieniu 2. Udowodnij, że okrąg zawarty wewnątrz tych trzech okręgów oraz styczny wewnętrznie do każdego z nich (rys. 10.2), ma promień równy $\frac{2}{3}(3 - \sqrt{3})$.

77.



Rys. 10.3

Dany jest odcinek AB o długości równej 2. Punkty A i B są środkami okręgów o promieniu 2. Udowodnij, że okrąg styczny do prostej AB, styczny zewnętrznie do okręgu o środku A oraz styczny wewnętrznie do okręgu o środku B (rys. 10.3), ma promień równy $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

78. Wierzchołki czworokąta $ABCD$ o bokach długości a, b, c i d leżą na okręgu o promieniu r. Przekątna AC jest średnicą okręgu, a kąty ABC i ADC czworokąta są proste. Udowodnij, że $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 8r^2$.

79. W okręgu o środku O i promieniu r poprowadzono dwie prostopadłe cięciwy o długościach $2a$ i $2b$ przecinające się w punkcie P. Udowodnij, że $OP^2 + a^2 + b^2 = 2r^2$.

80. Wierzchołki czworokąta $ABCD$ o bokach długości a, b, c i d leżą na okręgu o promieniu r. Przekątne tego czworokąta są prostopadłe. Udowodnij, że

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 8r^2.$$

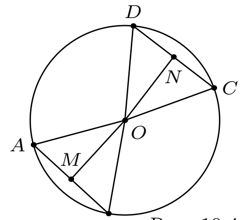
Zestaw VIII — szkice rozwiązań.

71. W okręgu poprowadzono dwie równe cięciwy. Udowodnij, że środek okręgu jest jednakowo oddalony od obu tych cięciw.

Rozwiązanie. Niech punkty M i N będą odpowiednio środkami cięciw AB i CD (rys. 10.4). Ponieważ środek okręgu leży na symetralnych cięciw AB i AC, więc trójkąty AMO i CNO są prostokątne. Mamy zatem

$$OM^2 = OA^2 - AM^2 = OC^2 - CN^2 = ON^2,$$

skąd wynika, że $OM = ON$.



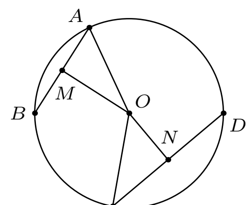
Rys. 10.4

72. W okręgu poprowadzono dwie cięciwy różnych długości. Udowodnij, że środek okręgu leży bliżej dłuższej cięciwy.

Rozwiązanie. Niech $AB < CD$. Tak jak w poprzednim zadaniu trójkąty AMO i CNO są prostokątne (rys. 10.5). Ponieważ $AM < CN$, więc

$$OM^2 = OA^2 - AM^2 > OC^2 - CN^2 = ON^2,$$

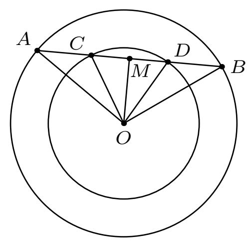
skąd wynika, że $OM > ON$.



Rys. 10.5

73. Dane są dwa okręgi współśrodkowe i prosta przecinająca każdy z nich w dwóch punktach. Udowodnij, że odcinki tej prostej zawarte między okręgami są równe.

Rozwiązanie. Załóżmy, że cięciwa AB większego okręgu przecina mniejszy okrąg w punktach C i D. Niech M będzie rzutem punktu O na prostą AB (rys. 10.7). Ponieważ środek okręgu leży na symetralnej cięciwy, więc punkt O leży na symetralnych odcinków AB i CD. Ponieważ punkty A, B, C i D są współliniowe, więc punkt M leży na obu symetralnych, czyli prosta OM jest symetralną obu cięciw AB i CD. Zatem $AM = BM$ i $CM = DM$. Stąd wynika, że



Rys. 10.6

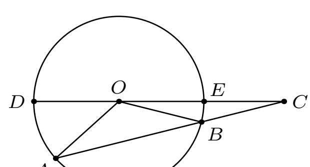
$$AD = AM - DM = BM - CM = BC.$$

74. Dany jest okrąg o środku O i promieniu r. Cięciwę AB tego okręgu przedłużono poza punkt B do punktu C tak, że $BC = r$. Półprosta CO przecina okrąg w dwóch punktach D i E; punkt D leży na zewnątrz odcinka CO, a punkt E wewnątrz tego odcinka. Udowodnij, że $\measuredangle AOD = 3 \cdot \measuredangle ACD$.

Rozwiązanie. Oznaczmy $\alpha = \measuredangle ACD$ (rys. 10.7). Ponieważ $BC = r = OB$, więc $\measuredangle BOC = \alpha$. Kąt ABO jest kątem zewnętrznym trójkąta COB, więc $\measuredangle ABO = 2\alpha$. Trójkąt ABO jest równoramienny, więc $\measuredangle BAO = 2\alpha$ i stąd $\measuredangle AOB = 180^\circ - 4\alpha$. Zatem

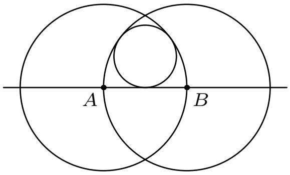
$$\measuredangle AOD = 180^\circ - \measuredangle AOB - \measuredangle BOC =$$
$$= 180^\circ - (180^\circ - 4\alpha) - \alpha = 3\alpha,$$

czyli $\measuredangle AOD = 3 \cdot \measuredangle ACD$.



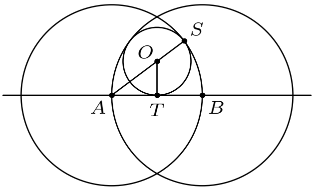
Rys. 10.7

75.



Rys. 10.1

Dany jest odcinek AB o długości 2. Punkty A i B są środkami okręgów o promieniu 2. Udowodnij, że okrąg styczny do prostej AB oraz styczny wewnętrznie do obu okręgów o środkach A i B (rys. 10.1), ma promień równy $\frac{3}{4}$.



Rys. 10.8

Rozwiązanie. Niech punkt O będzie środkiem rozważanego okręgu stycznego do dwóch danych okręgów i do prostej AB. Niech S i T będą punktami styczności tego okręgu z okręgiem o środku A i z prostą AB (rys. 10.8). Niech r będzie promieniem okręgu o środku O. Zauważmy, że wówczas

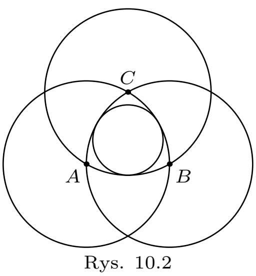
$$AT = 1, \quad OT = r, \quad AO = 2 - r.$$

Ostatnia równość wynika z tego, że punkty A, O i S są współliniowe. Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta ATO mamy $AT^2 + OT^2 = AO^2$, czyli

$$1^2 + r^2 = (2 - r)^2.$$

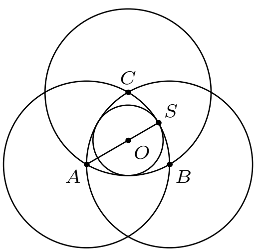
Jedynym rozwiązaniem tego równania jest $r = \frac{3}{4}$.

76.



Rys. 10.2

Dany jest trójkąt równoboczny ABC o boku długości 2. Punkty A, B i C są środkami okręgów o promieniu 2. Udowodnij, że okrąg zawarty wewnątrz tych trzech okręgów oraz styczny wewnętrznie do każdego z nich (rys. 10.2), ma promień równy $\frac{2}{3}(3 - \sqrt{3})$.

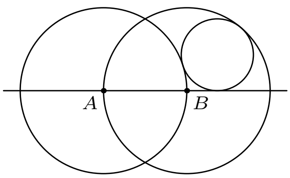


Rys. 10.9

Rozwiązanie. Niech O będzie środkiem rozważanego okręgu stycznego do trzech danych okręgów i niech S będzie punktem styczności tego okręgu z okręgiem o środku A (rys. 10.9): Oczywiście punkt O jest punktem przecięcia wysokości trójkąta równobocznego ABC oraz punkty A, O i S są współliniowe. Mamy wówczas

$$OS = AS - AO = 2 - \frac{2}{3} \cdot \frac{2\sqrt{3}}{2} = \frac{2}{3} \cdot (3 - \sqrt{3}).$$

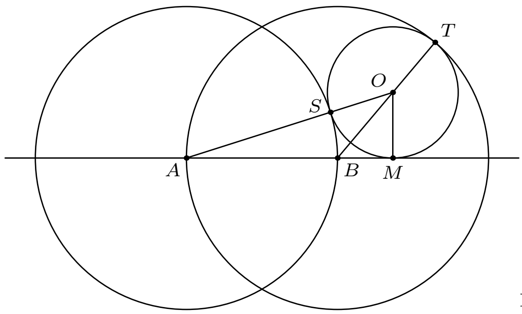
77.



Rys. 10.3

Dany jest odcinek AB o długości równej 2. Punkty A i B są środkami okręgów o promieniu 2. Udowodnij, że okrąg styczny do prostej AB, styczny zewnętrznie do okręgu o środku A oraz styczny wewnętrznie do okręgu o środku B (rys. 10.3), ma promień równy $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Rozwiązanie. Niech punkt O będzie środkiem rozważanego okręgu stycznego do danych okręgów o środkach A i B. Niech następnie S i T będą punktami styczności okręgu o środku O z okręgami o środkach A i B. Wreszcie niech M będzie punktem styczności okręgu o środku O z prostą AB (rys. 10.10):



Rys. 10.10

Przyjmijmy oznaczenia:

$$BM = x, \quad OM = r.$$

Punkty A, S i O są współliniowe, więc $AO = 2 + r$. Podobnie punkty B, O i T są współliniowe, więc $BO = 2 - r$. Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkątów AMO i BMO otrzymujemy równania

$$AM^2 + OM^2 = AO^2, \quad BM^2 + OM^2 = BO^2,$$

czyli

$$(2+x)^2 + r^2 = (2+r)^2, \quad x^2 + r^2 = (2-r)^2.$$

Przekształcamy pierwsze równanie, podstawiając $(2-r)^2$ w miejsce $x^2 + r^2$:

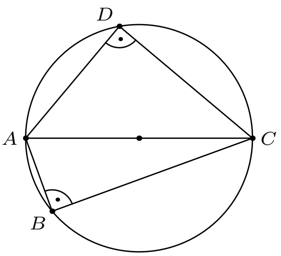
$$\begin{gathered}(2+x)^2 + r^2 = (2+r)^2,\\ 4 + 4x + x^2 + r^2 = 4 + 4r + r^2,\\ 4x + (2-r)^2 = 4r + r^2,\\ 4x + 4 - 4r + r^2 = 4r + r^2,\\ 4x + 4 - 4r = 4r,\\ x = 2r - 1.\end{gathered}$$

Obliczoną wartość x podstawiamy do równania $x^2 + r^2 = (2-r)^2$:

$$\begin{gathered}x^2 + r^2 = (2-r)^2,\\ (2r-1)^2 + r^2 = (2-r)^2,\\ 4r^2 - 4r + 1 + r^2 = 4 - 4r + r^2,\\ 4r^2 = 3,\end{gathered}$$

skąd otrzymujemy $r = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

78. Wierzchołki czworokąta $ABCD$ o bokach długości a, b, c i d leżą na okręgu o promieniu r. Przekątna AC jest średnicą okręgu, a kąty ABC i ADC czworokąta są proste. Udowodnij, że $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 8r^2$.



Rys. 10.11

Rozwiązanie. Przyjmijmy oznaczenia (rys. 10.11):

$$AB = a, \quad BC = b, \quad CD = c, \quad DA = d.$$

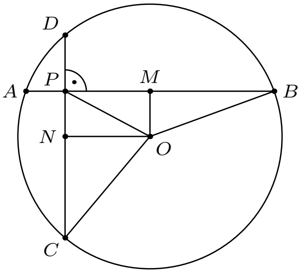
Wiemy, że kąty ABC i ADC są proste oraz przekątna AC jest średnicą okręgu. Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkątów ABC i ADC wynika teraz, że

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = (AB^2 + BC^2) + (CD^2 + DA^2) =$$
$$= AC^2 + AC^2 = 2 \cdot (2r)^2 = 8r^2.$$

Uwaga. W tym zadaniu zakładamy, że dwa przeciwległe kąty ABC i ADC czworokąta $ABCD$ są proste oraz przekątna jest średnicą. Jak się przekonamy wkrótce, z twierdzenia o kącie wpisanym i środkowym wynika, iż wystarczy założyć tylko, że jeden kąt czworokąta jest prosty. Kąt przeciwległy do niego też będzie prosty oraz przekątna AC będzie średnicą okręgu.

79. W okręgu o środku O i promieniu r poprowadzono dwie prostopadłe cięciwy o długościach $2a$ i $2b$ przecinające się w punkcie P. Udowodnij, że $OP^2 + a^2 + b^2 = 2r^2$.

Rozwiązanie. Poprowadźmy w okręgu o środku O i promieniu r prostopadłe cięciwy $AB = 2a$ i $CD = 2b$. Niech M i N będą rzutami środka O na cięciwy AB i CD. Niech ponadto P będzie punktem przecięcia obu cięciw (rys. 10.12). Mamy wówczas $MB = a$ i $NC = b$. Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkątów BMO i CNO dostajemy



Rys. 10.12

$$OM^2 = OB^2 - MB^2 = r^2 - a^2$$

oraz

$$ON^2 = C^2 - NC^2 = r^2 - b^2.$$

Czworokąt $PNOM$ jest prostokątem, więc

$$OP^2 = OM^2 + ON^2 = 2r^2 - (a^2 + b^2),$$

skąd wynika, że $OP^2 + a^2 + b^2 = 2r^2$.

80. Wierzchołki czworokąta $ABCD$ o bokach długości a, b, c i d leżą na okręgu o promieniu r. Przekątne tego czworokąta są prostopadłe. Udowodnij, że

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 8r^2.$$

Rozwiązanie. Niech

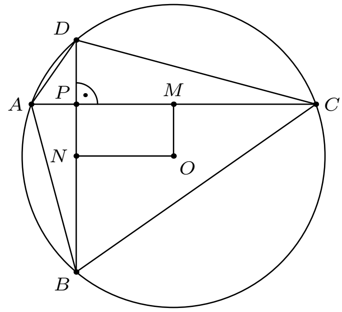
$$AB = a, \quad BC = b, \quad CD = c, \quad DA = d.$$

Niech P będzie punktem przecięcia przekątnych AC i BD i niech punkty M i N będą środkami tych przekątnych (rys. 10.13). Niech wreszcie

$$AP = x, \quad BP = y, \quad CP = z, \quad DP = t.$$

Mamy wówczas

$$\begin{aligned} AB^2 &= AP^2 + BP^2 = x^2 + y^2, \\ BC^2 &= BP^2 + CP^2 = y^2 + z^2, \\ CD^2 &= CP^2 + DP^2 = z^2 + t^2, \\ DA^2 &= DP^2 + AP^2 = t^2 + x^2. \end{aligned}$$



Rys. 10.13

Stąd wynika, że

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 2(x^2 + y^2 + z^2 + t^2).$$

Ponieważ

$$AC = x + z = 2 \cdot \frac{x+z}{2} \quad \text{oraz} \quad BD = y + t = 2 \cdot \frac{y+t}{2},$$

więc z poprzedniego zadania dostajemy

$$OP^2 = 2r^2 - \left(\left(\frac{x+z}{2} \right)^2 + \left(\frac{y+t}{2} \right)^2 \right).$$

Następnie

$$\begin{aligned} PM &= AM - AP = \frac{x+z}{2} - x = \frac{z-x}{2}, \\ PN &= DN - DP = \frac{y+t}{2} - t = \frac{y-t}{2}. \end{aligned}$$

Zatem

$$\begin{aligned} 2r^2 &= OP^2 + \left(\frac{x+z}{2} \right)^2 + \left(\frac{y+t}{2} \right)^2 = \\ &= PM^2 + PN^2 + \left(\frac{x+z}{2} \right)^2 + \left(\frac{y+t}{2} \right)^2 = \\ &= \left(\frac{z-x}{2} \right)^2 + \left(\frac{y-t}{2} \right)^2 + \left(\frac{x+z}{2} \right)^2 + \left(\frac{y+t}{2} \right)^2 = \\ &= \frac{z^2 - 2xz + x^2 + y^2 - 2yt + t^2 + x^2 + 2xz + z^2 + y^2 - 2yt + t^2}{4} = \\ &= \frac{x^2 + y^2 + z^2 + t^2}{2}. \end{aligned}$$

Stąd wynika, że

$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 4r^2,$$

czyli

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 8r^2.$$

Uwaga. W zadaniach 78 i 80 udowodniliśmy, że jeśli w czworokącie o bokach długości a, b, c i d wpisanym w okrąg o promieniu r przekątne są prostopadłe lub co najmniej jeden kąt jest prosty, to

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 8r^2.$$

Można udowodnić także twierdzenie odwrotne: jeśli w czworokącie o bokach długości a, b, c i d wpisanym w okrąg o promieniu r zachodzi równość

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 8r^2,$$

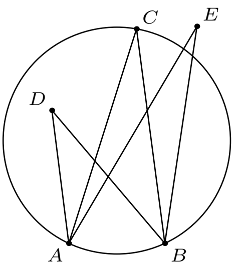
to przekątne tego czworokąta są prostopadłe lub co najmniej jeden kąt jest prosty. Dowód tego twierdzenia jest jednak znacznie trudniejszy; twierdzenie to było treścią zadania olimpijskiego.

Zadania 71 – 73 są bardzo łatwe i wskazują ważną własność cięciw okręgu. Zadania 75 – 77 mogą być potraktowane jako zadania wstępne do projektu o oknach gotyckich (zadanie 75 rzeczywiście jest wykorzystywane w tym celu). Te zadania pokazują, że w wielu przypadkach umiemy dość łatwo obliczyć promień okręgu stycznego do trzech linii: trzech okręgów lub dwóch okręgów i prostej. Zadanie 78 jest bardzo łatwe; zostało ono specjalnie sformułowane w ten sposób, by nie odwoływać się do twierdzenia o kącie środkowym i wpisanym (ani do twierdzenia o kącie opartym na średnicy). Kąty wpisane i środkowe będą omawiane dopiero po VIII zestawie zadań i będą tematem następnego zestawu. Wreszcie zadania 79 i 80 są dość trudne (zwłaszcza zadanie 80) i na ogół niewielu uczniów potrafi je rozwiązać.

Po rozwiązaniu zadań z zestawu VIII przechodzę do omawiania kątów środkowych i wpisanych. Definiuję te dwa rodzaje kątów i podaję twierdzenie o kącie wpisanym i środkowym. Nie zawsze dowodzę tego twierdzenia. Przypominam, że właściwie każdy temat powtarzam. Bywa zatem, że wprawdzie za pierwszym razem nie dowodzę tego twierdzenia, ale robię to za drugim razem. Uczniowie, którzy zapamiętali twierdzenie już za pierwszym razem, poznają dowód. Pozostali zobaczą dowód, choć najprawdopodobniej go nie zapamiętają. Mówię uczniom, że znajomość dowodu nie jest konieczna; nie będę tego od nich wymagał, chociaż oczywiście lepiej ten dowód poznać.

Pokazuję dowód w trzech krokach: gdy ramię kąta wpisanego przechodzi przez środek okręgu, gdy środek okręgu leży wewnątrz kąta wpisanego i wreszcie, gdy środek okręgu leży na zewnątrz kąta wpisanego. Szczegóły tu pominę, ten znany dowód znajduje się w każdym dobrym podręczniku geometrii.

Omawiam wnioski z twierdzenia o kącie środkowym i wpisanym: kąty wpisane oparte na tym samym łuku są równe, także kąty wpisane oparte na równych łukach są równe. Następnie podaję proste twierdzenie dotyczące kątów wpisanych.



Rys. 10.14

Twierdzenie. Dany jest kąt wpisany ACB oparty na łuku AB oraz dwa punkty D i E leżące po tej samej stronie prostej AB co punkt C. Punkt D leży wewnątrz okręgu, punkt E leży na zewnątrz okręgu (rys. 10.14). Wtedy

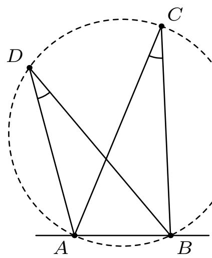
$$\measuredangle ADB > \measuredangle ACB > \measuredangle AEB.$$

Z tego twierdzenia łatwo wynika jeden warunek na to, by cztery punkty leżały na jednym okręgu.

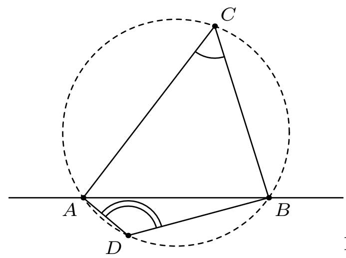
Twierdzenie. Dana jest prosta AB i dwa punkty C i D leżące po tej samej stronie tej prostej (rys. 10.15). Wówczas punkty A, B, C i D leżą na jednym okręgu wtedy i tylko wtedy, gdy $\measuredangle ACB = \measuredangle ADB$.

Podaję również drugi warunek dla przypadku, gdy punkty C i D leżą po przeciwnych stronach prostej AB:

Twierdzenie. Dana jest prosta AB i dwa punkty C i D leżące po przeciwnych stronach tej prostej (rys. 10.16). Wówczas punkty A, B, C i D leżą na jednym okręgu wtedy i tylko wtedy, gdy $\measuredangle ACB + \measuredangle ADB = 180°$.



Rys. 10.15



Rys. 10.16

Ostatnie twierdzenie podaje warunek konieczny i wystarczający na to, by na czworokącie $ABCD$ można było opisać okrąg. W następnym zestawie zadań nie korzystamy jeszcze z twierdzenia o okręgu opisanym na czworokącie. Związkom wielokątów i okręgów będzie poświęcony zestaw X. W zestawie IX wystarczą twierdzenia o kątach wpisanych i środkowych, w szczególności twierdzenia o kątach opartych na średnicy (czy dokładniej na półokręgu). Istnieje jeszcze wiele ważnych twierdzeń geometrii okręgu (na przykład twierdzenie o kącie między styczną i cięciwą czy twierdzenie Ptolemeusza). Często podaję uczniom te twierdzenia na zakończenie geometrii okręgu. Na ogół podaję też dowód twierdzenia o kącie między styczną i cięciwą (zarówno w przypadku kąta ostrego jak i rozwartego). Twierdzenie Ptolemeusza podaję bez dowodu.

Przejdźmy teraz do wspomnianego zestawu IX:

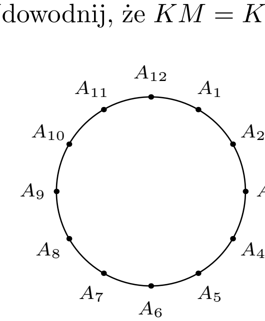
Zestaw IX

81. W trójkącie ostrokątnym ABC poprowadzono wysokości AD i BE. Udowodnij, że punkty A, B, D i E leżą na jednym okręgu.

82. Dwa okręgi przecinają się w punktach A i B. Odcinki AC i AD są średnicami tych okręgów. Udowodnij, że punkty C, B i D są współliniowe.

83. Dane są dwa okręgi: odcinek AB jest średnicą pierwszego, punkt B jest środkiem drugiego. Prosta przechodząca przez punkt A przecina pierwszy okrąg w punkcie K różnym od A i przecina drugi okrąg w punktach M i N. Udowodnij, że $KM = KN$.

W następnych sześciu zadaniach (tzn. w zadaniach 84–89) punkty $A_1, A_2, \ldots, A_{12}$ dzielą okrąg na 12 równych łuków tak jak na rysunku 10.17.
Inaczej mówiąc, punkty $A_1, A_2, \ldots, A_{12}$ są wierzchołkami dwunastokąta foremnego wpisanego w ten okrąg.



Rys. 10.17

84. Oblicz miary kątów trójkąta $A_8A_2A_{12}$.

85. Cięciwa A_8A_3 przecina cięciwy $A_{11}A_7$ i $A_{11}A_5$ odpowiednio w punktach P i Q. Oblicz miary kątów trójkąta PQA_{11}.

86. Cięciwy A_1A_9 i A_3A_{11} przecinają się w punkcie P. Udowodnij, że $A_3P = A_9P$.

87. Udowodnij, że cięciwy $A_{12}A_6$, A_2A_{11} i A_1A_{10} przecinają się w jednym punkcie.

88. Udowodnij, że cięciwy $A_{12}A_6$, A_3A_{11} i A_1A_9 przecinają się w jednym punkcie.

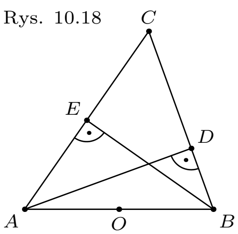
89. Udowodnij, że cięciwy $A_{12}A_5$, A_2A_{10} i A_1A_8 przecinają się w jednym punkcie.

90. Trójkąt równoboczny ABC jest wpisany w okrąg. Punkt D leży na krótszym łuku AB. Punkt E leży na odcinku CD oraz $DE = DB$. Udowodnij, że trójkąty BAD i BCE są przystające.

Zestaw IX — szkice rozwiązań.

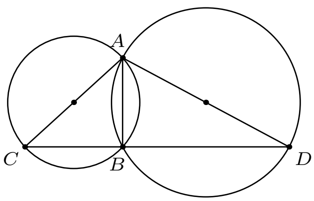
81. W trójkącie ostrokątnym ABC poprowadzono wysokości AD i BE. Udowodnij, że punkty A, B, D i E leżą na jednym okręgu.

Rys. 10.18



Rozwiązanie. Niech O będzie środkiem boku AB (rys. 10.18). Z twierdzenia o kącie opartym na średnicy wynika, że punkty D i E leżą na okręgu o średnicy AB, czyli na okręgu o środku O i promieniu OA.

82. Dwa okręgi przecinają się w punktach A i B. Odcinki AC i AD są średnicami tych okręgów. Udowodnij, że punkty C, B i D są współliniowe.



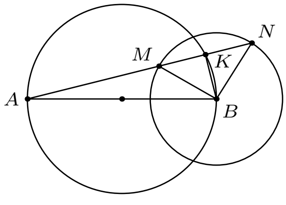
Rys. 10.19

Rozwiązanie. Poprowadźmy odcinek AB (rys. 10.19). Ponieważ AC jest średnicą jednego z danych okręgów, więc $\measuredangle ABC = 90°$. Podobnie AD jest średnicą drugiego okręgu, a więc $\measuredangle ABD = 90°$. Stąd wynika, że

$$\measuredangle CBD = \measuredangle ABC + \measuredangle ABD = 180°,$$

czyli punkty C, B i D są współliniowe.

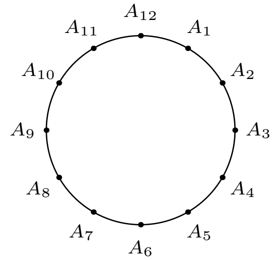
83. Dane są dwa okręgi: odcinek AB jest średnicą pierwszego, punkt B jest środkiem drugiego. Prosta przechodząca przez punkt A przecina pierwszy okrąg w punkcie K różnym od A i przecina drugi okrąg w punktach M i N. Udowodnij, że $KM = KN$.



Rys. 10.20

Rozwiązanie. Ponieważ punkt K leży na okręgu o średnicy AB, więc $\measuredangle AKB = 90°$. Punkt K jest więc rzutem punktu B na prostą MN. Ponieważ punkty M i N leżą na okręgu o środku B, więc punkt B leży na symetralnej odcinka MN; tą symetralną jest zatem prosta BK. Stąd $KM = KN$, co kończy dowód.

W następnych sześciu zadaniach (tzn. w zadaniach 84–89) punkty $A_1, A_2, \ldots, A_{12}$ dzielą okrąg na 12 równych łuków tak jak na rysunku 10.17.
Inaczej mówiąc, punkty $A_1, A_2, \ldots, A_{12}$ są wierzchołkami dwunastokąta foremnego wpisanego w ten okrąg.

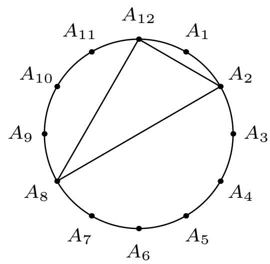


Rys. 10.17

84. Oblicz miary kątów trójkąta $A_8A_2A_{12}$.

Rozwiązanie. Kąt środkowy oparty na łuku A_1A_2 ma miarę $30°$. Stąd wynika, że kąt wpisany oparty na łuku będącym dwunastą częścią okręgu ma miarę $15°$. Mamy zatem (rys. 10.21):

$$\measuredangle A_{12}A_8A_2 = 2 \cdot 15° = 30°,$$
$$\measuredangle A_8A_2A_{12} = 4 \cdot 15° = 60°,$$
$$\measuredangle A_8A_{12}A_2 = 6 \cdot 15° = 90°.$$



Rys. 10.21

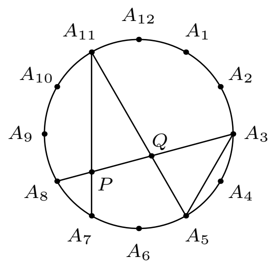
85. Cięciwa A_8A_3 przecina cięciwy $A_{11}A_7$ i $A_{11}A_5$ odpowiednio w punktach P i Q. Oblicz miary kątów trójkąta PQA_{11}.

Rozwiązanie. Najpierw zauważamy, że

$$\measuredangle PA_{11}Q = \measuredangle A_7A_{11}A_5 = 2 \cdot 15° = 30°.$$

Dorysujmy teraz cięciwę A_3A_5 (rys. 10.22). Mamy wówczas

$$\measuredangle QA_3A_5 = \measuredangle A_8A_3A_5 = 3 \cdot 15° = 45°,$$
$$\measuredangle QA_5A_3 = \measuredangle A_{11}A_5A_3 = 4 \cdot 15° = 60°.$$



Rys. 10.22

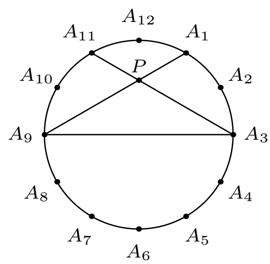
Możemy teraz obliczyć miarę trzeciego kąta trójkąta QA_5A_3:

$$\measuredangle A_5QA_3 = 180° - 45° - 60° = 75°.$$

Stąd dostajemy $\measuredangle PQA_{11} = 75°$ oraz $\measuredangle QPA_{11} = 180° - 30° - 75° = 75°$.

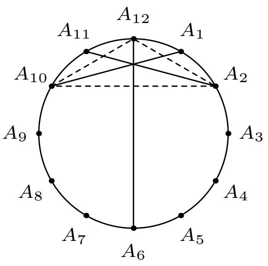
86. Cięciwy A_1A_9 i A_3A_{11} przecinają się w punkcie P. Udowodnij, że $A_3P = A_9P$.

Rozwiązanie. Łuki A_1A_3 i A_9A_{11} są równe (rys. 10.23). Zatem $\measuredangle A_3A_9A_1 = \measuredangle A_9A_3A_{11}$, skąd wynika, że trójkąt A_9A_3P jest równoramienny.



Rys. 10.23

87. Udowodnij, że cięciwy $A_{12}A_6$, A_2A_{11} i A_1A_{10} przecinają się w jednym punkcie.

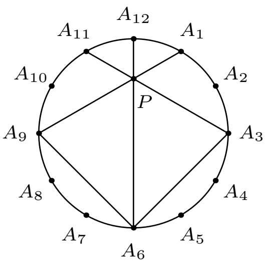


Rys. 10.24

Rozwiązanie. Zauważmy, że łuki A_1A_2 i A_1A_{12} są równe (rys. 10.24). Zatem półprosta $A_{10}A_1$ jest dwusieczną kąta $A_2A_{10}A_{12}$. Podobnie półprosta A_2A_{11} jest dwusieczną kąta $A_{10}A_2A_{12}$ oraz półprosta $A_{12}A_6$ jest dwusieczną kąta $A_2A_{12}A_{10}$. Rozpatrywane cięciwy są zatem dwusiecznymi kątów trójkąta $A_{10}A_2A_{12}$, a więc przecinają się w jednym punkcie.

Uwaga. Oczywiście zanim to zadanie damy uczniom do rozwiązywania, musimy opowiedzieć o tzw. punktach szczególnych trójkąta. Uczniowie powinni wiedzieć, że dwusieczne kątów trójkąta przecinają się w jednym punkcie; dowód tego twierdzenia nie jest konieczny.

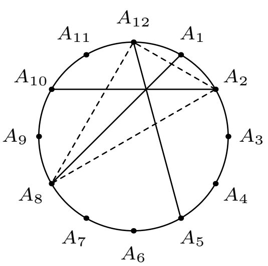
88. Udowodnij, że cięciwy $A_{12}A_6$, A_3A_{11} i A_1A_9 przecinają się w jednym punkcie.



Rys. 10.25

Rozwiązanie. Oznaczymy literą P punkt przecięcia cięciw A_3A_{11} i A_1A_9. Połączmy punkt P z punktami A_6 i A_{12} (rys. 10.25). Z zadania 86 wiemy, że $A_9P = A_3P$. Łuki A_6A_9 i A_6A_3 są równe, a więc cięciwy A_6A_9 i A_6A_3 też są równe. Stąd wynika, że trójkąty A_6PA_9 i A_6PA_3 są przystające (cecha przystawania BBB). Zatem $\measuredangle A_6PA_9 = \measuredangle A_6PA_3$. Półprosta PA_6 jest więc dwusieczną kąta A_3PA_9. W podobny sposób pokazujemy, że półprosta PA_{12} jest dwusieczną kąta A_1PA_{11}. Ponieważ dwusieczne kątów wierzchołkowych przedłużają się (zob. zadanie 2), więc punkty A_{12}, P i A_6 są współliniowe.

89. Udowodnij, że cięciwy $A_{12}A_5$, A_2A_{10} i A_1A_8 przecinają się w jednym punkcie.



Rys. 10.26

Rozwiązanie. Narysujmy trójkąt $A_8A_2A_{12}$ (rys. 10.26). Podobnie jak w zadaniu 87 pokazujemy, że półproste A_8A_1, A_2A_{10} i $A_{12}A_5$ są dwusiecznymi kątów trójkąta $A_8A_2A_{12}$: łuki $A_{12}A_1$ i A_1A_2 są równe, skąd $\measuredangle A_{12}A_8A_1 = \measuredangle A_1A_8A_2$; łuki A_2A_5 i A_5A_8 są równe, skąd $\measuredangle A_8A_2A_{10} = \measuredangle A_{10}A_2A_{12}$; łuki A_8A_{10} i $A_{10}A_{12}$ są równe, skąd $\measuredangle A_2A_{12}A_5 = \measuredangle A_5A_{12}A_8$. Zatem cięciwy A_8A_1, A_2A_{10} i $A_{12}A_5$ przecinają się w jednym punkcie.

90. Trójkąt równoboczny ABC jest wpisany w okrąg. Punkt D leży na krótszym łuku AB. Punkt E leży na odcinku CD oraz $DE = DB$. Udowodnij, że trójkąty BAD i BCE są przystające.

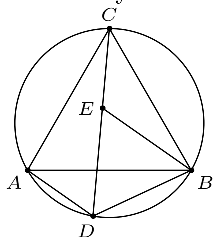
Uwaga. Można zapytać, czy na odcinku CD rzeczywiście leży taki punkt E, dla którego zachodzi równość $DE = DB$. Okazuje się, że tak. Mianowicie (rys. 10.27):

$$\measuredangle CAD > \measuredangle CAB = \measuredangle CBA = \measuredangle CDA.$$

Stąd wynika, że $CD > CA$. Następnie

$$\measuredangle BDC = \measuredangle BAC = \measuredangle BCA > \measuredangle BCD.$$

Stąd wynika, że $BC > BD$. Ponieważ $BC = CA$, więc $CD > BD$. Zatem na odcinku CD rzeczywiście istnieje taki punkt E, że $DE = BD$.



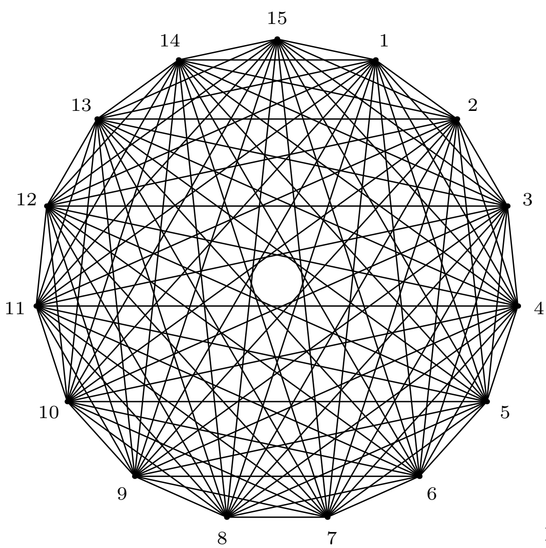
Rys. 10.27

Rozwiązanie. Ponieważ $\measuredangle CDB = \measuredangle CAB = 60°$ oraz $DB = DE$, więc trójkąt DBE jest równoboczny (rys. 10.27). Zatem $BD = BE$. Ponieważ $BA = BC$ oraz $\measuredangle DBA = 60° - \measuredangle ABE = \measuredangle EBC$, więc trójkąty BAD i BCE są przystające (cecha BKB).

Uwaga. Z przystawania trójkątów BAD i BCE wynika w szczególności, że $DA = EC$. Zatem $DC = DE + EC = DB + DA$. Udowodniliśmy zatem twierdzenie mówiące, że jeśli trójkąt równoboczny ABC jest wpisany w okrąg oraz punkt D leży na krótszym łuku AB, to $AD + BD = CD$.

Jak wspomniałem wyżej, zadania zestawu IX dotyczą kątów wpisanych i środkowych. Szczególnie interesujące są zadania o okręgu podzielonym na 12 równych łuków; są to zadania o tarczy zegarowej (lub inaczej: o wierzchołkach dwunastokąta foremnego). Tu chciałbym zwrócić uwagę na zadania o cięciwach przecinających się w jednym punkcie, czyli o przekątnych dwunastokąta foremnego.

Problem, czy przekątne wielokąta foremnego mogą przecinać się w jednym punkcie, jest bardzo interesujący. H. Steinhaus w swojej słynnej książce [Steinhaus] stwierdza bez dowodu, że żadne trzy przekątne wielokąta foremnego o 23 bokach nie mogą przecinać się w jednym punkcie. Rzeczywiście tak jest. Udowodniono, że jeśli wielokąt foremny ma nieparzystą liczbę boków, to żadne trzy jego przekątne nie przecinają się w jednym punkcie. Dowód jest dość długi i wymaga środków znacznie wykraczających poza możliwości ucznia. Popatrzmy jednak na przekątne piętnastokąta foremnego (rys. 10.28).

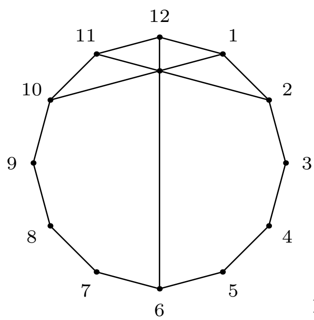


Rys. 10.28

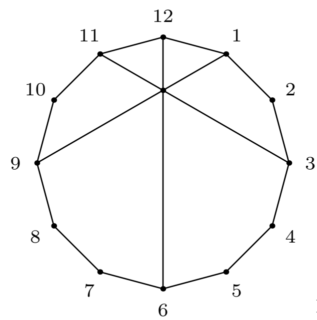
Wydaje się, że możemy dostrzec kilka punktów, w których przecinają się trzy przekątne.

To jednak złudzenie, znacznie większy i dokładniejszy rysunek pokazuje, że trzy przekątne przechodzą bardzo blisko siebie, ale jednak nie przez ten sam punkt.

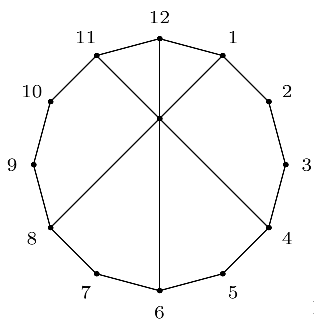
W przypadku, gdy liczba boków wielokąta foremnego jest parzysta, pewne jego trzy przekątne mogą przecinać się w jednym punkcie. Jednak nie dowodzi tego żaden rysunek, nawet zrobiony najdokładniej jak umiemy. Zawsze istniałaby wątpliwość, czy jeszcze dokładniejszy rysunek nie wykaże — tak jak to miało miejsce w przypadku piętnastokąta foremnego — że mamy do czynienia ze złudzeniem. Potrzebny jest ścisły dowód geometryczny, taki jak w zadaniach 87, 88 i 89. W przypadku dwunastokąta foremnego mamy sześć różnych rodzajów punktów (oprócz środka okręgu opisanego), w których przecinają się co najmniej trzy przekątne. Zobaczymy je na rysunkach 10.29, 10.30, 10.31, 10.32, 10.33 i 10.34.



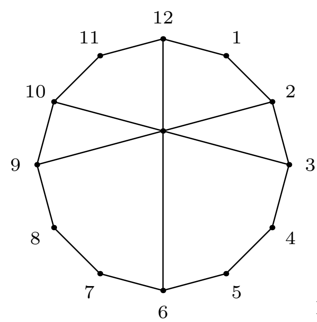
Rys. 10.29



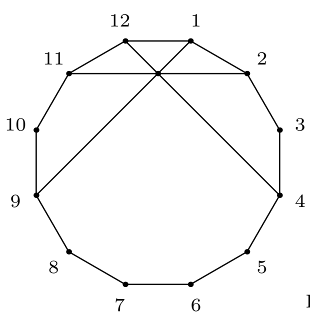
Rys. 10.30



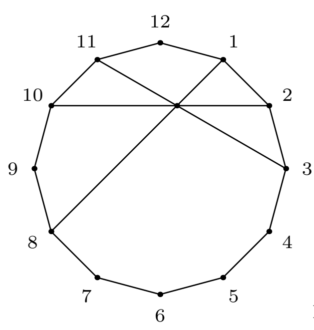
Rys. 10.31



Rys. 10.32

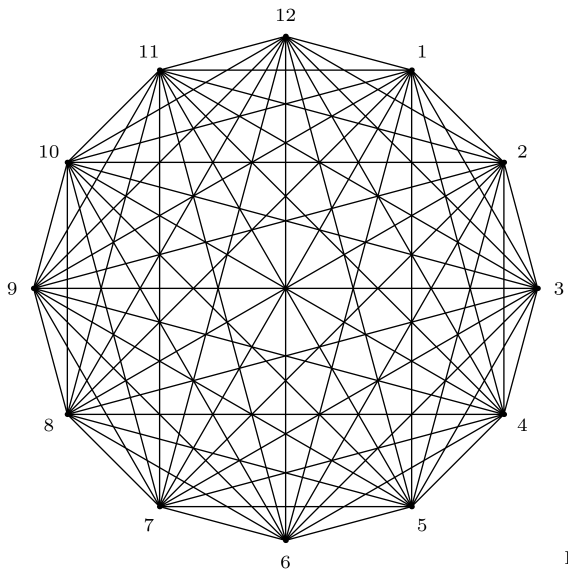


Rys. 10.33



Rys. 10.34

Na rysunku 10.35 widzimy wszystkie przekątne dwunastokąta foremnego. Rozpoznanie powyższych sześciu typów punktów, w których przecinają się co najmniej trzy przekątne, jest nietrudnym ćwiczeniem.



Rys. 10.35

Problemowi, które przekątne wielokąta foremnego przecinają się w jednym punkcie, poświęcam jeden z artykułów seminaryjnych towarzyszących poradnikowi.

Teraz przechodzimy do ostatniego zestawu zadań z geometrii. Ten zestaw poprzedzam kolejnymi twierdzeniami geometrii okręgu. Zaczynam od pojęcia okręgu opisanego na wielokącie i okręgu wpisanego w wielokąt. Następnie przypominam uczniom twierdzenia o okręgach i trójkątach: istnieje okrąg opisany na trójkącie i okrąg wpisany w trójkąt. Przypominam, gdzie leżą środki tych okręgów. Następnie mówię uczniom, że wiele problemów geometrii elementarnej jest związanych z pewnymi sytuacjami wyjątkowymi. Dwa punkty zawsze wyznaczają prostą, trzy punkty na ogół nie leżą na jednej prostej. Interesują nas zatem te wyjątkowe sytuacje, w których umiemy udowodnić, że pewne trzy punkty leżą na jednej prostej. Podobnie dwie proste na ogół przecinają się w jednym punkcie (równoległość jest też takim zjawiskiem w pewnym sensie wyjątkowym). Trzy proste na ogół nie będą przecinać się w jednym punkcie. Dlatego interesują nas takie wyjątkowe sytuacje. Mieliśmy do czynienia z punktami szczególnymi trójkąta, interesowały nas trzy przekątne wielokąta foremnego przecinające się w jednym punkcie, widzieliśmy twierdzenie Carnota.

Podobnie jest z okręgami. Trzy punkty niewspółliniowe wyznaczają okrąg: jest to okrąg opisany na trójkącie. Jeśli mamy dane dowolne cztery punkty na płaszczyźnie, to na ogół nie będą one leżały na jednym okręgu. Trzy z nich wyznaczą okrąg (jeśli są niewspółliniowe), czwarty na ogół na tym okręgu nie będzie leżał. Dlatego sytuacja, w której pewne cztery punkty leżą na jednym okręgu, jest wyjątkowa i z tego powodu dla nas interesująca. Podobnie jest ze stycznością. Trzy proste wyznaczają trójkąt i w niego można wpisać okrąg. Jeśli dorysujemy teraz dowolną czwartą prostą, to na ogół nie będzie ona do tego okręgu styczna. Sytuacja, w której istnieje okrąg styczny do czterech prostych znów jest wyjątkowa.

Po tej dygresji omawiam okręgi opisane na czworokątach. Odpowiednie twierdzenie było wprowadzone już przed zestawem IX, choć nie było wykorzystywane. Teraz je przypominam. Następnie dowodzę twierdzenia o równości odcinków stycznych i wyprowadzam z niego warunek konieczny dla tego, by w czworokąt można było wpisać okrąg. Informuję uczniów, że ten warunek konieczny jest również wystarczający dla wielokąta wypukłego.

Po tych twierdzeniach przechodzimy do rozwiązywania zadań. Zwracam tu uwagę na zadania 93, 94 i 95. Są to uproszczone wersje zadań znacznie trudniejszych. Główna trudność w rozwiązaniu zadań oryginalnych polega na wymyśleniu, że trzeba wybrać pewne okręgi i znaleźć ich punkt przecięcia. Ten główny pomysł podpowiadam uczniom. Dla wielu uczniów są to nadal zadania trudne. Sądzę jednak, że warto te zadania uprościć tak, by większa część klasy mogła je rozwiązać.

Zestaw X

91. W trójkącie ostrokątnym ABC poprowadzono wysokości AD i BE. Udowodnij, że $\measuredangle EDC = \measuredangle BAC$ i $\measuredangle DEC = \measuredangle ABC$.

92. Bok AB trójkąta ABC jest cięciwą okręgu, który przecina boki BC i AC odpowiednio w punktach D i E (różnych od A i B). Udowodnij, że $\measuredangle EDC = \measuredangle BAC$ oraz $\measuredangle DEC = \measuredangle ABC$.

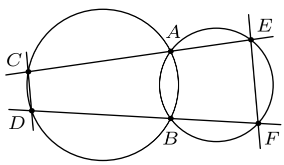
93. Trójkąty równoboczne ABC i BDE są położone tak, że punkt B leży wewnątrz odcinka AD oraz wierzchołki C i E leżą po tej samej stronie prostej AD. Okręgi opisane na tych trójkątach przecinają się w punktach B i F. Udowodnij, że punkty C, F i D są współliniowe.

94. Na bokach AC i BC trójkąta ABC zbudowano, na zewnątrz trójkąta, dwa trójkąty równoboczne ACD i BCE. Okręgi opisane na tych trójkątach równobocznych przecinają się w punktach C i F. Udowodnij, że punkty A, F i E są współliniowe.

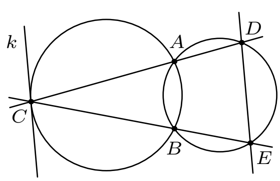
95. Na bokach BC, AC i AB trójkąta ABC wybrano odpowiednio punkty D, E i F. Okręgi opisane na trójkątach AFE i BDF przecinają się w punktach F i G. Udowodnij, że $\measuredangle DGE = \measuredangle BAC + \measuredangle ABC$.

96. Dwa okręgi przecinają się w punktach A i B. Prosta przechodząca przez punkt A przecina te okręgi w punktach C i E różnych od A; prosta przechodząca przez punkt B przecina te okręgi w punktach D i F różnych od B (rys. 10.36). Udowodnij, że proste CD i EF są równoległe.

97. Dwa okręgi przecinają się w punktach A i B. Proste przechodzące przez punkty A i B przecinają jeden z tych okręgów w punkcie C różnym od A i B oraz przecinają drugi okrąg odpowiednio w punktach D i E różnych od A i B. Prosta k jest styczna do pierwszego okręgu w punkcie C (rys. 10.37). Udowodnij, że prosta k jest równoległa do prostej DE.



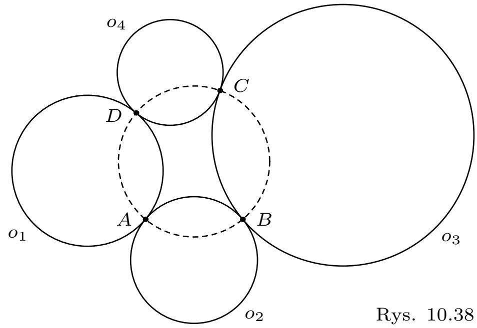
Rys. 10.36



Rys. 10.37

98. W trójkącie ostrokątnym ABC poprowadzono wysokości AD, BE i CF. Udowodnij, że półproste DA, EB i FC są dwusiecznymi kątów trójkąta DEF.

99. Dane są cztery okręgi o_1, o_2, o_3 i o_4. Okręgi o_1 i o_2 są styczne zewnętrznie w punkcie A, okręgi o_2 i o_3 są styczne zewnętrznie w punkcie B, okręgi o_3 i o_4 są styczne zewnętrznie w punkcie C, okręgi o_4 i o_1 są styczne zewnętrznie w punkcie D (rys. 10.38).



Rys. 10.38

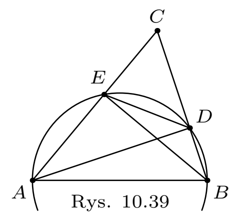
Udowodnij, że punkty A, B, C i D leżą na jednym okręgu.

100. W czworokącie wypukłym $ABCD$ poprowadzono przekątną AC. Okręgi wpisane w trójkąty ABC i ACD są styczne zewnętrznie. Udowodnij, że w czworokąt $ABCD$ można wpisać okrąg.

Zestaw X — szkice rozwiązań.

91. W trójkącie ostrokątnym ABC poprowadzono wysokości AD i BE. Udowodnij, że $\measuredangle EDC = \measuredangle BAC$ i $\measuredangle DEC = \measuredangle ABC$.

Rozwiązanie. Ponieważ kąty AEB i ADB są proste, więc punkty E i D leżą na okręgu o średnicy AB (rys. 10.39). Czworokąt $ABDE$ jest więc wpisany w okrąg. Zatem $\measuredangle EDB = 180° - \measuredangle BAE$, skąd wynika, że $\measuredangle EDC = \measuredangle BAC$. W podobny sposób dowodzimy, że $\measuredangle DEC = \measuredangle ABC$.

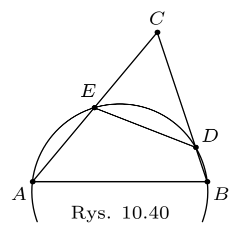


Rys. 10.39

Uwaga. Zauważmy, że rozwiązanie zadania 91 jest innym rozwiązaniem zadania 10 z zestawu I. Następne zadanie jest uogólnieniem zadania 91.

92. Bok AB trójkąta ABC jest cięciwą okręgu, który przecina boki BC i AC odpowiednio w punktach D i E (różnych od A i B). Udowodnij, że $\measuredangle EDC = \measuredangle BAC$ oraz $\measuredangle DEC = \measuredangle ABC$.

Rozwiązanie. Z założenia punkty A, B, D i E leżą na jednym okręgu, tzn. czworokąt $ABDE$ jest wpisany w okrąg (rys. 10.40). Zatem $\measuredangle EDB = 180° - \measuredangle BAE$, skąd wynika, że $\measuredangle EDC = \measuredangle BAC$. W podobny sposób dowodzimy, że $\measuredangle DEC = \measuredangle ABC$.

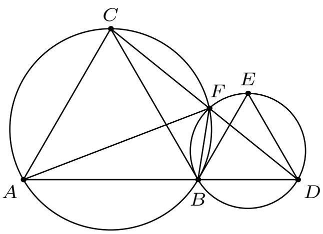


Rys. 10.40

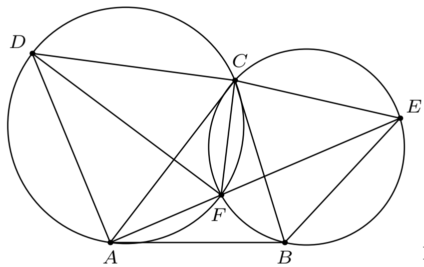
93. Trójkąty równoboczne ABC i BDE są położone tak, że punkt B leży wewnątrz odcinka AD oraz wierzchołki C i E leżą po tej samej stronie prostej AD. Okręgi opisane na tych trójkątach przecinają się w punktach B i F. Udowodnij, że punkty C, F i D są współliniowe.

Rozwiązanie. Połączmy punkt F z punktami A, B, C i D (rys. 10.41). Chcemy udowodnić, że $\measuredangle CFD = 180°$. Punkt F leży na okręgu opisanym na trójkącie ABC. Zatem

$\measuredangle CFA = \measuredangle CBA = 60°$ oraz $\measuredangle AFB = \measuredangle ACB = 60°$. Ponieważ punkt F leży też na okręgu opisanym na trójkącie BDE, więc $\measuredangle BFD = \measuredangle BED = 60°$. Stąd wynika, że $\measuredangle CFD = \measuredangle CFA + \measuredangle AFB + \measuredangle BFD = 180°$. Punkty C, F i D są więc współliniowe.



Rys. 10.41



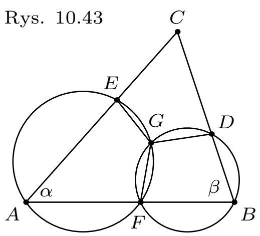
Rys. 10.42

94. Na bokach AC i BC trójkąta ABC zbudowano, na zewnątrz trójkąta, dwa trójkąty równoboczne ACD i BCE. Okręgi opisane na tych trójkątach równobocznych przecinają się w punktach C i F. Udowodnij, że punkty A, F i E są współliniowe.

Rozwiązanie. Połączmy punkt F z punktami A, D, C i E (rys. 10.42). Chcemy udowodnić, że $\measuredangle AFE = 180°$. Punkt F leży na okręgu opisanym na trójkącie ACD. Zatem $\measuredangle AFD = \measuredangle ACD = 60°$ i $\measuredangle DFC = \measuredangle DAC = 60°$. Ponieważ punkt F leży też na okręgu opisanym na trójkącie BCE, więc $\measuredangle CFE = \measuredangle CBE = 60°$. Stąd wynika, że $\measuredangle AFE = \measuredangle AFD + \measuredangle DFC + \measuredangle CFE = 180°$. Punkty A, F i E są więc współliniowe.

95. Na bokach BC, AC i AB trójkąta ABC wybrano odpowiednio punkty D, E i F. Okręgi opisane na trójkątach AFE i BDF przecinają się w punktach F i G. Udowodnij, że $\measuredangle DGE = \measuredangle BAC + \measuredangle ABC$.

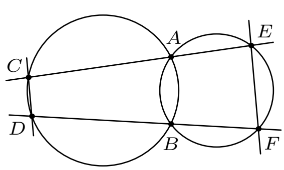
Rys. 10.43



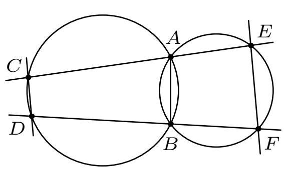
Rozwiązanie. Oznaczmy kąty BAC i ABC literami α i β. Połączmy punkt G z punktami D, E i F (rys. 10.43). Czworokąt $AFGE$ jest wpisany w okrąg, więc $\measuredangle EGF = 180° - \alpha$. Podobnie pokazujemy, że $\measuredangle DGF = 180° - \beta$. Stąd otrzymujemy

$$\begin{aligned}\measuredangle DGE &= 360° - \measuredangle EGF - \measuredangle DGF = \\ &= 360° - (180° - \alpha) - (180° - \beta) = \alpha + \beta.\end{aligned}$$

96. Dwa okręgi przecinają się w punktach A i B. Prosta przechodząca przez punkt A przecina te okręgi w punktach C i E różnych od A; prosta przechodząca przez punkt B przecina te okręgi w punktach D i F różnych od B (rys. 10.36). Udowodnij, że proste CD i EF są równoległe.



Rys. 10.36

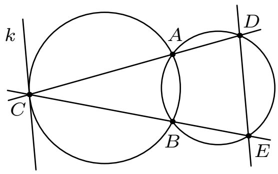


Rys. 10.44

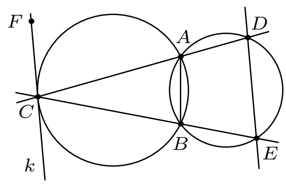
Rozwiązanie. Narysujmy odcinek AB (rys. 10.44). Czworokąt $CDBA$ jest wpisany w okrąg. Stąd wynika, że $\measuredangle BAC = 180° - \measuredangle CDB$. Kąty BAC i BAE są przyległe, więc

$\measuredangle CDB = \measuredangle BAE$. Czworokąt $ABFE$ jest wpisany w okrąg, więc $\measuredangle BAE + \measuredangle BFE = 180°$. Stąd wynika, że $\measuredangle CDF + \measuredangle DFE = 180°$, a więc proste CD i EF są równoległe.

97. Dwa okręgi przecinają się w punktach A i B. Proste przechodzące przez punkty A i B przecinają jeden z tych okręgów w punkcie C różnym od A i B oraz przecinają drugi okrąg odpowiednio w punktach D i E różnych od A i B. Prosta k jest styczna do pierwszego okręgu w punkcie C (rys. 10.37). Udowodnij, że prosta k jest równoległa do prostej DE.



Rys. 10.37

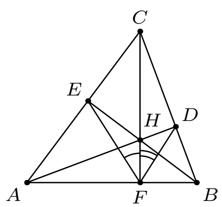


Rys. 10.45

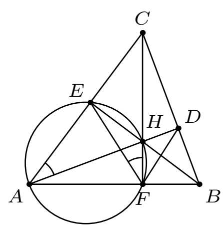
Rozwiązanie. Narysujmy odcinek AB i wybierzmy punkt F na prostej k tak jak na rysunku 10.45. Z twierdzenia o kącie między styczną i cięciwą wynika, że $\measuredangle FCA = \measuredangle CBA$. Ponieważ kąty CBA i EBA są przyległe, więc $\measuredangle FCA + \measuredangle EBA = 180°$. Czworokąt $ABED$ jest wpisany w okrąg, więc $\measuredangle EBA + \measuredangle EDA = 180°$. Stąd wynika, że $\measuredangle FCA = \measuredangle EDA$. Równość tych kątów naprzemianległych dowodzi, że proste CF i DE są równoległe.

98. W trójkącie ostrokątnym ABC poprowadzono wysokości AD, BE i CF. Udowodnij, że półproste DA, EB i FC są dwusiecznymi kątów trójkąta DEF.

Rozwiązanie. Chcemy udowodnić, że na przykład półprosta FC jest dwusieczną kąta DFE, czyli, że $\measuredangle CFE = \measuredangle CFD$ (rys. 10.46). Zauważmy, że $\measuredangle AEH = \measuredangle AFH = 90°$. Stąd wynika, że punkty A, F, H i E leżą na jednym okręgu (rys. 10.47).

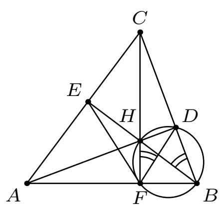


Rys. 10.46

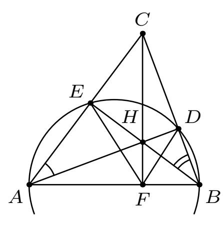


Rys. 10.47

Zatem $\measuredangle CFE = \measuredangle CAD$, gdyż są to kąty wpisane oparte na tym samym łuku EH. Następnie zauważmy, że $\measuredangle BDH = \measuredangle BFH = 90°$, a więc punkty B, F, H i D leżą na jednym okręgu (rys. 10.48). Zatem $\measuredangle CFD = \measuredangle CBE$, gdyż są to kąty wpisane oparte na tym samym łuku DH. Wreszcie z zadania 91 wynika, że punkty A, B, D i E leżą na jednym okręgu (rys. 10.49).



Rys. 10.48



Rys. 10.49

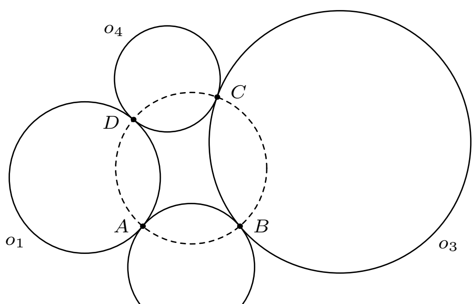
Stąd wynika, że $\measuredangle CAD = \measuredangle CBE$, gdyż są to kąty wpisane oparte na tym samym łuku DE. Zatem

$$\measuredangle CFE = \measuredangle CAD = \measuredangle CBE = \measuredangle CFD.$$

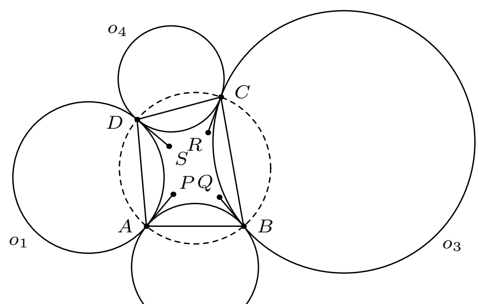
To kończy dowód.

Uwaga. Rozwiązanie tego zadania zostało pokazane w sposób niezwykle szczegółowy. To zadanie rzeczywiście omawiam z uczniami bardzo dokładnie. Pokazuje ono bardzo dobrze, w jaki sposób wykorzystujemy w zadaniach okręgi przechodzące przez cztery punkty. Rozwiązanie można bardzo prosto pokazać na trzech ostatnich rysunkach — takie rozwiązanie właśnie pokazuję moim uczniom. Rysunki okręgów zapadają dobrze w pamięć i uczniowie łatwiej dostrzegają potem podobne sytuacje w innych zadaniach. Zauważmy, że ostatnią równość kątów $\measuredangle CAD = \measuredangle CBE$ można udowodnić jeszcze inaczej. Kąt CAD jest kątem ostrym trójkąta prostokątnego ADC, zatem $\measuredangle CAD = 90° - \measuredangle ACB$. Natomiast kąt CBE jest kątem ostrym trójkąta BEC i znów mamy $\measuredangle CBE = 90° - \measuredangle ACB$. Istnieje jeszcze inny dowód, wystarczy przyjrzeć się kątom trójkątów prostokątnych AHE i BHD. Uczniowie łatwiej dostrzegają te dwa ostatnie dowody. Pokazałem pierwszy, by dokładniej zwrócić uwagę na zastosowania okręgów opisanych na czworokątach. Oczywiście, niezależnie od dowodu znalezionego przez uczniów, na lekcji pokazuję wszystkie trzy dowody.

99. Dane są cztery okręgi o_1, o_2, o_3 i o_4. Okręgi o_1 i o_2 są styczne zewnętrznie w punkcie A, okręgi o_2 i o_3 są styczne zewnętrznie w punkcie B, okręgi o_3 i o_4 są styczne zewnętrznie w punkcie C, okręgi o_4 i o_1 są styczne zewnętrznie w punkcie D (rys. 10.38). Udowodnij, że punkty A, B, C i D leżą na jednym okręgu.



Rys. 10.38



Rys. 10.50

Rozwiązanie. Przyjrzyjmy się czworokątowi $ABCD$. Pokażemy, że można na nim opisać okrąg. W tym celu narysujmy odcinki wspólnych stycznych do okręgów w punktach A, B, C i D (rys. 10.50). Z równości kątów między stycznymi i cięciwą wynika, że:

$$\measuredangle PAB = \measuredangle QBA, \quad \measuredangle QBC = \measuredangle RCB, \quad \measuredangle RCD = \measuredangle SDC, \quad \measuredangle RDA = \measuredangle PAD.$$

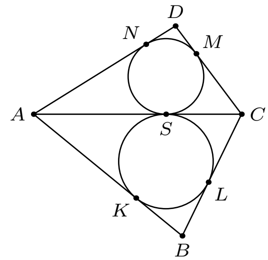
Mamy zatem

$$\begin{aligned} \measuredangle BAD + \measuredangle BCD &= \measuredangle PAB + \measuredangle PAD + \measuredangle RCB + \measuredangle RCD = \\ &= \measuredangle QBA + \measuredangle SDA + \measuredangle QBC + \measuredangle SDC = \\ &= \measuredangle QBA + \measuredangle QBC + \measuredangle SDA + \measuredangle SDC = \\ &= \measuredangle ABC + \measuredangle ADC. \end{aligned}$$

Stąd wynika, że na czworokącie $ABCD$ można opisać okrąg.

100. W czworokącie wypukłym $ABCD$ poprowadzono przekątną AC. Okręgi wpisane w trójkąty ABC i ACD są styczne zewnętrznie. Udowodnij, że w czworokąt $ABCD$ można wpisać okrąg.

Rozwiązanie. Niech okrąg wpisany w trójkąt ABC będzie styczny do boków tego trójkąta w punktach K, L i S i niech okrąg wpisany w trójkąt ACD będzie styczny do boków tego trójkąta w punktach S, M i N, tak jak na rysunku 10.51. Mamy wówczas (na podstawie twierdzenia o równości odcinków stycznych):



Rys. 10.51

$$AK = AS = AN, \; CL = CS = CM, \; BK = BL, \; DM = DN.$$

Stąd

$$AB + CD = AK + BK + CM + DM = AN + BL + CL + DN = AD + BC,$$

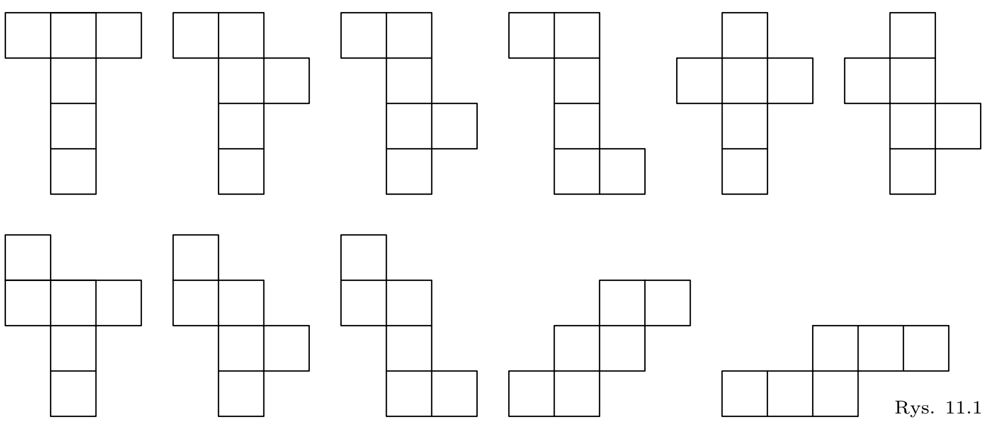
co dowodzi, że w czworokąt $ABCD$ można wpisać okrąg.

Uwaga. Można udowodnić, że jeśli w czworokąt wypukły $ABCD$ można wpisać okrąg, to okręgi wpisane w trójkąty ABC i ACD są styczne zewnętrznie.

11. Stereometria

Nauka stereometrii w gimnazjum sprowadza się do badania własności kilku najprostszych brył (graniastosłup i ostrosłup prawidłowy, walec, stożek i kula), w tym do obliczania pól powierzchni i objętości, wraz z ewentualną zamianą jednostek. To bardzo ubogi program, który w liceum zostaje rozszerzony o rozpoznawanie kątów w bryłach (kąt między prostymi w przestrzeni, między prostą i płaszczyzną oraz między płaszczyznami), badanie przekrojów brył i zastosowanie trygonometrii. Wydaje się, że tym, czego najbardziej brakuje w początkowym nauczaniu stereometrii, jest wyrobienie u ucznia wyobraźni przestrzennej oraz obycia z bardziej nieregularnymi bryłami.

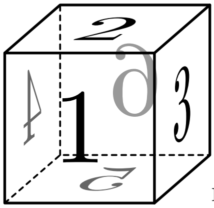
Zajmijmy się najpierw wyobraźnią przestrzenną. Lekcje stereometrii rozpoczynam od zabaw ze znanym obiektem — kostką sześcienną. Czym jest sześcian, uczniowie dobrze wiedzą ze szkoły podstawowej. Wiedzą też, co to jest siatka sześcianu i na ogół wiedzą, że sześcian ma wiele różnych siatek. Pierwsze ćwiczenie, które daję uczniom na lekcji, polega na narysowaniu możliwie wielu siatek sześcianu. Rzadko się zdarza, by któryś uczeń umiał narysować wszystkie (jest ich 11). Zazwyczaj potrafią narysować od 6 do 9 różnych siatek. Czasem zdarza się też, że rysują wielokrotnie te same siatki (na przykład siatkę i jej odbicie symetryczne lub po prostu dwukrotnie tę samą siatkę). Jednak na ogół zdarza się, że każda siatka zostanie narysowana przez któregoś z uczniów. W ten sposób mamy utworzoną na lekcji pełną listę siatek sześcianu. Na rysunku 11.1 widzimy te siatki (będą one potrzebne w wielu następnych zadaniach, dlatego na końcu lekcji rozdaję uczniom kartki z wydrukowanymi wszystkimi siatkami):



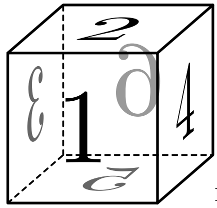
Rys. 11.1

Teraz definiuję uczniom prawidłową kostkę do gry. Na ścianach sześciennej kostki są zapisane liczby od 1 do 6 w taki sposób, by sumy liczb na przeciwległych ścianach były równe 7. Tak więc, naprzeciwko 1 leży 6, naprzeciwko 2 leży 5 i naprzeciwko 3 leży 4. Pierwsze zadanie polega na zbadaniu, ile jest różnych prawidłowych kostek, przy czym interesuje nas tylko, jaka liczba jest na danej ścianie, a nie jak została na tej ścianie zapisana. Tym zajmiemy się później.

Okazuje się, że istnieje 16 różnych prawidłowych kostek do gry. Jak je policzyć? Otóż ustawiamy kostkę tak, by w naszą stronę była zwrócona ściana z liczbą 1. Po ustawieniu kostki możemy nazwać jej ściany — ściana przednia to ściana zwrócona do nas (a więc z liczbą 1). Pozostałe ściany dostaną oczywiste nazwy: tylna, lewa, prawa, dolna i górna. Liczba 6 znajduje się zatem na ścianie tylnej. Możemy następnie przekręcić kostkę (wokół osi poziomej przechodzącej przez środki przedniej i tylnej ściany) tak, by liczba 2 była na ścianie górnej; liczba 5 znajdzie się więc na ścianie dolnej. Mamy teraz dwie możliwości, albo liczba 3 jest na ścianie prawej i liczba 4 na lewej (rys. 11.2), albo odwrotnie (rys. 11.3).



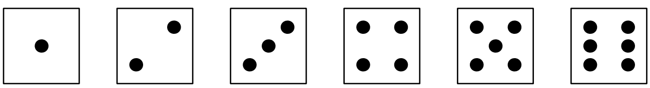
Rys. 11.2



Rys. 11.3

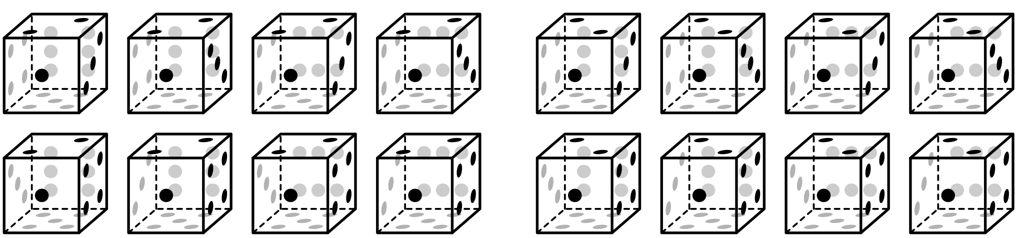
Zauważmy, że jeśli popatrzymy na kostkę od strony wierzchołka, w którym schodzą się ściany z numerami 1, 2 i 3, to na pierwszej z kostek liczby te występują w kolejności zgodnej z ruchem wskazówek zegara, na drugiej zaś, w kolejności przeciwnej do ruchu wskazówek zegara. Tę pierwszą kostkę nazwiemy kostką **prawoskrętną**, drugą zaś, kostką **lewoskrętną**.

Tradycyjnie na ścianach kostki nie piszemy liczb, ale umieszczamy kropki, od jednej do sześciu. Te kropki nie są umieszczone dowolnie na ściance, ale według tradycyjnych wzorów (rys. 11.4).



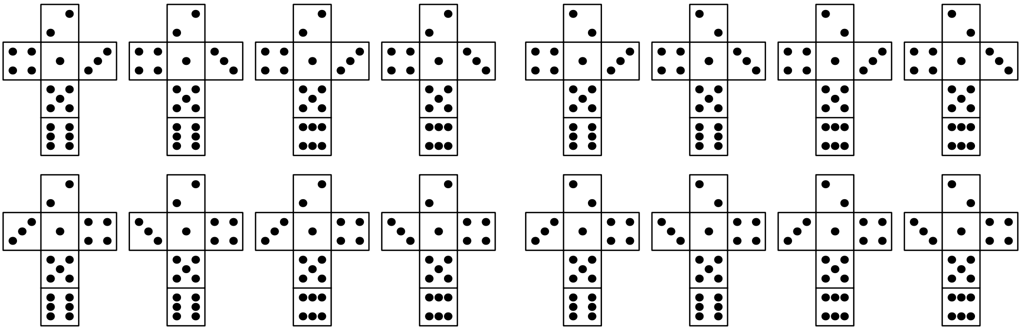
Rys. 11.4

Zauważmy, że obrót o 90° ścianki z jedną, czterema i pięcioma kropkami, nie zmienia wzoru. Obrót pozostałych trzech zmienia wzór (nie ma przy tym znaczenia, w którą stronę obracamy ściankę). Ustawmy teraz kostkę w takim położeniu, jak poprzednio: jedynka na ściance przedniej, szóstka na tylnej, dwójka na górnej i piątka na dolnej. Najpierw rozpatrzmy kostkę prawoskrętną: trójka jest na ściance prawej, a czwórka na lewej. Ścianki z dwiema, trzema i sześcioma kropkami mogą być w jednym z dwóch położeń, to daje łącznie 8 kostek prawoskrętnych. W podobny sposób pokazujemy, że istnieje 8 kostek lewoskrętnych. Mamy zatem 16 rodzajów prawidłowych kostek z tradycyjnym oznaczeniem ścianek (rys. 11.5).



Rys. 11.5

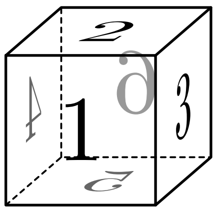
A oto siatki tych 16 kostek (rys. 11.6).



Rys. 11.6

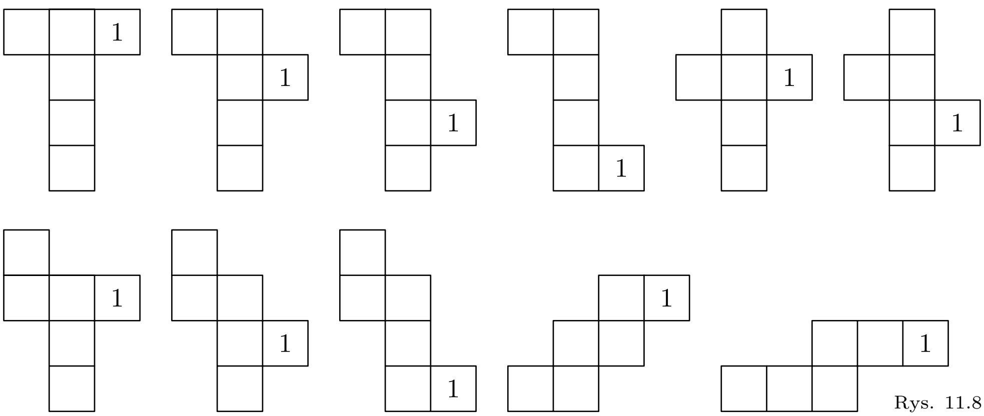
Teraz przychodzi pora na zadania dla uczniów. Oto pierwsze z nich.

Zadanie 1. Dana jest kostka prawoskrętna (rys. 11.7):



Rys. 11.7

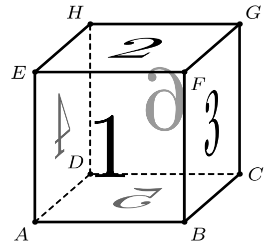
Na następujących siatkach sześcianu uzupełnij brakujące liczby (we właściwych położeniach):



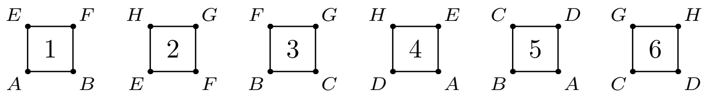
Rys. 11.8

Uczniowie na ogół mają trudności z prawidłowym rozwiązaniem tego zadania. Niektórzy z nich próbują sobie wyobrazić, co się stanie z siatką sześcianu, gdy zaczniemy ją składać i tworzyć sześcian w przestrzeni. Jednak najczęściej mylą się przy tym. Jeden z najczęstszych błędów polega na tym, że niektóre cyfry rysują nie tylko przekręcone, ale także odbite symetrycznie. Nie uświadamiają sobie, że po złożeniu siatki wszystkie liczby będziemy nadal widzieli z tej samej strony — zewnętrznej. Inni rysują większe siatki, wycinają je i składają z nich sześcian. Tym uczniom tłumaczę, że w ćwiczeniu nie chodzi o to, ale o wyrobienie wyobraźni, która nie raz będzie jeszcze potrzebna.

Na zakończenie pokazuję uczniom rozwiązanie, w którym potrzebna jest znacznie mniejsza wyobraźnia, ale zastępuje ją dobre zrozumienie tego, jak naprawdę wyglądają siatki sześcianu i co w nich jest zachowane. Oto takie rozwiązanie. Oznaczmy wierzchołki kostki prawoskrętnej literami A, B, C, D, E, F, G i H (rys. 11.9). Wtedy ściany kostki mają następujące oznaczenia (rys. 11.10).

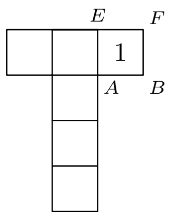


Rys. 11.9

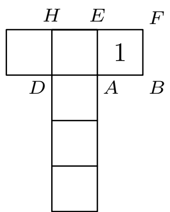


Rys. 11.10

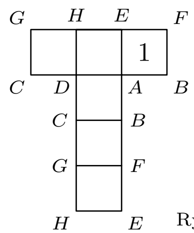
Weźmy teraz pierwszą z 11 kostek i oznaczmy literami A, B, E i F wierzchołki ściany, na której jest wpisana liczba 1 (rys. 11.11). Ściana $ABFE$ graniczy (przez krawędź AE ze ścianą $DAEH$. To pozwala oznaczyć na naszej siatce następne dwa wierzchołki (rys. 11.12). Postępując w ten sposób możemy oznaczyć wierzchołki wszystkich sześciu ścian (rys. 11.13). Teraz już łatwo wpisujemy brakujące liczby we właściwych miejscach (rys. 11.14).



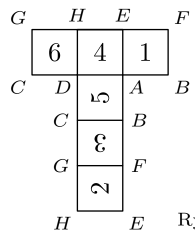
Rys. 11.11



Rys. 11.12



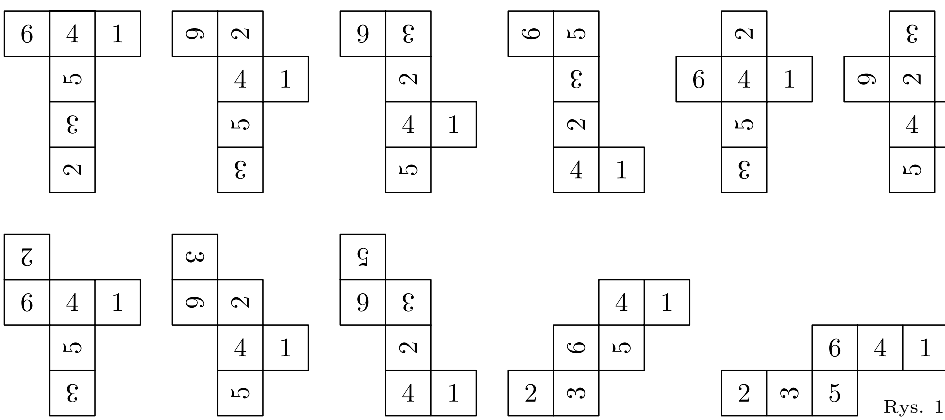
Rys. 11.13



Rys. 11.14

Podobne rozwiązanie można przeprowadzić dla każdej z pozostałych 10 siatek. Oto wszystkie rozwiązania zebrane razem (rys. 11.15).

Rozwiązanie:



Rys. 11.15

Jak wspomniałem wyżej, to rozwiązanie wymaga od ucznia znacznie mniej wyobraźni przestrzennej, za to wymaga pewnych umiejętności. Wyobraźnię przestrzenną należy ćwiczyć i można ją u ucznia w znacznym stopniu wyrobić. Myślę jednak, że umiejętność rzeczywistego wyobrażenia sobie złożonych sytuacji przestrzennych, jest w jakimś stopniu wrodzona — tak jak na przykład słuch muzyczny. Wielu uczniów widzi od razu to, czego inni nie są w stanie dostrzec. Ci drudzy muszą zastąpić swoją niemożność odpowiednimi umiejętnościami.

Pewnego razu moja żona rozwiązywała z uczniami klasy maturalnej zadanie polegające na obliczeniu promienia dwóch identycznych kul stycznych zewnętrznie takich, że każda z nich była styczna do trzech ścian sześcianu schodzących się w przeciwległych wierzchołkach. Środki tych kul leżały na głównej przekątnej sześcianu, a punkt styczności był oczywiście środkiem sześcianu. Krawędź sześcianu miała długość 1. Jeden uczeń, wybierający się na studia architektoniczne, bardzo dobrze rysował. Podszedł do tablicy i wykonał znakomity rysunek tego sześcianu z dwiema wpisanymi kulami. Wszyscy doskonale na tym rysunku widzieli całą sytuację. Wtedy powiedział — Nie mam pojęcia, jak obliczyć promień tych kul, ale na oko, jest on trochę mniejszy od 0,35. Prawidłowa odpowiedź jest następująca:

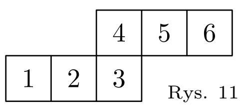
$$r = \frac{3-\sqrt{3}}{4} \approx 0{,}317.$$

Chciałbym mieć taką wyobraźnię przestrzenną. Sam na pewno nie potrafiłbym oszacować promienia tych kul z dokładnością do trzech setnych, chociaż potrafię go obliczyć.

Jednym z ważniejszych celów nauczania geometrii przestrzennej jest więc, moim zdaniem, nauczenie uczniów widzenia tego, co w sytuacji przestrzennej jest ważne i co pomaga przeprowadzić odpowiednie rozumowanie. To nie to samo, co wyobraźnia przestrzenna. Jest to na pewno znacznie mniej, ale za to jest to możliwe do osiągnięcia dla większości uczniów.

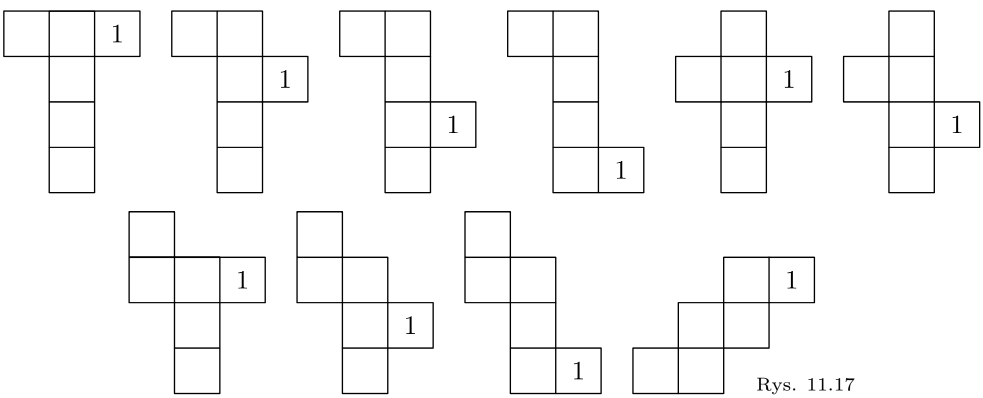
Podobne zadanie, sprawdzające w istocie to, czego nauczyłem w poprzednim, polega na przerysowaniu jednej siatki na drugą:

Zadanie 2. Na ścianach jednej z 11 siatek sześcianu wpisano liczby od 1 do 6 (rys. 11.16).



Rys. 11.16

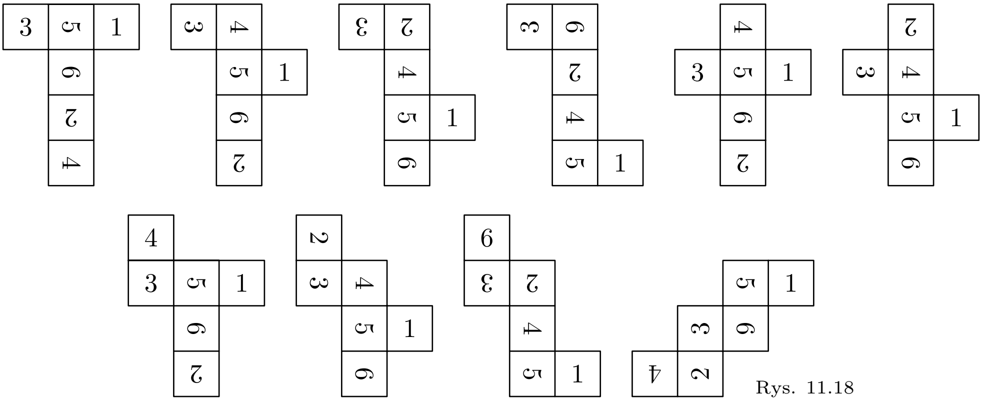
Na pozostałych siatkach sześcianu wpisz brakujące liczby (rys. 11.17).



Rys. 11.17

Nie będę tu powtarzał całego rozumowania. Jest ono takie samo, jak w zadaniu 1. Pokażę tylko ostateczne rysunki (rys. 11.18).

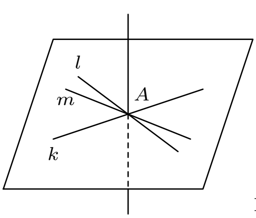
Rozwiązanie.



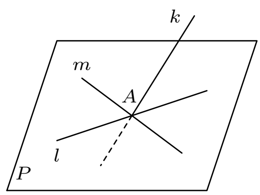
Rys. 11.18

Po tych ćwiczeniach wstępnych przechodzę do systematycznego nauczania geometrii przestrzennej. Omawiam z uczniami podstawowe pojęcia: punkty, proste i płaszczyzny w przestrzeni. Rozmawiamy o tym, jak te figury mogą być położone w przestrzeni. Dwa punkty wyznaczają prostą, trzy punkty niewspółliniowe wyznaczają płaszczyznę. A co jeszcze może wyznaczyć płaszczyznę? Prosta i punkt nieleżący na niej, dwie przecinające się proste i dwie proste równoległe. Pewnym zaskoczeniem dla uczniów bywa to, że istnieją proste nierównoległe i jednocześnie nieprzecinające się. Są to proste skośne. Potem omawiam położenie punktu i płaszczyzny, prostej i płaszczyzny oraz wreszcie dwóch płaszczyzn. Trudnym ćwiczeniem okazuje się znalezienie wszystkich możliwych położeń trzech płaszczyzn.

Następnie podaję uczniom (bez dowodu) dwa ważne twierdzenia. Pierwsze to twierdzenie o prostej prostopadłej do płaszczyzny: jeśli prosta przebijająca płaszczyznę w punkcie A jest prostopadła do dwóch prostych k i l na tej płaszczyźnie i przechodzących przez punkt A, to jest prostopadła do każdej prostej m leżącej na tej płaszczyźnie i przechodzącej przez punkt A (rys. 11.19). Tę prostą przebijającą płaszczyznę nazywamy prostą prostopadłą do płaszczyzny. W przyszłości będziemy omawiać dokładniej proste skośne i kąt między takimi prostymi. Wtedy to twierdzenie rozszerzymy, pozbywając się ograniczenia, że proste na danej płaszczyźnie przechodzą przez punkt A: jeśli prosta przebijająca płaszczyznę jest prostopadła do dwóch nierównoległych prostych na tej płaszczyźnie, to jest prostopadła do wszystkich prostych na tej płaszczyźnie.



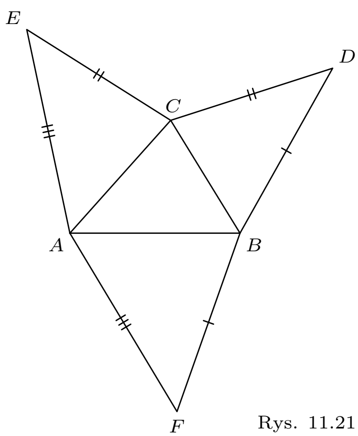
Rys. 11.19



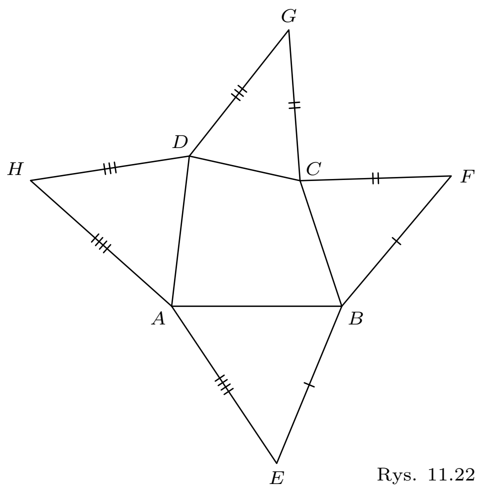
Rys. 11.20

Drugie twierdzenie, które omawiam z uczniami, to twierdzenie o trzech prostopadłych. Dana jest płaszczyzna P, prosta k przebijająca płaszczyznę P w punkcie A i nieprostopadła do P, prosta l będąca rzutem prostej k na płaszczyznę P oraz prosta m leżąca na płaszczyźnie P. Wówczas proste k i m są prostopadłe wtedy i tylko wtedy, gdy proste l i m są prostopadłe (rys. 11.20).

Twierdzenie o trzech prostopadłych ilustruję za pomocą następującego ćwiczenia. Proszę uczniów o narysowanie dwóch siatek ostrosłupów. Pierwszy to ostrosłup o podstawie trójkątnej, drugi o podstawie czworokątnej. Wymagam, by podstawy nie były wielokątami o żadnych szczególnych własnościach, trójkąt ma mieć wszystkie boki różnej długości, czworokąt także i ponadto nie może mieć kątów prostych. Ponadto proszę, by ściany boczne nie były trójkątami równobocznymi, dokładniej, by krawędzie boczne miały różne długości. Wymagam tylko, by te siatki spełniały warunek konieczny na to, by dały się skleić. Te boki trójkątów tworzących ściany boczne, które mają zostać sklejone ze sobą, muszą mieć tę samą długość. Oto przykłady takich siatek: na rysunku 11.21 mamy siatkę ostrosłupa trójkątnego, na rysunku 11.22 mamy siatkę ostrosłupa czworokątnego.



Rys. 11.21



Rys. 11.22

A oto wymiary tych siatek (na powyższych rysunkach są one czterokrotnie zmniejszone). Najpierw ostrosłup trójkątny z rysunku 11.21:

$$AB = 9\,\text{cm}, \quad BC = 7\,\text{cm}, \quad AC = 8\,\text{cm}.$$

Ponadto

$$BF = BD = 10\,\text{cm}, \quad CD = CE = 9\,\text{cm}, \quad AF = AE = 11\,\text{cm}.$$

Następnie ostrosłup czworokątny z rysunku 11.22:

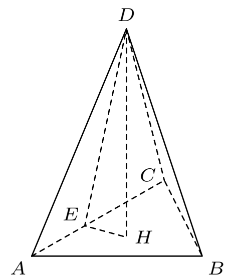
$$AB = 9\,\text{cm}, \quad BC = 7\,\text{cm}, \quad CD = 6\,\text{cm}, \quad AD = 8\,\text{cm}.$$

Ponadto

$$BE = BF = 9\,\text{cm}, \quad CF = CG = 8\,\text{cm}, \quad DG = DH = 8{,}5\,\text{cm}, \quad AH = AE = 10\,\text{cm}.$$

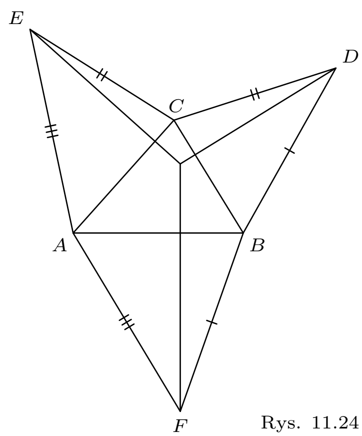
Aby tę siatkę ostrosłupa czworokątnego narysować jednoznacznie, podaję także długość przekątnej AC: 9,5 cm (przypominam, że długości boków czworokąta nie wyznaczają go jednoznacznie).

Okazuje się, że tak zrobiona siatka ostrosłupa trójkątnego daje się skleić i rzeczywiście otrzymujemy ostrosłup trójkątny. Natomiast, ku wielkiemu zdziwieniu uczniów, siatka ostrosłupa czworokątnego, mimo iż zrobiona według tych samych reguł, nie skleja się. Ściany boczne „mijają się”, nie schodzą się wszystkie w jednym wierzchołku. Dlaczego tak się dzieje? Popatrzmy na sklejony ostrosłup trójkątny (rys. 11.23), w ostrosłupie czworokątnym będzie tak samo. Niech punkt H będzie spodkiem wysokości opuszczonej z wierzchołka D na podstawę ABC ostrosłupa. Niech DE będzie wysokością ściany bocznej ACD. Wówczas półprosta EH jest rzutem półprostej ED na płaszczyznę podstawy. Ponieważ $AC \perp DE$, więc z twierdzenia o trzech prostopadłych otrzymujemy $EH \perp AC$. Stąd wynika, że jeśli ścianę boczną ACD odłożymy na płaszczyznę podstawy (tak jak to się dzieje z siatką ostrosłupa), to półproste EH i ED przedłużą się i będą tworzyły jedną prostą prostopadłą do krawędzi AC. Ta prosta oczywiście przechodzi przez wierzchołek D trójkąta ACD. To znaczy, że jeśli z wierzchołków ścian bocznych siatki poprowadzimy prostopadłe do boków trójkąta podstawy, to otrzymane proste przetną się w jednym punkcie: spodku wysokości ostrosłupa. Tak będzie niezależnie od liczby boków podstawy.

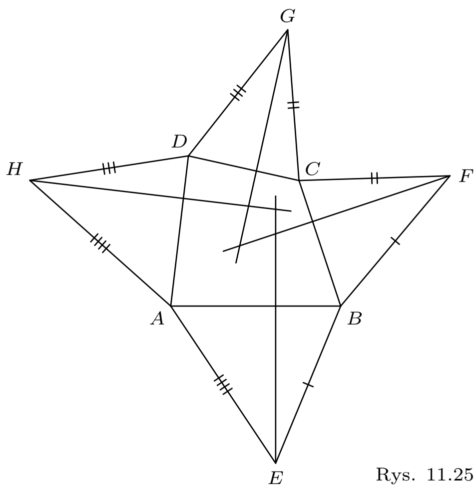


Rys. 11.23

Popatrzmy zatem, jak to jest na naszych przykładowych siatkach. W przypadku siatki trójkątnej te prostopadłe rzeczywiście spotykają się w jednym punkcie (rys. 11.24).



Rys. 11.24



Rys. 11.25

To nie jest przypadek. Prawdziwe jest bowiem następujące twierdzenie.

Twierdzenie. Dany jest sześciokąt $AFBDCEA$ taki, że $AF = AE$, $BF = BD$ oraz $CD = CE$. Wówczas proste poprowadzone przez punkty D, E i F, prostopadłe odpowiednio do prostych BC, AC i AB, przecinają się w jednym punkcie.

To twierdzenie wynika na przykład z twierdzenia Carnota (zob. [Guzicki-Pompe-1]) i można je udowodnić także dla sześciokąta niekoniecznie wypukłego.

A jak to jest w przypadku naszej siatki ostrosłupa czworokątnego? Poprowadźmy takie same półproste. Widzimy, że nie przecinają się one w jednym punkcie (rys. 11.25), a więc ta siatka nie jest siatką ostrosłupa. Siatkę ostrosłupa czworokątnego należy rysować zupełnie inaczej. Musimy zadbać o to, by te półproste prostopadłe do boków czworokąta przecięły się w jednym punkcie. Najprościej jest zacząć od wybrania tego punktu. Oto sposób konstruowania siatki:

- Rysujemy czworokąt $ABCD$, który będzie podstawą ostrosłupa.
- Wybieramy punkt S, który będzie spodkiem wysokości ostrosłupa.
- Z punktu S prowadzimy cztery prostopadłe do boków czworokąta.
- Na jednej z tych półprostych (na przykład na półprostej przecinającej bok AB) wybieramy punkt E, który będzie wierzchołkiem ostrosłupa.
- Następnie na pólprostej prostopadłej do boku BC wybieramy punkt F tak, by $BE = BF$.
- Na półprostej prostopadłej do boku CD wybieramy punkt G tak, by $CF = CG$.
- Wreszcie na prostopadłej do boku AD wybieramy punkt H tak, by $DG = DH$.
- Rysujemy siatkę ostrosłupa.

Powstaje pytanie, czy rzeczywiście otrzymaliśmy siatkę ostrosłupa. Po pierwsze, nie jest jasne, czy odcinki AE i AH mają tę samą długość. Po drugie, nie jest jasne, czy po zagięciu ścian bocznych tak, by punkty E, F, G i H znalazły się nad punktem S, te punkty będą leżały na tej samej wysokości nad płaszczyzną podstawy. Można jednak udowodnić, że rzeczywiście jest to siatka ostrosłupa. Niech punkty P, Q, T i W oznaczają rzuty punktu S na boki czworokąta $ABCD$ (rys. 11.26). Najpierw dowodzimy, że $AE = AH$. Korzystamy wielokrotnie z twierdzenia Pitagorasa, otrzymując wówczas:

$$\begin{aligned}
AE^2 &= AP^2 + PE^2 = AS^2 - SP^2 + PE^2 = AS^2 - (BS^2 - BP^2) + PE^2 = \\
&= AS^2 - BS^2 + BP^2 + PE^2 = AS^2 - BS^2 + BE^2 = AS^2 - BS^2 + BF^2 = \\
&= AS^2 - BS^2 + BQ^2 + QF^2 = AS^2 - (BQ^2 + QS^2) + BQ^2 + QF^2 = \\
&= AS^2 - QS^2 + QF^2 = AS^2 - (CS^2 - CQ^2) + QF^2 = \\
&= AS^2 - CS^2 + CQ^2 + QF^2 = AS^2 - CS^2 + CF^2 = AS^2 - CS^2 + CG^2 = \\
&= AS^2 - CS^2 + CT^2 + TG^2 = AS^2 - (CT^2 + TS^2) + CT^2 + TG^2 = \\
&= AS^2 - TS^2 + TG^2 = AS^2 - (DS^2 - DT^2) + TG^2 = \\
&= AS^2 - DS^2 + DT^2 + TG^2 = AS^2 - DS^2 + DG^2 = AS^2 - DS^2 + DH^2 = \\
&= AS^2 - (DW^2 + WS^2) + DH^2 = AS^2 - DW^2 - WS^2 + DW^2 + WH^2 = \\
&= AS^2 - WS^2 + WH^2 = AS^2 - (AS^2 - AW^2) + WH^2 = AW^2 + WH^2 = \\
&= AH^2.
\end{aligned}$$

Następnie dowodzimy, że punkty E, F, G i H znajdą się na tej samej wysokości nad płaszczyzną podstawy. W tym celu wystarczy pokazać, że

$$PE^2 - PS^2 = QF^2 - QS^2 = TG^2 - TS^2 = WH^2 - WS^2.$$

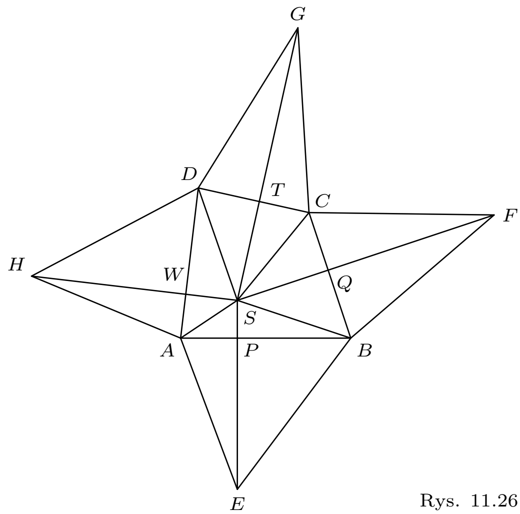
Zauważmy w tym celu, że

$$PE^2 - PS^2 = (BE^2 - BP^2) - (BS^2 - BP^2) = BE^2 - BS^2$$

oraz

$$QF^2 - QS^2 = (BF^2 - BQ^2) - (BS^2 - BQ^2) = BF^2 - BS^2 = BE^2 - BS^2.$$

Pozostałe równości można udowodnić w podobny sposób.

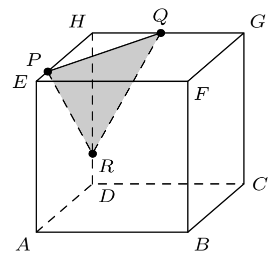


Rys. 11.26

Teraz siatka sklei się i wybrany punkt S okaże się spodkiem wysokości ostrosłupa.

Rozpatrywanie brył nieregularnych jest bardzo ważne. Zazwyczaj w gimnazjum rozważamy wyłącznie graniastosłupy i ostrosłupy prawidłowe. To bardzo ogranicza uczniów, którzy nie wiedzą później, jak postępować z innymi wielościanami. Ten przykład siatek ostrosłupów nieprawidłowych jest bardzo pouczający.

Jest jeszcze jedno ćwiczenie, które robię z uczniami na początku nauki stereometrii. Jest to ćwiczenie polegające na rysowaniu przekrojów sześcianu. Bardzo wielu uczniów nie potrafi prawidłowo narysować wielu rozważanych często wielościanów. Rysowanie przekrojów bardzo dobrze uczy podstawowych reguł, które będą później wykorzystywane przy bardziej skomplikowanych rysunkach.



Rys. 11.27

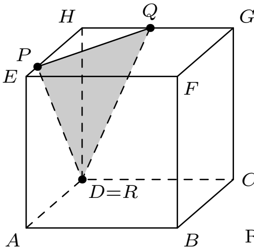
Zadanie, które rozwiązujemy, polega na narysowaniu przekroju sześcianu płaszczyzną wyznaczoną przez trzy punkty leżące na krawędziach sześcianu. Zaczynamy od przekrojów, w których dane są dwa punkty P i Q leżące na krawędziach o wspólnym wierzchołku. Wybieramy te krawędzie tak, by leżały na górnej ścianie sześcianu — punkt P na krawędzi EH i punkt Q na krawędzi GH. Te punkty ustalamy na dłuższy czas. Punkt R będzie wędrował po krawędziach. Zaczynamy od umieszczenia go na krawędzi DH. Przekrój jest trójkątem i na rysunku 11.27 jest to zacieniowany trójkąt PQR.

Przy rysowaniu takich przekrojów będziemy korzystać z następujących zasad:

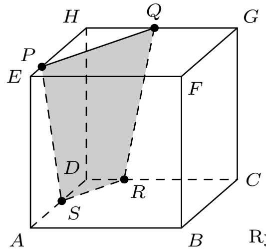
- jeśli dwa punkty płaszczyzny przekroju są położone na jednej ścianie sześcianu, to te punkty wyznaczają krawędź przecięcia i możemy narysować odcinek łączący te punkty na tej ścianie;
- jeśli płaszczyzna przekroju przecina dwie równoległe ściany sześcianu, to krawędzie przekroju na tych ścianach są równoległe w przestrzeni;
- proste równoległe w przestrzeni będą równoległe na rysunku (o ile nie zdegenerują się do punktów).

Przy kolejnych rysunkach przekrojów te zasady okażą się niewystarczające i zostaną uzupełnione o następne. Oczywiście tych zasad nie dowodzę, ścisły dowód wymagałby wyjaśnienia zasad rzutowania równoległego, a na to chyba jest za wcześnie w gimnazjum.

Na rysunku 11.27 płaszczyzna przekroju przecina trzy ściany sześcianu i przekrój jest trójkątem. Tu wystarczyło skorzystać z pierwszej z powyższych trzech zasad. Następnie punkt R będzie wędrował w dół krawędzi DH. W pewnym momencie znajdzie się w punkcie D (rys. 11.28). Przekrój nadal jest trójkątem. Teraz punkt R może poruszać się po krawędziach AD lub CD. Nie ma to znaczenia, wybierzemy krawędź CD (rys. 11.29).



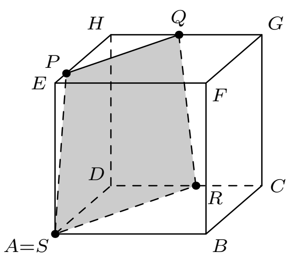
Rys. 11.28



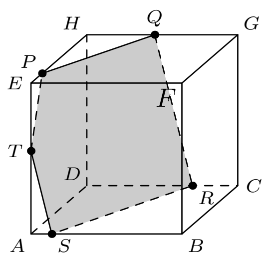
Rys. 11.29

Na rysunku 11.29 skorzystaliśmy z zasad mówiących o równoległych krawędziach przekroju. Przekrój jest trapezem $PQRS$. Proste PQ i RS są równoległe, bo są to krawędzie przecięcia płaszczyzną przekroju płaszczyzn równoległych $ABCD$ i $EFGH$. Oczywiście odcinki QR i PS są rysowane zgodnie z pierwszą regułą. Zauważmy, że punkt S będzie leżał na krawędzi AD.

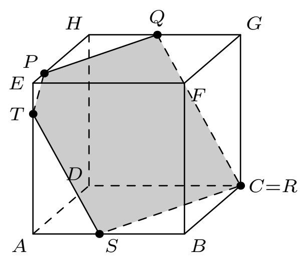
Punkt R będzie dalej wędrował po krawędzi CD. Ponieważ wybraliśmy punkty P i Q tak, że $HQ < HP$, więc krawędź przekroju RS napotka punkt A zanim punkt R dojedzie do punktu C. Bardzo zachęcam Czytelników, by samodzielnie zbadali, co się dzieje przy innym wyborze punktów P i Q na krawędziach EH i GH; szczególnie polecam przypadek, gdy te punkty leżą w jednakowych odległościach od punktu H. W rozważanym przypadku przekrój nadal będzie trapezem $PQRS$, przy czym punkt S będzie się pokrywał z punktem A (rys. 11.30). Gdy punkt R będzie wędrował dalej po krawędzi CD, punkt S będzie przesuwał się wraz z nim po krawędzi AB tak, że odcinki PQ i RS będą równoległe. Przekrój stanie się pięciokątem $PQRST$ (rys. 11.31). Punkt T na krawędzi AE wyznaczamy tak, żeby odcinek ST był równoległy do odcinka QR. Wreszcie punkt R dojdzie do punktu C (rys. 11.32).



Rys. 11.30



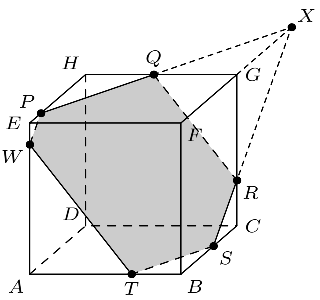
Rys. 11.31



Rys. 11.32

Teraz punkt R może poruszać się po krawędzi CG lub po krawędzi BC. Najpierw popatrzymy, co się dzieje, gdy punkt R powędruje do góry. Bez trudu narysujemy dwa odcinki PQ i QR. Ale gdzie płaszczyzna przekroju przetnie płaszczyznę ściany dolnej?

Ta kwestia wymaga wprowadzenia pewnego punktu pomocniczego. Popatrzymy mianowicie, gdzie płaszczyzna przekroju przetnie prostą FG. Oczywiście będzie to na zewnątrz odcinka FG. Przedłużamy odcinek FG poza punkt G aż do przecięcia z prostą PQ. W przecięciu otrzymujemy pomocniczy punkt X (rys. 11.33). Zastanówmy się, w jakich płaszczyznach leży punkt X. Po pierwsze, musimy zauważyć, że proste PQ i FG naprawdę przecinają się w przestrzeni, nie tylko na rysunku. Obie proste leżą na tej samej płaszczyźnie ściany górnej oraz nie są równoległe. Zatem rzeczywiście się przecinają. Punkt X leży na prostej PQ, a więc leży na płaszczyźnie przekroju. Ponieważ punkt X leży na prostej FG, więc leży na płaszczyznach ścian górnej i prawej. Zauważmy teraz, że punkty R i X leżą na płaszczyźnie przekroju i na płaszczyźnie ściany prawej. A więc prosta XR jest krawędzią przecięcia płaszczyzny przekroju z płaszczyzną prawej ściany. Rysujemy prostą XR aż do przecięcia z innym ograniczeniem ściany prawej — w tym przypadku aż do przecięcia z krawędzią BC. Przekrój będzie sześciokątem. Punkt T wyznaczamy tak, by odcinki PQ i ST były równoległe, a punkt W tak, by odcinki TW i QR były równoległe.

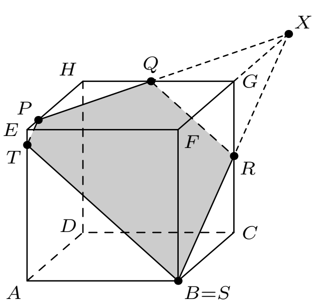


Rys. 11.33

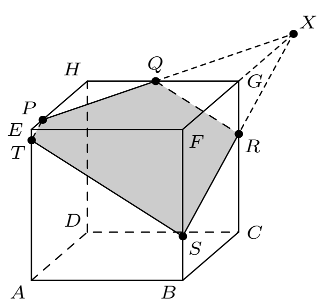
Zasada wprowadzania punktu pomocniczego jest właśnie jedną z tych nowych zasad, o których pisałem na początku.

Teraz popatrzmy, jak zmienia się przekrój, gdy punkt R wędruje dalej w górę krawędzi CG, a także gdy wędruje wzdłuż krawędzi BC w stronę punktu C. Pominę szczegółowe opisy konstrukcji; metodę konstrukcji można w każdym przypadku łatwo odczytać z rysunku.

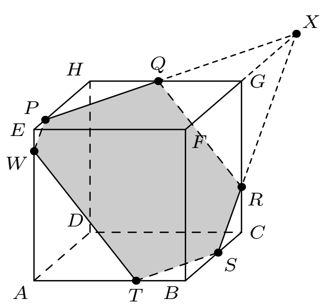
Najpierw rozważamy przypadek, w którym punkt R nadal porusza się w górę krawędzi CG. W pewnym momencie punkt S pokryje się z punktem B (rys. 11.34). Przekrój stanie się pięciokątam. Potem, gdy punkt R w dalszym ciągu będzie się poruszać w górę krawędzi CG, punkt S zacznie wędrować w górę krawędzi BF (rys. 11.35). Przekrój nadal będzie pięciokątem. Następnie popatrzmy na przypadek, w którym punkt R porusza się wzdłuż krawędzi BC od punktu C w kierunku punktu B (rys. 11.36). Przekrój jest sześciokątem.



Rys. 11.34



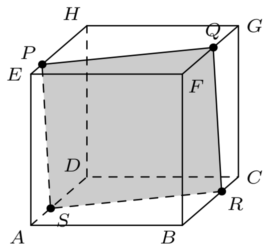
Rys. 11.35



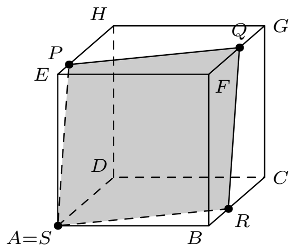
Rys. 11.36

W taki sposób możemy rozważyć wszystkie przypadki położenia punktu R. Przypominam, że dotychczas zajmowaliśmy się sytuacją, w której punkty P i Q leżały na sąsiednich krawędziach ściany górnej sześcianu.

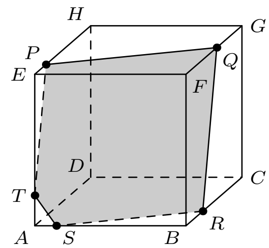
Następnie popatrzmy, jak wygląda przekrój, gdy punkty P i Q leżą na przeciwległych krawędziach górnej ściany sześcianu (rysunki 11.37, 11.38 i 11.39).



Rys. 11.37



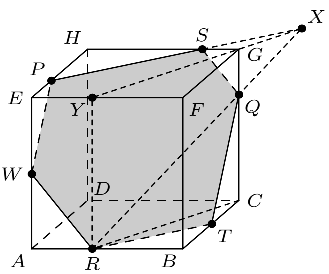
Rys. 11.38



Rys. 11.39

W narysowanych przypadkach przekrój jest czworokątem lub pięciokątem.

Wreszcie umieśćmy punkty P, Q i R na trzech, parami skośnych, krawędziach sześcianu: EH, CG i AB (rys. 11.40). Teraz wprowadzimy dwa punkty pomocnicze. Punkt Y jest rzutem punktu R na krawędź EF. Proste CG i RY są równoległe, a więc wyznaczają płaszczyznę. Ta płaszczyzna odcina od sześcianu graniastosłup o podstawie RBC. Rozważamy teraz graniastosłup o podstawie czworokątnej $ARCD$. Pomocniczy punkt X wprowadzamy tak jak poprzednio, by wyznaczyć przekrój tego graniastosłupa płaszczyzną PQR. Ten punkt X pozwala nam znaleźć punkt S, w którym płaszczyzna przekroju przecina krawędź GH. Po znalezieniu punktu S dalsza konstrukcja jest łatwa i polega na konsekwentnym stosowaniu reguły mówiącej o przecinaniu płaszczyzn równoległych. Szczególnie ciekawy jest przypadek, gdy punkty P, Q i R są środkami krawędzi, na których leżą. Nietrudno udowodnić, że wtedy otrzymany przekrój jest sześciokątem foremnym.



Rys. 11.40

Po takich ćwiczeniach wstępnych przechodzę do omawiania z uczniami tego, co jest w podręczniku gimnazjalnym. Uczę ich obliczania pól powierzchni i objętości graniastosłupów i ostrosłupów oraz wybranych brył obrotowych: walca, stożka i kuli. Przy okazji brył obrotowych warto wspomnieć o tzw. regule Guldina. Mówi ona, że objętość bryły obrotowej powstałej z obrotu figury F wokół osi obrotu k (przy założeniu, że prosta k nie przecina figury F) jest równa

$$V = 2\pi R \cdot P_F,$$

gdzie P_F jest polem figury F, a R jest odległością środka ciężkości figury F od osi k. W tym miejscu należy powiedzieć parę słów o środku ciężkości. Mianowicie, jeśli figura ma środek symetrii, to jest on środkiem ciężkości, jeśli figura ma oś symetrii, to środek ciężkości leży na tej osi symetrii oraz odległość środka ciężkości trójkąta od osi obrotu jest średnią arytmetyczną odległości wierzchołków trójkąta od tej osi.

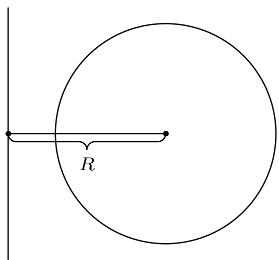
Za pomocą reguły Guldina możemy łatwo obliczyć objętość torusa oraz bryły powstałej przez obrót kwadratu wokół prostej. Pokażę te obliczenia. Najpierw torus powstały przez obrót koła o promieniu r wokół osi odległej o R od środka okręgu (rys. 11.41). Objętość torusa jest równa

$$V = 2\pi R \cdot \pi r^2 = 2\pi^2 R r^2.$$

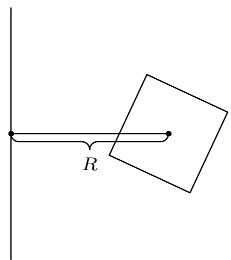
Przypuśćmy teraz, że obracamy kwadrat o boku a wokół osi odległej o R od środka kwadratu. Nie ma przy tym znaczenia, jak bardzo obrócony jest kwadrat wokół swego środka (rys. 11.42). Objętość powstałej bryły obrotowej jest równa

$$V = 2\pi R \cdot a^2.$$

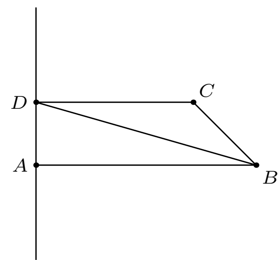
Wreszcie wzór na objętość stożka ściętego powstałego z obrotu trapezu prostokątnego $ABCD$ wokół osi AD (rys. 11.43).



Rys. 11.41



Rys. 11.42



Rys. 11.43

Przyjmijmy

$$AB = R, \quad CD = r, \quad AD = h.$$

Objętość stożka ściętego jest równa sumie objętości dwóch brył obrotowych powstałych z obrotu trójkątów ABD i BCD wokół osi AD. Mamy zatem

$$P_{ABD} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AD = \frac{Rh}{2}, \quad P_{BCD} = \frac{1}{2} \cdot CD \cdot AD = \frac{rh}{2}.$$

Zatem

$$V = 2\pi \cdot \frac{R}{3} \cdot P_{ABD} + 2\pi \frac{R+r}{3} \cdot P_{BCD} = \pi \cdot \frac{R^2 h}{3} + \pi \cdot \frac{rh(R+r)}{3} = \frac{\pi h}{3} \cdot (R^2 + Rr + r^2).$$

Regułę Guldina możemy również zastosować „w drugą stronę”, do wyznaczenia środka ciężkości półkola. Szczegóły pozostawię jako ćwiczenie, podam tylko odpowiedź. Środek ciężkości półkola o promieniu r leży na osi symetrii tego półkola w odległości

$$d = \frac{4}{3\pi} \cdot r$$

od średnicy ograniczającej półkole.

Na zakończenie tego rozdziału chciałbym zarekomendować znakomity podręcznik [Iwaszkiewicz], w którym można znaleźć jeszcze wiele interesujących tematów wartych omówienia w gimnazjum — o ile starczy komuś czasu.

12. Kombinatoryka i rachunek prawdopodobieństwa

Naukę rachunku prawdopodobieństwa rozpoczynam od omówienia w klasie doświadczenia losowego wykonywanego przez uczniów. Proszę uczniów o kupienie pięciu kostek dwudziestościennych (można łatwo takie kupić w dowolnym sklepie z grami). Na ściankach takiej kostki powinny znajdować się wszystkie liczby od 1 do 20. Następnie proszę, by każdy uczeń rzucił 200 razy pięcioma kostkami, zapisując (najlepiej w arkuszu kalkulacyjnym, np. *Excel*) otrzymane wyniki rzutów. Pojedynczy wynik składa się zatem z pięciu liczb, które do arkusza kalkulacyjnego można wpisać w dowolnej kolejności. Ostateczne dane zebrane przez jednego ucznia składają się więc z 200 wierszy po 5 liczb. Zapisane wyniki rzutów wszyscy uczniowie mają następnie przekazać jednemu z uczniów, który dokona ostatecznej obróbki otrzymanych danych.

Pierwsze zadanie polega na policzeniu, ile razy otrzymano pięć różnych liczb, a więc w ilu wierszach wystąpiło 5 różnych liczb (czyli — inaczej mówiąc — żadna liczba się nie powtórzy). Tę liczbę różnych wyników należy następnie podzielić przez liczbę wszystkich rzutów (a więc liczbę uczniów biorących udział w eksperymencie pomnożoną przez 200) i wynik przedstawić w postaci ułamka dziesiętnego. W ten sposób dowiadujemy się, jak często w takim eksperymencie otrzymujemy 5 różnych liczb.

Drugie zadanie polega na wybraniu z każdej piątki największej liczby i obliczeniu średniej arytmetycznej wybranych liczb. Zaprogramowanie w arkuszu kalkulacyjnym obu zadań jest dość prostym zadaniem dla uczniów obeznanych z arkuszem. W II klasie, kiedy ten eksperyment jest wykonywany, mogę założyć, że większość uczniów potrafi takie zadanie wykonać.

Wykonanie całego eksperymentu trwa ok. 2 – 3 tygodni i na ogół zdecydowana większość uczniów bierze w nim udział (zdarzają się uczniowie, którzy z różnych powodów, np. choroby, nie wykonają zadania). Chodzi jednak o to, by uzyskać kilka tysięcy wyników, wtedy wyniki obliczone teoretycznie nie będą odbiegały w znaczący sposób od wyników eksperymentu. Uczniowie czasami pytają mnie, czy zamiast rzucania kostkami mogą wygenerować za pomocą komputera odpowiednią liczbę liczb losowych ze zbioru $\{1, 2, \ldots, 20\}$. Odpowiadam wtedy, że celem eksperymentu jest zbadanie zgodności obliczeń teoretycznych z rzeczywistością i przekonanie uczniów o tej zgodności. Nie jest natomiast celem zbadanie, czy program komputerowy generujący liczby losowe został napisany poprawnie. Mówię im też, że można pokusić się o wypisanie „z głowy” tego ciągu 1000 liczb, nie tracąc przy tym czasu na rzucanie kostkami. Ale wtedy, tak wygenerowane wyniki, będą bardzo różnić się od wyników rzeczywiście losowych — okazuje się bowiem, że człowiek nie potrafi postępować naprawdę losowo i to, co nam się wydaje losowe, na ogół od losowego bardzo się różni. Jeden z moich kolegów daje zadanie domowe: rzucić 200 razy monetą i zapisać wyniki. Oczywiście wielu uczniom nie chce się tracić czasu na rzucanie i wyniki wymyślają w czasie przerwy przed lekcją. Uczniowie są niezwykle zaskoczeni tym, że nauczyciel bezbłędnie oddziela prawdziwe wyniki od oszukanych. Mianowicie patrzy on na długie serie takich samych wyników (orłów czy reszek). Okazuje się, że człowiek próbujący postępować losowo, na ogół nie potrafi wygenerować wielu jednakowych wyników. Natomiast w tak długim doświadczeniu losowym powinno się znaleźć co najmniej kilka takich serii.

Nadchodzi chwila, gdy uczniowie są już gotowi do omówienia zadań. Mają obliczone dwie liczby: pierwszą z nich jest ułamek dziesiętny z przedziału $\langle 0, 1\rangle$, drugą — liczba rzeczywista z przedziału $\langle 1, 20\rangle$. Wtedy jako pierwszy wypisuję na tablicy obliczone wyniki:

0,5814 i 17,15. Okazuje się, że wyniki doświadczenia niewiele różnią się od wyników obliczonych teoretycznie. Oczywiście uczniowie spodziewają się tego, potrafią się bowiem domyślić, że przecież taki jest cel całego eksperymentu. Jednak wielokrotnie byli zaskoczeni dokładnością. Ich pierwsza liczba różniła się od wyniku teoretycznego o kilka setnych, druga o kilka dziesiętnych.

Lekcję, którą rozpocząłem od porównania wyników, przeznaczam na wyjaśnienie, skąd się wywodzi i czym się zajmuje rachunek prawdopodobieństwa. Zwracam uwagę na to, że pierwsze istotne pytania, które spowodowały powstanie rachunku prawdopodobieństwa, dotyczyły gier hazardowych (np. pytania Kawalera de Mèré kierowane do Pascala, zob. np. [Jakubowski-Sztencel]). Pokazuję dwa rodzaje takich pytań. Pierwsze dotyczy tego, jak często zdarzają się pewne zdarzenia losowe, np. uzyskanie określonej konfiguracji w grze w kości. Inaczej mówiąc, pierwsze pytanie, które może zadać sobie hazardzista, to pytanie „jak często będę wygrywał?". Drugie pytanie, znacznie dla niego ważniejsze, to pytanie „ile będę wygrywał?". Oba zadania, które omawialiśmy, dotyczyły tych pytań. W pierwszym zadaniu możemy sobie wyobrazić grę hazardową, w której grający rzuca pięcioma kostkami i wygrywa, gdy otrzyma pięć różnych liczb. Obliczenia teoretyczne i wykonane doświadczenie pokazują, że w takiej grze gracz rzucający kostkami ma przewagę i będzie wygrywał częściej (dokładniej — będzie wygrywał średnio 58 razy w 100 grach). W drugim zadaniu możemy wyobrazić sobie grę hazardową, w której gracz płaci „bankierowi" ustaloną stawkę za prawo rzutu pięcioma kostkami i wygrywa tyle złotych, ile wynosi największa z wyrzuconych pięciu liczb. Jeśli opłata za rzut wynosi np. 17 złotych, to gra będzie niekorzystna dla bankiera (będzie przegrywał średnio ok. 15 groszy w jednym rzucie), jeśli natomiast opłata będzie wynosiła 17,50 zł, to gra będzie korzystna dla bankiera (będzie wygrywał średnio ok. 35 groszy w jednym rzucie). Marek Kordos (zob. [Kordos]) zwraca uwagę na to, że opłaty za prawo rzutu kostkami w XVII wieku (a więc w czasie, gdy Kawaler de Mèré pisał listy do Pascala) były tak skalkulowane, by gra była korzystna dla bankiera, ale przy tym tak, by zysk bankiera nie był zbyt widoczny (czyżby to sugerowało, że przynajmniej niektórzy bankierzy potrafili samodzielnie — tak jak Pascal — odpowiedzieć na niektóre pytania z nieistniejącego przecież jeszcze rachunku prawdopodobieństwa?).

Oba zadania wiążą się też z dwoma znanymi problemami rachunku prawdopodobieństwa. Pierwsze zadanie wiąże się z tzw. paradoksem urodzin, drugie z problemem szacowania nieznanego maksimum i, opisanym w książce [Feller], zadaniem szacowania wielkości produkcji nieprzyjaciela w czasie II wojny światowej. Te dwa zagadnienia omawiam krótko z uczniami. Zwracam uwagę na to, że drugie zadanie (a zwłaszcza jego aspekt wspomniany przez Fellera) ma charakter statystyczny i w związku z tym omawiam krótko zastosowania i znaczenie statystyki. Po takim wstępie przechodzę do omówienia rozwiązań dwóch zadań.

Przede wszystkim podaję (bez formalizmu, który będzie dopiero w liceum) klasyczną definicję prawdopodobieństwa. Mówię, że aby obliczyć prawdopodobieństwo zdarzenia, musimy obliczyć dwie liczby — liczbę wszystkich możliwych wyników doświadczenia losowego oraz liczbę tych wyników, które „nas interesują" (są przedmiotem zadania). W pierwszym zadaniu mamy do obliczenia liczbę wszystkich możliwych piątek liczb od 1 do 20 (takich, jakie zostały wpisane do arkusza kalkulacyjnego) oraz liczbę tych piątek, w których wszystkie liczby są różne. Informuję uczniów (odkładając na później wyjaśnienie, dlaczego te liczby są równe akurat tyle), jakie są wyniki, pierwsza liczba jest równa $20^5 = 3200000$, druga jest równa $20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16 = 1860480$. Szukane prawdopodobieństwo otrzymujemy dzieląc drugą liczbę przez pierwszą. W naszym zadaniu jest ono równe

$$\frac{1860480}{3200000} = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16}{320 \cdot 10000} = \frac{320 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17}{320 \cdot 10000} = \frac{5814}{10000} = 0{,}5814.$$

W tym miejscu tłumaczę uczniom różnicę między taką definicją prawdopodobieństwa, a definicją „częstościową”, czyli taką, jaką chciałby uzyskać np. Kawaler de Mèré. Jemu chodziło o to, by wiedzieć, jak często zdarzy się taki wynik w rzucie kostkami, a nie jaki jest stosunek liczby interesujących wyników do liczby wszystkich wyników. To są dwie różne rzeczy. Mamy zatem tak naprawdę dwie definicje prawdopodobieństwa — definicję „częstościową”, która interesuje nas w zastosowaniach i definicję klasyczną, polegającą na obliczaniu stosunku liczby rozważanych wyników do liczby wszystkich wyników. Doświadczenie, które uczniowie wykonali, ma ich przekonać, że obliczając prawdopodobieństwo według definicji klasycznej, w istocie obliczamy także prawdopodobieństwo „częstościowe”.

Teraz przechodzę do drugiego zadania. Oczywiście uczniowie umieją już obliczyć średnią arytmetyczną wielu liczb. Informuję ich, że w drugim zadaniu mamy do obliczenia właśnie taką średnią arytmetyczną. Musimy sobie wyobrazić, że wypiszemy wszystkie możliwe piątki liczb (pamiętamy, że jest ich 3200000, a więc stanowczo za dużo, by wszystkie rzeczywiście wypisać) i obok każdej piątki napiszemy największą liczbę występującą w tej piątce. To, co mamy obliczyć, to właśnie średnia arytmetyczna tych wszystkich 3200000 liczb wypisanych obok piątek. Ale jak to zrobić w praktyce? Pokazuję prostszy przykład. Rzucamy dwiema kostkami do gry. „Wygraną” jest suma oczek uzyskanych na obu kostkach. Wszystkie wyniki można łatwo wypisać w tabelce (rys. 12.1).

II kostka

I kostka

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Rys. 12.1

Średnią arytmetyczną wszystkich 36 liczb występujących w tabelce umiemy łatwo obliczyć. Na przykład, sumy liczb w kolejnych wierszach są równe: 27, 33, 39, 45, 51, 57. Zatem średnia arytmetyczna jest równa:

$$\frac{27 + 33 + 39 + 45 + 51 + 57}{36} = \frac{252}{36} = 7.$$

Tę średnią można obliczyć inaczej (tak często uczniowie obliczają średnią ocen) — liczba 2 występuje jeden raz, liczba 3 dwa razy, liczba 4 trzy razy i tak dalej. Suma wszystkich liczb w tabelce jest więc równa

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 4 \cdot 5 + 5 \cdot 6 + 6 \cdot 7 + 5 \cdot 8 + 4 \cdot 9 + 3 \cdot 10 + 2 \cdot 11 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 12 = 252.$$

Każdy składnik jest iloczynem dwóch liczb — pierwsza wskazuje, ile razy wystąpiła dana liczba, drugą jest ta liczba. Teraz trzeba podzielić otrzymaną sumę przez liczbę wszystkich liczb, a więc przez 36. Po tym przykładzie możemy powrócić do naszego zadania. Mamy 3200000 liczb, każda z nich jest jedną z liczb od 1 do 20. Musimy umieć obliczyć, ile razy każda z nich wystąpiła. Tu znów tylko podaję uczniom gotowy wzór: liczba k wystąpiła $k^5 - (k-1)^5$ razy. Musimy zatem obliczyć sumę

$$\sum_{k=1}^{20} \left(k^5 - (k-1)^5\right) \cdot k,$$

której oczywiście uczniom gimnazjum w ten sposób nie zapisuję. Proponuję natomiast obliczenie tej liczby za pomocą arkusza kalkulacyjnego. W kolejnych kolumnach arkusza wypisujemy następujące liczby:

- w pierwszej kolumnie wypisujemy (od góry) liczby od 20 do 1;
- w drugiej kolumnie wypisujemy liczby o 1 mniejsze niż w pierwszej kolumnie, tzn. od 19 do 0;
- w trzeciej kolumnie wypisujemy piąte potęgi liczb z pierwszej kolumny, tzn. od 20^5 do 1^5;
- w czwartej kolumnie wypisujemy piąte potęgi liczb z drugiej kolumny, tzn. od 19^5 do 0^5;
- w piątej kolumnie wypisujemy różnice liczb z trzeciej i czwartej kolumny, tzn. od $20^5 - 19^5$ do $1^5 - 0^5$;
- w szóstej kolumnie wypisujemy iloczyny liczb z piątej i pierwszej kolumny, tzn. od $(20^5 - 19^5) \cdot 20$ do $(1^5 - 0^5) \cdot 1$.

Wreszcie pozostaje dodanie liczb z szóstej kolumny i podzielenie wyniku przez 3200000. A oto otrzymana tabelka:

20	19	3200000	2476099	723901	14478020
19	18	2476099	1889568	586531	11144089
18	17	1889568	1419857	469711	8454798
17	16	1419857	1048576	371281	6311777
16	15	1048576	759375	289201	4627216
15	14	759375	537824	221551	3323265
14	13	537824	371293	166531	2331434
13	12	371293	248832	122461	1591993
12	11	248832	161051	87781	1053372
11	10	161051	100000	61051	671561
10	9	100000	59049	40951	409510
9	8	59049	32768	26281	236529
8	7	32768	16807	15961	127688
7	6	16807	7776	9031	63217
6	5	7776	3125	4651	27906
5	4	3125	1024	2101	10505
4	3	1024	243	781	3124
3	2	243	32	211	633
2	1	32	1	31	62
1	0	1	0	1	1

Suma liczb w szóstej kolumnie wynosi 54866700. Po podzieleniu jej przez 3200000, otrzymamy znany nam już wynik 17,14584.

Najważniejsza część obliczeń została zakomunikowana uczniom bez dowodu. Mamy jednak motywację do przeprowadzenia kilku lekcji kombinatoryki. Wyjaśniam uczniom, że w szkolnych zadaniach z rachunku prawdopodobieństwa najważniejszą umiejętnością jest umiejętność zliczania wyników doświadczeń, które występują w zadaniu. Musimy zatem nauczyć się podstawowych technik zliczania elementów zbiorów skończonych. W tym momencie możemy przejść do uczenia podstaw kombinatoryki.

Naukę kombinatoryki zaczynam od zliczania elementów zbiorów zapisanych w najprostszy sposób. Wiemy, że na przykład zbiór $\{1, 2, 3, \ldots, 117\}$ ma 117 elementów. W tym momencie wprowadzam uczniom oznaczenie $\{a, b, c, \ldots\}$ zbioru, którego elementami są a, b, c i tak dalej. Wyjaśniam także zapis za pomocą trzech kropek, zwracając uwagę na niejednoznaczność takiego zapisu. Musimy bowiem z kilku przykładów domyślić się intencji autora. Powróćmy jednak do zliczania. To, że zbiór $\{1, 2, 3, \ldots, 117\}$ ma 117 elementów, jest oczywiste. Jednak wielu uczniów popełnia prosty błąd w podobnym zadaniu: mówią, że zbiór $\{31, 32, 33, \ldots, 117\}$ ma 86 elementów, bowiem $117 - 31 = 86$. Po wyjaśnieniu, skąd bierze się ten błąd i zrozumieniu przez uczniów, że właściwym działaniem jest tu $117 - 30 = 87$ (mieliśmy 117 liczb, odrzuciliśmy 30, więc zostało 87), stwierdzamy ogólnie, że jeśli $k < n$, to zbiór $\{k, k + 1, k + 2, \ldots, n\}$ ma $n - (k - 1) = n - k + 1$ elementów. Teraz możemy rozwiązać kilka zadań wykorzystujących tę regułę. Na przykład zbiór $\{25, 28, 31, 34, \ldots, 100\}$ ma 26 elementów. Mianowicie

$$\{25, 28, 31, \ldots, 100\} = \{3 \cdot 8 + 1,\quad 3 \cdot 9 + 1,\quad 3 \cdot 10 + 1,\ \ldots,\quad 3 \cdot 33 + 1\}$$

ma tyle samo elementów co zbiór $\{8, 9, 10, \ldots, 33\}$, czyli $33 - 8 + 1 = 26$. W tym miejscu czasami wprowadzam też oznaczenie

$$\{25, 28, 31, \ldots, 100\} = \{3k + 1 :\ k = 8, 9, 10, \ldots, 33\} = \{3k + 1 :\ 8 \leq k \leq 33\}.$$

Oczywiście zwracam uwagę uczniów na to, że pewne istotne informacje zostały w powyższym zapisie przyjęte milcząco, na przykład to, że liczba k jest całkowita. Tłumaczę im wtedy, że w codziennej praktyce takie milczące założenia przyjmujemy często; jednak w tekście pisanym nie powinniśmy tego czynić lub powinniśmy takie założenia zapisać wyraźnie na początku (na przykład pisząc, że w dalszym ciągu literami k, l, m, n oznaczamy wyłącznie liczby całkowite). To, czy w danej klasie wprowadzić bardziej formalne oznaczenia, czy używać wyłącznie oznaczenia z trzema kropkami, zależy głównie od tego, jak uczniowie danej klasy przyjmują wprowadzanie nowych oznaczeń, pojęć itp. Ta kwestia wymaga każdorazowej indywidualnej decyzji nauczyciela. Osobiście uważam, że w razie wątpliwości lepiej jest wprowadzić mniej niż więcej formalizmu. Formalizm na ogół utrudnia samodzielne myślenie, powoduje, że uczeń bardziej koncentruje się na tym, jak coś zapisać, a nie na tym, o co chodzi w rozumowaniu.

Omówię teraz pewien typ zadań, z którymi często uczniowie mają kłopot. Oto pierwsze zadanie: ile jest liczb podzielnych przez 7 wśród liczb od 1 do 999 włącznie? Uczniowie szybko podają odpowiedź, dzieląc 999 przez 7 i otrzymując wynik 142. To jest poprawna odpowiedź. Weźmy jednak dwa podobne zadania: ile wśród liczb od 1 do 999 włącznie, jest liczb dających resztę 3 przy dzieleniu przez 7? A ile wśród tych samych liczb jest liczb dających resztę 6 przy dzieleniu przez 7? W pierwszym przypadku prawidłową odpowiedzią jest 143, w drugim 142, jednak zdarza się, że uczniowie w obu przypadkach podają tę samą odpowiedź 142. Skąd bierze się błąd? Otóż z niedokładnego wyjaśnienia rozwiązania poprzedniego zadania. Uczniowie często argumentują, że co siódma liczba dzieli się przez 7, a więc jeśli chcemy obliczyć, ile jest liczb podzielnych przez 7 wśród liczb od 1 do n, musimy podzielić n przez 7 i odrzucić resztę. Ale zauważmy, że także co siódma liczba daje resztę 3 przy dzieleniu przez 7 oraz co siódma daje resztę 6. Ważne jest więc nie tylko to, że co siódma liczba ma rozważaną własność, ale także to, jak te liczby są rozłożone. Zauważmy, że dzielenie $999 = 7 \cdot 142 + 5$ oznacza, iż liczby od 1 do 999 można podzielić na 142 grupy po 7 liczb:

$$\begin{array}{ccccccc}
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\
8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 \\
15 & 16 & 17 & 18 & 19 & 20 & 21 \\
22 & 23 & \ldots & & & & \\
\ldots & & & & & & \\
988 & 989 & 990 & 991 & 992 & 993 & 994
\end{array}$$

i zostanie jeszcze 5 liczb: 995, 996, 997, 998, 999. W każdej z tych 142 grup liczba podzielna przez 7 jest na ostatnim miejscu. Wśród ostatnich pięciu liczb takiej liczby nie ma. Mamy zatem 142 liczby podzielne przez 7. Ale zauważmy, że w każdej grupie mamy jedną liczbę, która przy dzieleniu przez 7 daje resztę 3 i jedną liczbę, która daje resztę 6. Wśród ostatnich pięciu liczb mamy jeszcze jedną liczbę dającą resztę 3 i nie mamy nowej liczby dającej resztę 6. To nie jest trudne rozumowanie i błąd popełniony na początku może być łatwo wyjaśniony i poprawiony. Trochę gorzej jest z nieco trudniejszymi zadaniami: ile jest liczb trzycyfrowych podzielnych przez 7? Ile jest liczb trzycyfrowych dających przy dzieleniu przez 7 resztę 1? Ile jest liczb trzycyfrowych dających przy dzieleniu przez 7 resztę 5? Ile jest liczb trzycyfrowych dających przy dzieleniu przez 7 resztę 6? Oczywiście możemy przeprowadzić analizę podobną do poprzedniej. Możemy to zrobić dwoma sposobami. Po pierwsze, wykorzystać poprzedni podział na grupy, uwzględniając liczby znajdujące się przed pierwszą grupą i po ostatniej. A oto te grupy:

$$\begin{array}{ccccccc}
106 & 107 & 108 & 109 & 110 & 111 & 112 \\
113 & 114 & 115 & 116 & 117 & 118 & 119 \\
120 & 121 & 122 & 123 & 124 & 125 & 126 \\
127 & & & & & & \\
\ldots & & & & & & \\
988 & 989 & 990 & 991 & 992 & 993 & 994
\end{array}$$

Mamy jeszcze 6 liczb przed pierwszą grupą: 100, 101, 102, 103, 104, 105 oraz znane nam już 5 liczb po ostatniej grupie: 995, 996, 997, 998 i 999. Najpierw musimy policzyć same grupy. Popatrzmy zatem na ostatnie liczby w każdej grupie:

$$112 = 16 \cdot 7, \quad 119 = 17 \cdot 7, \quad 126 = 18 \cdot 7, \quad \ldots, \quad 994 = 142 \cdot 7.$$

Tych grup jest więc tyle, ile liczb w zbiorze $\{16, 17, 18, \ldots, 142\}$, czyli $142 - 15 = 127$. W każdej grupie mamy jedną liczbę podzielną przez 7. Poza tymi grupami mamy jeszcze jedną liczbę podzielną przez 7, mianowicie 105. Stąd wynika, że wśród liczb trzycyfrowych mamy 128 liczb podzielnych przez 7. Poza tymi grupami mamy także jedną liczbę dającą resztę 1 przy dzieleniu przez 7 (jest nią 995), dwie liczby dające resztę 5 (103 i 999) i jedną liczbę dającą resztę 6 (jest nią 104). Mamy zatem 128 liczb dających resztę 1 lub resztę 6 i 129 liczb dających resztę 5. Po drugie, możemy zapisać odpowiednie zbiory bardziej formalnie. Zbiór liczb trzycyfrowych podzielnych przez 7 możemy zapisać w postaci

$$\{105, 112, 119, \ldots, 994\} = \{7k :\ 15 \leq k \leq 142\}.$$

Zbiór liczb dających resztę 1 ma postać

$$\{106, 113, 120, \ldots, 995\} = \{7k + 1 :\ 15 \leq k \leq 142\}.$$

Zbiór liczb dających resztę 5 ma postać

$$\{103, 110, 117, \ldots, 999\} = \{7k + 5 :\ 14 \leq k \leq 142\}.$$

Wreszcie zbiór liczb dających resztę 6 ma postać

$$\{104, 111, 118, \ldots, 993\} = \{7k + 6 :\ 14 \leq k \leq 141\}.$$

Zliczenie elementów każdego z tych zbiorów sprowadza się teraz do poprzednich zadań.

Wykorzystanie powyższego zapisu zbiorów wymaga jeszcze jednego komentarza. Mianowicie zliczanie elementów zbioru powinno spełniać dwa warunki — każdy element zostanie policzony i żaden nie będzie policzony więcej niż jeden raz. Warto tu zauważyć, że najczęstsze błędy w zadaniach kombinatorycznych polegających na zliczaniu elementów zbioru skończonego wynikają z nieprzestrzegania któregoś z powyższych warunków, a często obu naraz. Popatrzmy na zliczanie liczb trzycyfrowych dających przy dzieleniu przez 7 resztę 5. To, że w tym zadaniu wszystkie elementy zostały zliczone, wynika z tego, że każda liczba dająca resztę 5 przy dzieleniu przez 7 ma postać $7k+5$, najmniejszą taką liczbą jest $103 = 14 \cdot 7+5$, a największą jest $999 = 142 \cdot 7+5$. Natomiast to, że żadna liczba nie została policzona więcej niż jeden raz, wynika z tego, że jeśli $k \neq l$, to $7k+5 \neq 7l+5$.

Dalszą naukę kombinatoryki sprowadzam w zasadzie do omówienia dwóch podstawowych reguł zliczania — reguły dodawania i reguły mnożenia. Nie wprowadzam natomiast znanych z liceum obiektów kombinatorycznych: permutacji, wariacji (z powtórzeniami lub bez), kombinacji. Wszystkie zadania kombinatoryczne można rozwiązać nie korzystając z tych pojęć, a w wielu zadaniach korzystanie z tych obiektów jest wręcz niemożliwe. Także w zadaniach z rachunku prawdopodobieństwa nie wymagam precyzyjnego opisu zbioru Ω zdarzeń elementarnych (np. jako zbioru wariacji z powtórzeniami w przypadku losowania ze zwracaniem). Bardziej skomplikowane zadania z rachunku prawdopodobieństwa rzeczywiście rozwiązujemy na lekcji, ale w każdym przypadku zliczanie rozważanych zdarzeń elementarnych odbywa się za pomocą wspomnianych dwóch reguł kombinatorycznych. Pokażę teraz, w jaki sposób wprowadzam na lekcji te reguły.

Zaczynam od dwóch podobnych zadań. Wiemy, że Sejm składa się z 460 posłów, Senat ze 100 senatorów. Mamy teraz wybrać delegację Parlamentu. W pierwszym zadaniu delegacja składa się z jednego parlamentarzysty — posła lub senatora. W drugim zadaniu delegacja składa się z dwóch parlamentarzystów — jednego posła i jednego senatora. W obu zadaniach pytam o liczbę możliwych delegacji, które można utworzyć zgodnie z powyższymi regułami. Inaczej mówiąc, pytam o liczbę sposobów wybrania delegacji.

Wybór delegacji sprowadzam do wykonania pewnych czynności. Jedną czynnością jest wybór posła, ta czynność kończy się jednym z 460 wyników. Drugą czynnością jest wybór senatora, ta czynność kończy się jednym ze 100 wyników. Pierwszą delegację wybieramy wykonując **jedną** z tych czynności. Zauważamy przy tym, że wyniki obu czynności nie mają wspólnych elementów. Wówczas reguła dodawania mówi, że liczba możliwych wyników jest sumą liczb wyników poszczególnych czynności. Drugą delegację wybieramy wykonując **obie** czynności — wybieramy najpierw posła, a potem senatora. Reguła mnożenia mówi, że liczba możliwych wyników jest tym razem iloczynem liczb wyników obu czynności. Tak więc pierwszą delegację możemy wybrać na 560 sposobów, drugą na 46000 sposobów. Teraz formułuję obie reguły w sposób bardziej ogólny.

Mamy do wykonania dwie czynności. Pierwsza kończy się jednym z m wyników, druga jednym z n wyników. Mamy też dwa rodzaje zadań. W pierwszym wykonujemy jedną z tych dwóch czynności. Dokładniej — najpierw decydujemy, którą czynność wykonać, a potem tę czynność wykonujemy. Reguła dodawania orzeka, że liczba możliwych wyników w takim zadaniu jest sumą $m + n$. Zwracam w tym miejscu uwagę na to, by żaden wynik nie został policzony dwukrotnie, żaden wynik pierwszej czynności nie może pokrywać się z żadnym wynikiem drugiej. W przypadku, gdyby któreś wyniki się powtarzały, należy odjąć liczbę wyników policzonych podwójnie (jest to najprostszy przypadek tzw. zasady włączeń i wyłączeń). W drugim zadaniu wykonujemy obie czynności po kolei. Wtedy reguła mnożenia orzeka, że liczba możliwych wyników jest iloczynem $m \cdot n$. W tym miejscu wyjaśniam, że nie jest konieczny warunek rozłączności. W zadaniu o Parlamencie, gdyby jakiś poseł był jednocześnie senatorem, mógłby być wybrany jednocześnie jako przedstawiciel Sejmu i jako przedstawiciel Senatu (w składzie delegacji byłby wpisany dwukrotnie, raz jako poseł i drugi raz jako senator).

Tak sformułowane reguły dodawania i mnożenia można oczywiście uogólnić na więcej czynności. W przypadku reguły mnożenia należy zwrócić uwagę na jeszcze jedną kwestię. W zadaniu o Sejmie i Senacie mieliśmy do czynienia z iloczynem kartezjańskim dwóch zbiorów. Dwuosobowa delegacja była w istocie parą (a, b), gdzie a jest posłem, b zaś senatorem. Tak więc reguła mnożenia w najprostszej postaci mówi, że $|A \times B| = |A| \cdot |B|$ dla dowolnych zbiorów skończonych A i B. Regułę mnożenia możemy jednak stosować w ogólniejszym przypadku. Popatrzmy znów na dwa zadania. Z talii 52 kart wybieramy dwukrotnie jedną kartę, zapisując wybrane karty. W pierwszym zadaniu kartę wybraną za pierwszym razem wkładamy z powrotem do talii, w drugim zadaniu wybraną kartę odkładamy na bok tak, że nie możemy jej wybrać po raz drugi. Mamy znów dwie czynności — wybór pierwszej karty i wybór drugiej karty. W obu zadaniach pierwsza czynność kończy się jednym z 52 wyników. Liczba możliwych wyników drugiej czynności jest inna w obu zadaniach. W pierwszym zadaniu mamy znów jeden z 52 wyników. W drugim zadaniu, niezależnie od wyboru pierwszej karty, mamy jeden z 51 wyników. Zauważmy jednak, że w tym przypadku nie mamy już do czynienia z iloczynem kartezjańskim dwóch zbiorów. Jeśli na przykład za pierwszym razem wybierzemy Asa pik, to za drugim razem wybieramy kartę ze zbioru 51 kart (wszystkie z wyjątkiem Asa pik). Jeśli natomiast za pierwszym razem wybierzemy Asa kier, to zbiór możliwych wyników drugiej czynności będzie inny niż poprzednio, tym razem będzie to zbiór wszystkich kart z wyjątkiem Asa kier. Wprawdzie zbiór możliwych wyników jest inny, ale ma tyle samo elementów. W regule mnożenia właśnie to jest istotne — druga czynność, niezależnie od wyniku pierwszej, musi się kończyć jednym z tej samej liczby wyników, choć zbiory wyników (w zależności od wyniku pierwszej czynności) mogą się różnić.

Popatrzmy teraz na kilka przykładów zadań, w których wykorzystujemy regułę mnożenia:

1. Rzucamy kostką 5 razy, zapisując wyniki w kolejności rzutów. Ile wyników tej postaci można uzyskać?

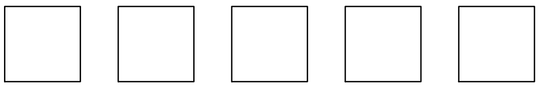
2. Rzucamy 5 razy kostką dwudziestościenną, zapisując wyniki w kolejności rzutów. Ile wyników tej postaci możemy uzyskać?

3. Rzucamy 5 razy kostką dwudziestościenną, zapisując wyniki w kolejności rzutów. Ile jest możliwych wyników, w których żadna liczba się nie powtórzy?

4. Rzucamy 5 razy kostką dwudziestościenną, zapisując wyniki w kolejności rzutów. Ile jest możliwych wyników, w których żadna z wyrzuconych liczb nie jest większa od k (gdzie $1 \leq k \leq 20$)?

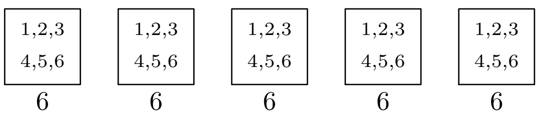
5. Ile jest liczb trzycyfrowych o trzech różnych cyfrach (tzn. takich, w których żadna cyfra się nie powtarza)?

Rozwiązanie zadania 1 możemy zilustrować graficznie. Rysujemy 5 okienek, w które możemy wpisywać wyniki rzutów (rys. 12.2).



Rys. 12.2

Następnie w każde okienko wpisujemy liczby, które w tym okienku mogą się pojawić. Pod każdym okienkiem zapisujemy liczbę tych liczb, które mogą być wpisane w dane okienko. W zadaniu 1 będziemy mieli rysunek 12.3.

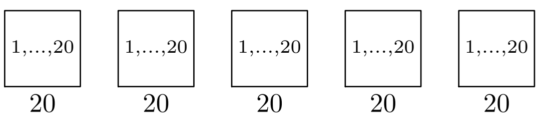


Rys. 12.3

Reguła mnożenia mówi, że liczba wszystkich wyników jest równa iloczynowi liczb zapisanych pod okienkami. W zadaniu 1 będzie to

$$6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^5 = 7776.$$

W zadaniu 2 otrzymamy rysunek 12.4.



Rys. 12.4

Zwróćmy uwagę na to, że cała opowieść o losowaniu nie ma znaczenia. Istotne jest tylko to, jak wygląda zapisany wynik. Jeśli wynikiem jest ciąg pięciu liczb (wybranych ze zbioru liczb od 1 do 20), które mogą być zapisane w okienkach, to nie ma żadnego znaczenia, jak te liczby powstały. Istotne jest tylko to, ile jest takich ciągów i o tym właśnie mówi reguła mnożenia. Zauważmy wreszcie, że rozwiązanie zadania 2 wyjaśnia, skąd w pierwszym zadaniu o kostkach dwudziestościennych wzięła się liczba 20^5. Kratki, w które możemy wpisywać dowolne liczby od 1 do 20 odpowiadają dokładnie pięciu okienkom arkusza kalkulacyjnego, w które uczniowie wpisywali wyniki swoich rzutów. W zadaniu 3 nad okienkami wpisujemy nazwy liczb: a_1, a_2, a_3, a_4 oraz a_5. Te nazwy będą wykorzystane przy wpisywaniu liczb w okienka:

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
1,...,20	1,...,20 $\neq$ a_1	1,...,20 $\neq$ a_1,a_2	1,...,20 $\neq$ $a_1,\ldots,a_3$	1,...,20 $\neq$ $a_1,\ldots,a_4$
20	19	18	17	16

Rys. 12.5

Liczba możliwych wyników jest zatem równa

$$20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16 = 1860480.$$

To zadanie kończy zatem rozwiązanie pierwszego zadania o rzucaniu kostkami dwudziestościennymi. W zadaniu 4, podobnie jak w zadaniu 2, otrzymamy wynik k^5. Teraz możemy dokończyć rozwiązanie drugiego zadania o kostkach dwudziestościennych. Interesuje nas liczba wszystkich piątek liczb, w których największa liczba jest równa k. Najpierw zauważamy, że wszystkie liczby są niewiększe od k. Takich liczb jest k^5. Odrzucamy następnie ciągi, w których wszystkie liczby są niewiększe od $k-1$. Pozostaną więc te ciągi, w których co najmniej jedna liczba jest równa k, a więc właśnie te, które mamy zliczyć. Jest ich oczywiście $k^5 - (k-1)^5$.

Wreszcie w zadaniu 5 okienka wyglądają następująco:

a_1	a_2	a_3
1,...,9	0,...,9 $\neq$ a_1	0,...,9 $\neq$ a_1,a_2
9	9	8

Rys. 12.6

Zwracam uwagę uczniów na to, że w pierwszym okienku mogą być wpisane inne cyfry niż w dwóch następnych, w pierwszym nie może być cyfry 0. Dlatego w pierwszym okienku mamy 9 możliwości, w drugim mamy do dyspozycji wszystkie 10 cyfr, ale zabroniony jest wybór cyfry wpisanej w pierwsze okienko. Zatem mamy znów 9 możliwości i w podobny sposób w trzecim okienku mamy 8 możliwości. Otrzymujemy wynik: istnieje $9 \cdot 9 \cdot 8 = 648$ takich liczb.

Nieco trudniejsze są dwa następne zadania. W pierwszym najprostsze rozwiązanie wymaga wpisywania cyfr w okienka w kolejności innej niż naturalna (tzn. od lewej strony). Inne rozwiązanie obu zadań wymaga połączenia reguły mnożenia z regułą dodawania.

6. Ile jest nieparzystych liczb naturalnych trzycyfrowych mających różne cyfry?

7. Ile jest parzystych liczb naturalnych trzycyfrowych mających różne cyfry?

A oto rozwiązania tych zadań. Pierwszy sposób rozwiązania zadania 6 polega na zliczaniu możliwości wpisania cyfr w trzy okienka. Zaczynamy od okienka ostatniego. Na ostatnim miejscu może stać jedna z pięciu cyfr nieparzystych (tzn. 1, 3, 5, 7 lub 9). Na pierwszym miejscu może stać jedna z ośmiu cyfr (nie może stać zero i cyfra, którą postawiliśmy na ostatnim miejscu). Na drugim miejscu także może stać jedna z ośmiu cyfr (nie może stać żadna z cyfr wybranych na trzecie i pierwsze miejsce). Nasze okienka wyglądają zatem następująco:

a_2	a_3	a_1
1,...,9 $\neq$ a_1	0,...,9 $\neq$ a_1,a_2	1,3,5 7,9
8	8	5

Rys. 12.7

Zauważmy, że o kolejności wpisywania cyfr w okienka świadczy numeracja okienek zapisana nad okienkami. Z reguły mnożenia wynika, że istnieje $5 \cdot 8 \cdot 8 = 320$ takich liczb.

Drugi sposób rozwiązania wykorzystuje, oprócz reguły mnożenia, także regułę dodawania. W zależności od tego, jakie cyfry stoją na pierwszych dwóch miejscach, mamy cztery przypadki:

- parzysta, parzysta;
  pierwsza cyfra parzysta jest jedną z czterech cyfr (oprócz zera), druga też jedną z czterech (oprócz stojącej na pierwszym miejscu), na trzecim miejscu może stać jedna z pięciu cyfr nieparzystych, łącznie mamy $4 \cdot 4 \cdot 5 = 80$ liczb,
- parzysta, nieparzysta;
  pierwsza cyfra jest jedną z czterech cyfr parzystych (oprócz zera), druga cyfra jest jedną z pięciu cyfr nieparzystych, na trzecim miejscu może stać jedna z czterech cyfr nieparzystych (oprócz stojącej na drugim miejscu), łącznie mamy $4 \cdot 5 \cdot 4 = 80$ liczb,
- nieparzysta, parzysta;
  pierwsza cyfra jest jedną z pięciu cyfr nieparzystych, druga cyfra jedną z pięciu cyfr parzystych, na trzecim miejscu może stać jedna z czterech cyfr nieparzystych (oprócz cyfry stojącej na pierwszym miejscu), łącznie mamy $5 \cdot 5 \cdot 4 = 100$ liczb,
- nieparzysta, nieparzysta;
  pierwsza cyfra nieparzysta jest jedną z pięciu cyfr, druga jest jedną z czterech (oprócz stojącej na pierwszym miejscu), na trzecim miejscu może stać jedna z trzech cyfr nieparzystych (oprócz cyfr stojących na pierwszych dwóch miejscach), łącznie mamy $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ liczb.

Z reguły dodawania wynika, że istnieje $80 + 80 + 100 + 60 = 320$ szukanych liczb.

Zadanie 7 także możemy rozwiązać dwoma sposobami. W pierwszym skorzystamy z rozwiązania zadań 5 i 6. Z zadania 5 wiemy, że istnieje 648 liczb trzycyfrowych o różnych cyfrach. Z zadania 6 wiemy, że wśród tych liczb jest 320 nieparzystych. Pozostaje więc 328 liczb parzystych. Drugi sposób polega na wykorzystaniu reguły dodawania. Tym razem mamy dwa przypadki w zależności od tego, jaka cyfra stoi na ostatnim miejscu:

- zero;
  wtedy na pierwszych dwóch miejscach możemy umieścić cyfry na $9 \cdot 8 = 72$ sposoby (jedna z 9 cyfr na pierwszym miejscu i jedna z 8 na drugim),
- cyfra różna od zera;
  wtedy na pierwszych dwóch miejscach możemy umieścić cyfry na $8 \cdot 8 = 64$ sposoby (jedna z 8 cyfr na pierwszym miejscu — oprócz zera i stojącej na ostatnim miejscu — i jedna z 8 na drugim), ponieważ są cztery różne od zera cyfry parzyste, więc w tym przypadku mamy $4 \cdot 64 = 256$ liczb.

Z reguły dodawania wynika, że łącznie mamy $72 + 256 = 328$ liczb.

Wreszcie ostatnie zadanie ilustrujące obie reguły kombinatoryczne. Jest to zadanie, w którym uczniowie niezwykle często popełniają błędy. Rozwiązanie tego zadania omówię tu szczególnie dokładnie.

8. Ile jest nieparzystych liczb naturalnych trzycyfrowych, w których co najmniej jedna cyfra jest dziewiątką?

Omówimy 5 sposobów rozwiązania tego zadania. Pierwszy sposób polega na wypisaniu zliczanych liczb w kolejności rosnącej. Taki sposób z pozoru wydaje się nonsensowny, jednak uczniowie po chwili dostrzegają, jak są uporządkowane te liczby i poprawnie obliczają, ile ich jest. A oto te liczby. Najpierw mamy liczby mniejsze od 900:

109	119	129	139	149	159	169	179	189
191	193	195	197	199				
209	219	229	139	249	259	269	279	289
291	293	295	297	299				
309	319	329	339	349	359	369	379	389
391	393	395	397	399				
409	419	429	439	449	459	469	479	489
491	493	495	497	499				
509	519	529	539	549	559	569	579	589
591	593	595	597	599				
609	619	629	639	649	659	669	679	689
691	693	695	697	699				
709	719	729	739	749	759	769	779	789
791	793	795	797	799				
809	819	829	839	849	859	869	879	889
891	893	895	897	899				

Następnie mamy liczby zaczynające się od dziewiątki:

901	903	905	907	909
911	913	915	917	919
921	923	925	927	929
931	933	935	937	939
941	943	945	947	949
951	953	955	957	959
961	963	965	967	969
971	973	975	977	979
981	983	985	987	989
991	993	995	997	999

Uczniowie szybko dostrzegają, że liczby mniejsze od 900 (a więc takie, których pierwsza cyfra nie jest dziewiątką) są zgrupowane w 8 wierszach po 9 liczb (liczby, w których jest tylko jedna dziewiątka na ostatnim miejscu) i 8 wierszach po 5 liczb (liczby, w których jest dziewiątka na drugim miejscu i dowolna cyfra nieparzysta na ostatnim miejscu). Mamy zatem

$$8 \cdot 9 + 8 \cdot 5 = 72 + 40 = 112$$

liczb mniejszych od 900. Wreszcie rozważamy liczby mające na pierwszym miejscu dziewiątkę. Druga cyfra może być dowolna, trzecia jest jedną z pięciu cyfr nieparzystych. Takich liczb jest $10 \cdot 5 = 50$. Łącznie zatem wypisano $112 + 50 = 162$ liczby.

Chcę tu zwrócić uwagę na to, że ten naturalny sposób zliczania jest przez wielu uczniów dostrzegany dopiero po przekonaniu ich, że warto spróbować te liczby wypisać. Na ogół uczniowie nie biorą takiej metody rozwiązania pod uwagę i — nie widząc innego sposobu — rezygnują z rozwiązywania zadania.

Drugi sposób rozwiązania polega na analizowaniu, gdzie można umieścić dziewiątkę. W tym sposobie rozwiązania pokażę najpierw rozumowanie błędne; z tym błędem zetknąłem się wielokrotnie. Jest on popełniany zarówno przez uczniów gimnazjum, jak i przez uczniów liceum. Rozumowanie błędne można w skrócie opisać następująco: wiemy, że jedna cyfra jest dziewiątką. Umieśćmy ją na jednym z trzech miejsc, a następnie na pozostałych miejscach możemy umieścić dowolne cyfry (również dziewiątki, bowiem dziewiątka może się powtarzać). A oto szczegóły rozumowania:

Wiemy, że jedną z cyfr jest 9, możemy ją umieścić na jednym z trzech miejsc: pierwszym, drugim lub trzecim.

- Jeśli umieścimy dziewiątkę na pierwszym miejscu, to na drugim możemy umieścić dowolną z 10 cyfr, a na trzecim dowolną z pięciu cyfr nieparzystych. Łącznie daje to w tym przypadku 50 liczb.
- Jeśli umieścimy dziewiątkę na drugim miejscu, to na pierwszym możemy umieścić dowolną z 9 cyfr, a na trzecim dowolną z pięciu cyfr nieparzystych. Łącznie daje to w tym przypadku 45 liczb.
- Jeśli umieścimy dziewiątkę na trzecim miejscu, to na pierwszym możemy umieścić dowolną z 9 cyfr, a na drugim dowolną z 10 cyfr. Łącznie daje to w tym przypadku 90 liczb.

W sumie daje to $50 + 45 + 90 = 185$ liczb.

Gdzie jest błąd w tym rozumowaniu? Otóż okazuje się, że niektóre liczby zostały policzone wielokrotnie. Przypuśćmy, że najpierw umieściliśmy cyfrę 9 na pierwszym miejscu, a na pozostałych miejscach umieściliśmy kolejno cyfry 5 i 9. Otrzymaliśmy liczbę 959. Przypuśćmy teraz, że najpierw umieściliśmy cyfrę 9 na trzecim miejscu, a następnie umieściliśmy na pierwszych dwóch miejscach kolejno cyfry 9 i 5. Znów otrzymaliśmy liczbę 959. Ta liczba została więc w powyższym sposobie zliczania policzona dwukrotnie. Zobaczmy teraz, w jaki sposób można poprawić to rozwiązanie błędne.

Dostaliśmy wynik 185. Pamiętamy jednak, że niektóre liczby zostały policzone wielokrotnie: liczby z dwiema dziewiątkami były policzone po dwa razy, a liczba 999 nawet trzy razy. Zliczamy teraz liczby z dwiema dziewiątkami.

- Jeśli umieścimy dziewiątkę na pierwszym i drugim miejscu, to na trzecim możemy umieścić dowolną z 4 cyfr nieparzystych: 1, 3, 5 lub 7.
- Jeśli umieścimy dziewiątkę na drugim i trzecim miejscu, to na pierwszym możemy umieścić dowolną z 8 cyfr (od 1 do 8).
- Jeśli umieścimy dziewiątkę na pierwszym i trzecim miejscu, to na drugim możemy umieścić dowolną z 9 cyfr (od 0 do 8).

W sumie okazuje się, że mamy 21 liczb z dwiema dziewiątkami. Od otrzymanego wyniku musimy zatem odjąć 21. Następnie mamy jedną liczbę (mianowicie 999) z trzema dziewiątkami. Policzyliśmy ją trzykrotnie, więc od otrzymanego wyniku musimy jeszcze odjąć 2. Zatem liczb, które nas interesują, jest $185 - 21 - 2 = 162$.

Trzeci sposób rozwiązania polega na policzeniu najpierw liczb, które nie spełniają jednego z dwóch warunków zadania, mianowicie warunku mówiącego, że w zapisie dziesiętnym liczby występuje co najmniej jedna dziewiątka. Kluczem są tutaj słowa „co najmniej". Zaprzeczenie tego warunku oznacza, że mamy zliczyć liczby trzycyfrowe nieparzyste, w których nie ma ani jednej dziewiątki. To okazuje się znacznie łatwiejsze. Najpierw zliczamy wszystkie liczby trzycyfrowe nieparzyste. Wszystkich liczb trzycyfrowych jest 900, co druga jest nieparzysta. Istnieje zatem 450 liczb trzycyfrowych nieparzystych. Możemy również rozumować następująco: na pierwszym miejscu można umieścić jedną z dziewięciu cyfr, na drugim jedną z dziesięciu cyfr, a na trzecim jedną z pięciu cyfr nieparzystych: 1, 3, 5, 7, 9. Łącznie mamy zatem $9 \cdot 10 \cdot 5 = 450$ liczb. Teraz policzymy wszystkie liczby nieparzyste, w których nie występuje cyfra 9. Tym razem na pierwszym miejscu możemy umieścić jedną z ośmiu cyfr (od 1 do 8), na drugim jedną z dziewięciu cyfr (od 0 do 8), a na trzecim jedną z czterech cyfr nieparzystych: 1, 3, 5, 7. Łącznie mamy zatem $8 \cdot 9 \cdot 4 = 288$ liczb. Liczby, o które chodzi w zadaniu, to oczywiście liczby **należące** do pierwszej grupy (wszystkie liczby nieparzyste) i **nie należące** do drugiej grupy (w której są liczby nieparzyste **bez** dziewiątki). Stąd wynika, że liczb, o które chodzi w zadaniu, jest $450 - 288 = 162$.

Czwarty sposób rozwiązania polega na wykorzystaniu reguły dodawania. Rozważamy trzy przypadki w zależności od liczby dziewiątek. Dwa z tych przypadków będą rozbite na następne „podprzypadki”.

- Przypadek 1. Jest tylko jedna dziewiątka.
  Tym razem zastosujemy metodę znaną z powyższego błędnego rozwiązania, jednak użycie tej metody będzie poprawne, gdyż jest tylko jedna cyfra 9. Możemy umieścić ją na jednym z trzech miejsc.
  - ⋆ Jeśli umieścimy dziewiątkę na pierwszym miejscu, to na drugim możemy umieścić dowolną z 9 cyfr (od 0 do 8), a na trzecim dowolną z czterech cyfr nieparzystych: 1, 3, 5, 7. Łącznie daje to w tym przypadku 36 liczb.
  - ⋆ Jeśli umieścimy dziewiątkę na drugim miejscu, to na pierwszym możemy umieścić dowolną z 8 cyfr (od 1 do 8), a na trzecim dowolną z czterech cyfr nieparzystych: 1, 3, 5, 7. Łącznie daje to w tym przypadku 32 liczby.
  - ⋆ Jeśli umieścimy dziewiątkę na trzecim miejscu, to na pierwszym możemy umieścić dowolną z 8 cyfr (od 1 do 8), a na drugim dowolną z 9 cyfr (od 0 do 8). Łącznie daje to w tym przypadku 72 liczby.

  W sumie daje to $36 + 32 + 72 = 140$ liczb.
- Przypadek 2. Są dwie cyfry 9.
  Dwie dziewiątki możemy rozmieścić na trzech miejscach na trzy sposoby.
  - ⋆ Jeśli umieścimy dziewiątkę na pierwszym i drugim miejscu, to na trzecim możemy umieścić dowolną z 4 cyfr nieparzystych.
  - ⋆ Jeśli umieścimy dziewiątkę na drugim i trzecim miejscu, to na pierwszym możemy umieścić dowolną z 8 cyfr.
  - ⋆ Jeśli umieścimy dziewiątkę na pierwszym i trzecim miejscu, to na drugim możemy umieścić dowolną z 9 cyfr.

  W sumie daje to $4 + 8 + 9 = 21$ liczb.
- Przypadek 3. Są trzy dziewiątki.
  Jest tylko jedna taka liczba: 999.

Sumując wyniki otrzymane w powyższych trzech przypadkach, dostajemy odpowiedź: są $140 + 21 + 1 = 162$ takie liczby.

Piąty sposób rozwiązania wykorzystuje tzw. zasadę włączeń i wyłączeń. Przed pokazaniem tego sposobu rozwiązania dokonajmy niewielkiej dygresji dotyczącej tej zasady.

Zasada włączeń i wyłączeń (dla niewielkiej liczby zbiorów) jest dość prostym uogólnieniem reguły dodawania i zazwyczaj pokazuję uczniom rozwiązania kilku zadań, w których tę zasadę wykorzystuję. Popatrzmy na takie zadania i sposoby ich rozwiązywania. Zaczniemy od zadań na zasadę włączeń i wyłączeń dla dwóch zbiorów. W tym miejscu na ogół nie wprowadzam terminologii teoriomnogościowej. Zamiast mówić o sumie zbiorów, mówię o tych elementach, które należą do co najmniej jednego z rozważanych zbiorów, a zamiast mówić o części wspólnej (iloczynie) zbiorów, mówię o tych elementach, które należą jednocześnie do każdego z rozważanych zbiorów. Ten sposób mówienia jest bardzo naturalny i nawet uczniowie gimnazjum szybko rozumieją, o co chodzi w rozwiązaniu zadania. A oto zadania:

9. Każdy uczeń w klasie gra w siatkówkę lub w koszykówkę. W siatkówkę gra 25 uczniów, w koszykówkę 20 uczniów, natomiast w obie te gry razem gra 15 uczniów. Ilu uczniów jest w tej klasie?

10. Uczniowie pewnej klasy grają w siatkówkę lub w koszykówkę. W siatkówkę gra 24 uczniów, w koszykówkę 18 uczniów, w obie te gry razem gra 16 uczniów, natomiast 4 uczniów nie gra w żadną z tych gier. Ilu uczniów jest w tej klasie?

11. Ile jest liczb naturalnych od 1 do 1000 włącznie podzielnych przez 2 lub przez 3?

12. W klasie liczącej 30 osób 18 uczniów uczy się języka włoskiego, 15 uczniów uczy się języka hiszpańskiego i 13 uczniów uczy się języka portugalskiego. Wśród nich 8 uczniów uczy się jednocześnie włoskiego i hiszpańskiego, 10 uczniów uczy się jednocześnie języka włoskiego i portugalskiego oraz 5 uczniów uczy się jednocześnie języka hiszpańskiego i portugalskiego. Wreszcie 3 uczniów uczy się tych trzech języków. Ilu uczniów nie uczy się żadnego z tych języków?

13. W klasie liczącej 30 osób 15 uczniów uczy się języka włoskiego, 17 uczniów uczy się języka hiszpańskiego i 10 uczniów uczy się języka portugalskiego. Wśród nich 8 uczniów uczy się jednocześnie włoskiego i hiszpańskiego, 7 uczniów uczy się jednocześnie języka włoskiego i portugalskiego oraz 6 uczniów uczy się jednocześnie języka hiszpańskiego i portugalskiego. Wreszcie 4 uczniów nie uczy się żadnego z tych trzech języków. Ilu uczniów uczy się wszystkich języków?

Zadanie 9 w zasadzie już umiemy rozwiązać. Zliczamy uczniów grających w siatkówkę, zliczamy uczniów grających w koszykówkę, otrzymane wyniki dodajemy (reguła dodawania) i zauważamy, że niektórzy uczniowie zostali policzeni dwukrotnie. Tę liczbę uczniów odejmujemy od otrzymanego wyniku. A więc liczba uczniów w klasie jest równa:

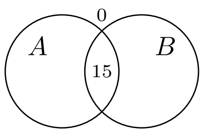
$$25 + 20 - 15 = 30.$$

Podobnie rozwiązujemy zadanie 10. W co najmniej jedną z dwóch gier gra

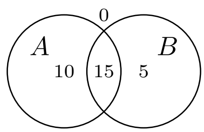
$$24 + 18 - 16 = 26$$

uczniów. W klasie jest więc $26 + 4 = 30$ uczniów. Oba zadania możemy zilustrować graficznie.

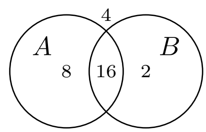
Najpierw definiujemy dwa zbiory A i B. Zbiór A składa się z tych uczniów, którzy grają w siatkówkę, zbiór B z tych uczniów, którzy grają w koszykówkę. Rysujemy dwa okręgi przedstawiające zbiory A i B. Musimy tylko zadbać o to, by te okręgi się przecinały. Dzielą one wtedy płaszczyznę na 4 części. Część płaszczyzny leżąca na zewnątrz obu okręgów oznacza te elementy, które nie należą do żadnego ze zbiorów A i B, a więc tych uczniów, którzy nie grają w żadną grę (w zadaniu 9 ma ona 0 elementów, w zadaniu 10 ma 4 elementy). Część płaszczyzny leżąca wewnątrz obu okręgów oznacza te elementy, które należą do obu zbiorów jednocześnie, a więc tych uczniów, którzy grają w obie gry razem (w zadaniu 9 ma ona 15 elementów, w zadaniu 10 ma 16 elementów). W rozwiązaniu zadania 9 w te dwa obszary wpisujemy liczby 0 i 15 (rys. 12.8). Część płaszczyzny zawarta wewnątrz lewego okręgu i na zewnątrz prawego oznacza te elementy, które należą do zbioru A i nie należą do zbioru B. W zadaniach 9 i 10 oznacza ona więc tych uczniów, którzy grają w siatkówkę i nie grają w koszykówkę. W zadaniu 9 mamy 10 takich uczniów. Podobnie mamy 5 uczniów, którzy grają w koszykówkę i nie grają w siatkówkę. Te liczby wpisujemy w niewypełnione jeszcze obszary (rys. 12.9). Suma liczb znajdujących się we wszystkich czterech obszarach jest równa liczbie uczniów w klasie. Mamy więc 30 uczniów w klasie. W zadaniu 10 otrzymamy rysunek 12.10 i znów w rozważanej klasie będziemy mieli 30 uczniów.



Rys. 12.8



Rys. 12.9



Rys. 12.10

Naturalną potrzebą przy uczeniu matematyki jest zapisywanie wykonywanych rozumowań za pomocą wzorów. Powracamy więc do kwestii wprowadzenia terminologii teoriomnogościowej: zdefiniowania sumy i części wspólnej zbiorów (w szkole zdecydowanie wolę określenie „część wspólna” od „iloczynu” zbiorów; słowo „iloczyn” może mylić się z iloczynem kartezjańskim, a także może — poprzez skojarzenia z iloczynem liczb — prowadzić do błędnych rozumowań) oraz zapisania zasady włączeń i wyłączeń wzorem

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

Na ogół tego nie robię, chociaż w klasach, w których miałem wielu uczniów zdolnych, np. biorących udział w olimpiadzie, wprowadzałem terminologię teoriomnogościową, najczęściej z dobrym rezultatem. Jeśli jednak ktoś ma obawy (uzasadnione sytuacją), czy to robić, a jednak chciałby zapisać wynik rozumowania wzorem, proponuję rozwiązanie kompromisowe. Niech $n_{A,B,\ldots}$ oznacza liczbę elementów należących jednocześnie do zbiorów $A, B, \ldots$ Na przykład:

$$n_A = |A|, \quad n_{A,B} = |A \cap B|, \quad n_{W,H,P} = |W \cap H \cap P|$$

i tak dalej. Niech wreszcie $S_{A,B,\ldots}$ oznacza liczbę elementów należących do co najmniej jednego ze zbiorów $A, B, \ldots$ Zasadę włączeń i wyłączeń dla dwóch zbiorów możemy teraz zapisać w postaci

$$S_{A,B} = n_A + n_B - n_{A,B}.$$

Rozwiązanie zadania 9 możemy teraz zapisać w postaci

$$S_{A,B} = n_A + n_B - n_{A,B} = 25 + 20 - 15 = 30$$

lub

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 25 + 20 - 15 = 30.$$

Podobnie liczba uczniów w zadaniu 10 jest równa

$$4 + S_{A,B} = 4 + n_A + n_B - n_{A,B} = 4 + 24 + 18 - 16 = 30$$

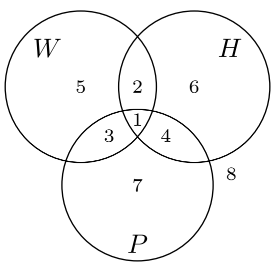
lub inaczej

$$4 + |A \cup B| = 4 + |A| + |B| - |A \cap B| = 4 + 24 + 18 - 16 = 30.$$

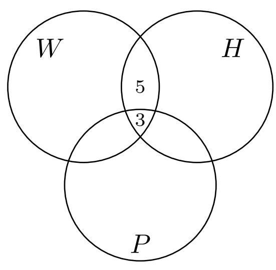
Rozwiązanie zadania 11 może być zapisane w podobny sposób. Wyjaśnienia (czy raczej przypomnienia z I klasy) wymaga tylko to, że liczba jest podzielna przez 2 i przez 3 wtedy i tylko wtedy, gdy jest podzielna przez 6. Mamy zatem 500 liczb podzielnych przez 2, 333 liczby podzielne przez 3 i 166 liczb podzielnych przez 6; ostateczna odpowiedź jest zatem równa

$$500 + 333 - 166 = 667.$$

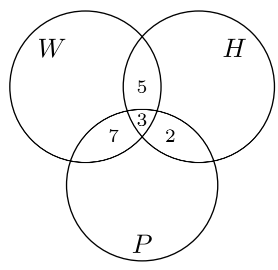
Zadania 12 i 13 (a także ostatni sposób rozwiązania zadania 8, do którego powrócimy) wymagają zasady włączeń i wyłączeń dla trzech zbiorów. Najpierw pokażę rozwiązania graficzne zadań 12 i 13, a potem wykorzystanie wzoru (zapisanego za pomocą notacji teoriomnogościowej lub oznaczeń wprowadzonych wyżej). W zadaniu 12 rozważamy trzy zbiory: zbiór W uczniów uczących się języka włoskiego, zbiór H uczniów uczących się języka hiszpańskiego i zbiór P uczniów uczących się języka portugalskiego. Dla zilustrowania tych trzech zbiorów rysujemy na płaszczyźnie trzy okręgi (rys. 12.11). Dbamy o to, by były w tzw. położeniu ogólnym, tzn. by dzieliły płaszczyznę na 8 obszarów (ponumerowanych liczbami od 1 do 8, jak na rysunku 12.11).



Rys. 12.11



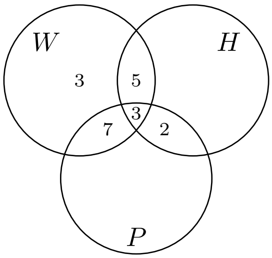
Rys. 12.12



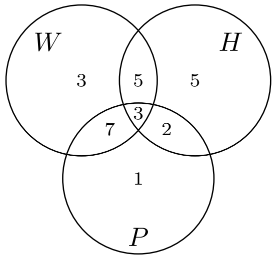
Rys. 12.13

Następnie w każdy obszar wpisujemy liczbę oznaczającą, ile elementów ma zbiór odpowiadający temu obszarowi. Obszary te zapełniamy w kolejności numerów wpisanych w nie na rysunku 12.11. Zaczynamy więc od obszaru oznaczonego liczbą 1. W ten obszar, odpowiadający części wspólnej $W \cap H \cap P$, wpisujemy liczbę 3, bo 3 uczniów uczy się wszystkich trzech języków. Następnie w obszar z numerem 2 wpisujemy liczbę 5. Wiemy bowiem, że 8 uczniów uczy się jednocześnie języka włoskiego i hiszpańskiego, a 3 z nich już uwzględniliśmy w obszarze 1 (inaczej mówiąc: 3 z nich uczy się ponadto portugalskiego, a więc zostaje 5, którzy uczą się tylko włoskiego i hiszpańskiego). Mamy zatem rysunek 12.12. W podobny sposób wpisujemy liczby 7 i 2 w obszary o numerach 3 i 4 (rys. 12.13).

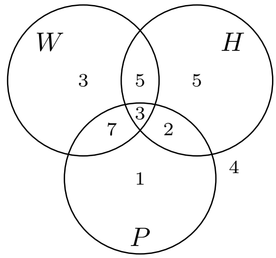
Następnie w obszar o numerze 5 wpisujemy liczbę 3. Mianowicie języka włoskiego uczy się 18 uczniów, a 15 z nich zostało już uwzględnionych (3 w obszarze 1, 5 w obszarze 2 i 7 w obszarze 3). Otrzymujemy rysunek 12.14. W podobny sposób wpisujemy liczby 5 i 1 w obszary 6 i 7, otrzymując rysunek 12.15. W 7 obszarów wpisaliśmy liczby o sumie równej 26. Ponieważ w klasie jest 30 uczniów, więc żadnego języka nie uczy się 4 uczniów. W obszar o numerze 8 wpisujemy liczbę 4 i w ten sposób otrzymujemy kompletny rysunek 12.16.



Rys. 12.14



Rys. 12.15

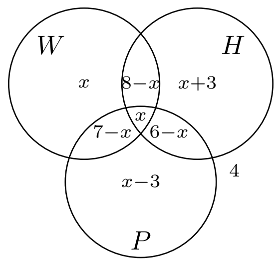


Rys. 12.16

W podobny sposób rozwiązujemy zadanie 13. Znów wpisujemy liczby w obszary w kolejności numerów (rys. 12.17). Jest jednak pewna różnica — nie wiemy tym razem, ilu uczniów uczy się wszystkich trzech języków. Jest to bowiem niewiadoma, którą musimy znaleźć. W obszar o numerze 1 wpisujemy zatem niewiadomą x. W obszary 2, 3 i 4 wpisujemy teraz odpowiednio $8 - x$, $7 - x$ i $6 - x$. W obszar 5 musimy wpisać teraz

$$15 - (8 - x) - (7 - x) - x = x.$$

W podobny sposób w obszar 6 wpiszemy $x + 3$ i w obszar 7 wpiszemy $x-3$. Wreszcie w obszar 8 wpisujemy 4, bo 4 uczniów nie uczy się żadnego języka. Mamy zatem rysunek 12.17. Ponieważ w klasie jest 30 uczniów, więc po dodaniu wszystkich liczb wpisanych w 8 obszarów otrzymujemy równanie



Rys. 12.17

$$x + (8 - x) + (7 - x) + (6 - x) + x + (x + 3) + (x - 3) + 4 = 30,$$

którego rozwiązaniem jest $x = 5$. Zatem wszystkich trzech języków jednocześnie uczy się 5 uczniów.

Rozwiązanie zadań 12 i 13 możemy otrzymać za pomocą wzoru włączeń i wyłączeń dla trzech zbiorów. Oto ten wzór:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|.$$

Z uzasadnieniem tego wzoru uczniowie, którzy dobrze zrozumieli regułę dodawania i zasadę włączeń i wyłączeń dla dwóch zbiorów, nie mają na ogół problemów. Jak uzasadniamy ten wzór? Spróbujmy policzyć elementy sumy $A \cup B \cup C$. Najpierw liczymy elementy zbioru A, potem elementy zbioru B i wreszcie elementy zbioru C. Otrzymane liczby dodajemy. Mamy więc na razie wynik $|A| + |B| + |C|$. Teraz zauważamy, że pewne elementy liczyliśmy dwukrotnie, jeśli $x \in A \cap B$, to element x był policzony dwukrotnie, raz jako element zbioru A i raz jako element zbioru B. Musimy więc odjąć od wyniku liczbę $|A \cap B|$. Podobnie musimy odjąć liczby $|A \cap C|$ i $|B \cap C|$. To jednak jeszcze nie koniec. Zauważamy, że jeśli x jest elementem wszystkich zbiorów, to najpierw był policzony trzykrotnie: raz jako element zbioru A, raz jako element zbioru B i raz jako element zbioru C. Ale potem trzykrotnie policzyliśmy go jako element zbiorów $A \cap B$, $A \cap C$ i $B \cap C$. W naszym dotychczasowym wyniku element x trzykrotnie uwzględniliśmy, a potem trzykrotnie się go pozbyliśmy. Trzeba więc jeszcze raz go dodać. Stąd wynika, że do wyniku należy dodać liczbę $|A \cap B \cap C|$ i w ten sposób otrzymujemy prawą stronę wzoru.

Nazwa **zasada włączeń i wyłączeń** lub **wzór włączeń i wyłączeń** bierze się stąd, że sumę po prawej stronie otrzymujemy „włączając" do niej trzy liczby $|A|$, $|B|$ i $|C|$, potem „wyłączając" z niej liczby $|A \cap B|$, $|A \cap C|$ i $|B \cap C|$ i wreszcie „włączając" do niej liczbę $|A \cap B \cap C|$. Podobny wzór zachodzi również dla większej liczby zbiorów. Dla czterech zbiorów można jeszcze spróbować go wypisać:

$$\begin{aligned}|A \cup B \cup C \cup D| = {} & |A| + |B| + |C| + |D| - \\ & - |A \cap B| - |A \cap C| - |A \cap D| - |B \cap C| - |B \cap D| - |C \cap D| + \\ & + |A \cap B \cap C| + |A \cap B \cap D| + |A \cap C \cap D| + |B \cap C \cap D| - \\ & - |A \cap B \cap C \cap D|.\end{aligned}$$

Dla większej liczby zbiorów wypisanie odpowiedniego wzoru jest jeszcze bardziej uciążliwe. Widać jednak tę samą zasadę: ze znakiem $+$ są brane liczby elementów zbiorów, potem ze znakiem $-$ są brane liczby elementów części wspólnych każdych dwóch zbiorów, ze znakiem $+$ liczby elementów części wspólnych każdych trzech zbiorów, ze znakiem $-$ liczby elementów części wspólnych każdych czterech zbiorów i tak dalej do wyczerpania wszystkich możliwości.

Wzór włączeń i wyłączeń dla trzech zbiorów możemy zapisać za pomocą wprowadzonej wyżej notacji „kompromisowej" w następujący sposób:

$$S_{A,B,C} = n_A + n_B + n_C - n_{A,B} - n_{A,C} - n_{B,C} + n_{A,B,C}.$$

A oto rozwiązania zadań 12 i 13 za pomocą wzoru włączeń i wyłączeń. W tych zadaniach mamy trzy zbiory W, H i P. Dane w zadaniu 12 wyglądają następująco:

$$\begin{gathered}|W| = 18, \quad |H| = 15, \quad |P| = 13, \\ |W \cap H| = 8, \quad |W \cap P| = 10, \quad |H \cap P| = 5, \\ |W \cap H \cap P| = 3.\end{gathered}$$

Z zasady włączeń i wyłączeń wynika, że

$$|W \cup H \cup P| = 18 + 15 + 13 - 8 - 10 - 5 + 3 = 26.$$

A zatem 4 uczniów nie uczy się żadnego z tych języków.

Dane w zadaniu 13 wyglądają następująco:

$$\begin{gathered}|W| = 15, \quad |H| = 17, \quad |P| = 10, \\ |W \cap H| = 8, \quad |W \cap P| = 7, \quad |H \cap P| = 6, \\ |W \cup H \cup P| = 26.\end{gathered}$$

Z zasady włączeń i wyłączeń otrzymujemy równanie

$$26 = 15 + 17 + 10 - 8 - 7 - 6 + |W \cap H \cap P| = 26,$$

którego rozwiązaniem jest $|W \cap H \cap P| = 5$. A zatem 5 uczniów uczy się wszystkich trzech języków.

Powróćmy do rozwiązania zadania 8. Definiujemy trzy zbiory liczb:

- A jest zbiorem trzycyfrowych liczb nieparzystych z dziewiątką na pierwszym miejscu,
- B jest zbiorem trzycyfrowych liczb nieparzystych z dziewiątką na drugim miejscu,
- C jest zbiorem trzycyfrowych liczb nieparzystych z dziewiątką na trzecim miejscu.

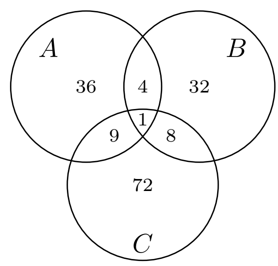
Zbiorem liczb, które nas interesują, jest oczywiście zbiór liczb, należących do co najmniej jednego z tych trzech zbiorów, czyli liczb, które należą do zbioru $A \cup B \cup C$. Korzystając z reguły mnożenia, nietrudno teraz zauważyć, że:

- do zbioru A należy 50 liczb (na drugim miejscu może stać dowolna z 10 cyfr, na trzecim dowolna z 5 cyfr nieparzystych), tzn. $|A| = 50$;
- do zbioru B należy 45 liczb (na pierwszym miejscu może stać dowolna z 9 cyfr różnych od zera, na trzecim jedna z 5 cyfr nieparzystych), tzn. $|B| = 45$;
- do zbioru C należy 90 liczb (na pierwszym miejscu może stać dowolna z 9 cyfr różnych od zera, na drugim dowolna z 10 cyfr), tzn. $|C| = 90$;
- do zbiorów A i B jednocześnie należą te liczby, które na pierwszych dwóch miejscach mają dziewiątki; jest ich 5, bo na trzecim miejscu może stać dowolna z 5 cyfr nieparzystych, czyli $|A \cap B| = 5$;
- do zbiorów A i C jednocześnie należą te liczby, które na pierwszym i trzecim miejscu mają dziewiątki; jest ich 10, bo na drugim miejscu może stać dowolna z 10 cyfr, czyli $|A \cap C| = 10$;
- do zbiorów B i C jednocześnie należą te liczby, które na dwóch ostatnich miejscach mają dziewiątki; jest ich 9, bo na pierwszym miejscu może stać dowolna cyfra różna od zera, czyli $|B \cap C| = 9$;
- do zbiorów A, B i C jednocześnie należy tylko jedna liczba, mianowicie 999, bo tylko ta liczba ma dziewiątkę na każdym z trzech miejsc, czyli $|A \cap B \cap C| = 1$.

Graficzna metoda rozwiązania prowadzi do rysunku 12.18. Odczytujemy z niego, że do co najmniej jednego zbioru (A lub B lub C) należą

$$1 + 4 + 9 + 8 + 36 + 32 + 72 = 162$$

liczby. Korzystając natomiast z zasady włączeń i wyłączeń, obliczamy, że liczba tych liczb, które należą do co najmniej jednego ze zbiorów A, B, C, jest równa



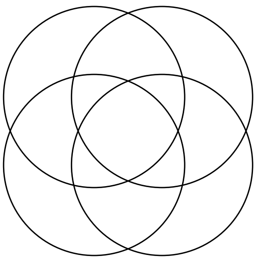
Rys. 12.18

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C| =$$
$$= 50 + 45 + 90 - 5 - 10 - 9 + 1 = 162.$$

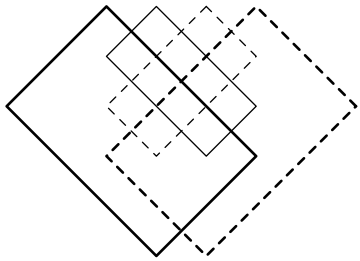
Korzystając natomiast z wprowadzonej wyżej notacji „kompromisowej”, możemy zapisać, że

$$S_{A,B,C} = n_A + n_B + n_C - n_{A,B} - n_{A,C} - n_{B,C} + n_{A,B,C} =$$
$$= 50 + 45 + 90 - 5 - 10 - 9 + 1 = 162.$$

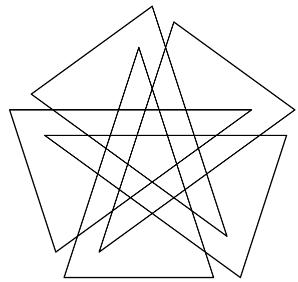
Uczniowie czasami pytają mnie, czy zadanie dla większej liczby zbiorów można w podobny sposób rozwiązać metodą graficzną. Pytanie bierze się stąd, że na ogół nie potrafią oni narysować czterech zbiorów w „położeniu ogólnym”, tzn. tak, by na rysunku były przedstawione wszystkie potrzebne obszary (a jest ich 16). Rysunek czterech okręgów prowadzi najwyżej do 14 obszarów (tak jak na przykład na rysunku 12.19). Można udowodnić, że jest to największa liczba obszarów, na które 4 okręgi mogą dzielić płaszczyznę. Możemy jednak przedstawić 4 zbiory inaczej, na przykład za pomocą czterech prostokątów. Na rysunku 12.20 każdy z czterech prostokątów jest narysowany innym rodzajem linii. Pięć zbiorów w położeniu ogólnym można przedstawić za pomocą pięciu trójkątów na przykład tak jak na rysunku 12.21.



Rys. 12.19



Rys. 12.20



Rys. 12.21

Czytelnika zainteresowanego możliwościami rysowania takich rysunków (tzw. diagramów Venna) odsyłam do mojego artykułu w czasopiśmie *Delta* [Guzicki-1].

Ostatnim ważnym zagadnieniem kombinatorycznym, które omawiam z uczniami gimnazjum, jest zliczanie podzbiorów ustalonego zbioru skończonego. Zaczynam jednak od zliczania tzw. ciągów zerojedynkowych. Ciąg zerojedynkowy długości n jest to ciąg $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n)$, którego każdy wyraz jest równy 0 lub 1 (mogą przy tym być same zera lub same jedynki). Nietrudno zauważyć, że istnieje 2^n takich ciągów. Możemy bowiem wyobrazić sobie n okienek; w każde można wpisać jedną z dwóch liczb: 0 lub 1. Z reguły mnożenia wynika, że istnieje 2^n możliwości takiego wpisywania, a więc 2^n ciągów zerojedynkowych długości n. Proszę teraz uczniów o wypisanie wszystkich takich ciągów długości 2, 3, 4 i 5, a następnie policzenie, ile wśród nich jest ciągów z daną liczbą jedynek. Okazuje się, że wypisanie wszystkich ciągów zerojedynkowych długości 5 sprawia niektórym uczniom spore kłopoty. Niewielu wypisuje je w kolejności wykorzystującej poprzednią listę (na przykład mogą wypisać dwukrotnie wszystkie ciągi długości 4 i następnie do każdego ciągu jednej grupy dopisać 0, a do każdego ciągu drugiej grupy dopisać 1). Najczęściej, być może motywowani następnym poleceniem, wypisują ciągi w kolejności liczby jedynek. Najpierw wypisują ciąg bez jedynek, potem ciągi z jedną jedynką, z dwiema jedynkami, z trzema jedynkami i tak dalej:

00000	10000	11000	11100	11110	11111
	01000	10100	11010	11101	
	00100	10010	11001	11011	
	00010	10001	10110	10111	
	00001	01100	10101	01111	
		01010	10011		
		01001	01110		
		00110	01101		
		00101	01011		
		00011	00111		

Pewną kontrolę poprawności wypisywania stanowi oczywiście znana liczba ciągów, musi ich być w tym przypadku $2^5 = 32$. Po prawidłowym wypisaniu wszystkich ciągów i obliczeniu, ile z nich ma daną liczbę jedynek, uczniowie zauważają, że otrzymane liczby już są im znane z trójkąta Pascala:

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}
$$

Teraz wprowadzam definicję **współczynnika dwumianowego**: liczba $\binom{n}{k}$ jest równa liczbie ciągów zerojedynkowych długości n, w których jest k jedynek. Trójkąt Pascala wygląda wtedy następująco:

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & & \\
 & & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & & \\
 & & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & & \\
 & \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{3}{3} & & \binom{4}{4} & \\
\binom{5}{0} & & \binom{5}{1} & & \binom{5}{2} & & \binom{3}{3} & & \binom{5}{4} & & \binom{5}{5}
\end{array}
$$

Zasada tworzenia trójkąta Pascala łatwo wynika z przyjętej definicji. Dla każdej liczby n mamy $\binom{n}{0} = 1$, bo istnieje tylko jeden ciąg długości n mający 0 jedynek — mianowicie ciąg składający się z samych zer. Podobnie $\binom{n}{n} = 1$, bo tylko jeden ciąg długości n ma n jedynek — ciąg składający się z samych jedynek. Wreszcie popatrzmy na wszystkie ciągi długości n mające k jedynek (gdzie $1 \le k \le n-1$). Zgrupujmy te ciągi w dwóch grupach — w pierwszej ciągi kończące się zerem, w drugiej kończące się jedynką. We wszystkich ciągach pierwszej grupy skreślmy ostatnie zero — otrzymamy wszystkie możliwe ciągi długości $n-1$ mające k jedynek. Podobnie we wszystkich ciągach drugiej grupy skreślmy ostatnią jedynkę — otrzymamy wszystkie ciągi długości n mające $k-1$ jedynek (pamiętajmy, że jedną z k jedynek skreśliliśmy). To dowodzi wzoru

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}.$$

Ten wzór wyjaśnia podstawową zasadę tworzenia trójkąta Pascala: każdy wyraz, oprócz skrajnych, jest sumą dwóch wyrazów stojących na lewo i na prawo od niego o jeden wiersz wyżej.

Zliczanie ciągów zerojedynkowych wiąże się ze zliczaniem podzbiorów ustalonego zbioru. Jeśli zbiór A ma n elementów, np. $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, to każdemu podzbiorowi zbioru A odpowiada pewien ciąg zerojedynkowy. Tłumaczę to uczniom w następujący sposób. Przypuśćmy, że nasz zbiór A jest zbiorem n osób, na przykład uczniów danej klasy. Chcę wybrać pewną liczbę osób (być może nikogo lub nawet wszystkich) do nagrody. Na ile sposobów mogę to zrobić? Otóż przyglądam się kolejno tym osobom i co do każdej podejmuję jedną z dwóch decyzji: „tak” lub „nie”. Jeśli tak, to piszę jedynkę, w przeciwnym przypadku piszę zero. Tworzę w ten sposób pewien ciąg zerojedynkowy. Każdemu sposobowi wyboru (czyli każdemu podzbiorowi) odpowiada jeden ciąg zerojedynkowy i na odwrót. Ponadto różnym podzbiorom odpowiadają różne ciągi. A więc tych podzbiorów jest tyle, ile ciągów zerojedynkowych, czyli 2^n. W podobny sposób przekonuję uczniów, że podzbiorów k-elementowych jest tyle, ile ciągów zerojedynkowych długości n, w których jest k jedynek, a więc $\binom{n}{k}$. Zauważmy, że w większości zastosowań uczniowie nie będą musieli obliczać współczynników dwumianowych $\binom{n}{k}$ ze wzoru, wystarczy im wypisanie kilku początkowych wierszy trójkąta Pascala. Czasami jednak wzór jest potrzebny. Wyjaśnię teraz, w jaki sposób pokazuję uczniom ten wzór.

Rozważamy ciągi długości n, których wyrazami mogą być 0, 1 lub 2. Chcemy zliczyć te ciągi, w których jest $k-1$ jedynek (przy czym $1 \leq k \leq n$) oraz dokładnie jedna 2. Jest zatem k wyrazów różnych od zera. Pomysł rozumowania polega na tym, by takie ciągi zliczyć dwoma sposobami. Ponieważ liczba elementów zbioru nie zależy oczywiście od sposobu zliczania, więc otrzymane dwie liczby będą równe. Zrealizujmy zatem ten pomysł. Oba sposoby zliczania polegają tak naprawdę na tym, by policzyć, na ile sposobów możemy taki ciąg skonstruować.

Sposób 1. Najpierw tworzymy ciąg zerojedynkowy długości n, w którym jest k jedynek (z definicji możemy to zrobić na $\binom{n}{k}$ sposobów), a następnie jedną jedynkę zamieniamy na dwójkę (ponieważ jest k jedynek, więc niezależnie od tego, na których miejscach one stoją w naszym ciągu, możemy to zrobić na k sposobów). Z reguły mnożenia wynika, że istnieje $k \cdot \binom{n}{k}$ ciągów rozważanej postaci.

Sposób 2. Najpierw wybieramy miejsce, na którym wpiszemy dwójkę. Możemy to miejsce wybrać na n sposobów. Pozostaje $n-1$ miejsc. Możemy je potraktować jako miejsca, w które wpiszemy wyrazy ciągu zerojedynkowego długości $n-1$, w którym jest $k-1$ jedynek. Z definicji wiemy, że istnieje $\binom{n-1}{k-1}$ takich ciągów. Znów korzystamy z reguły mnożenia i stwierdzamy, że istnieje $n \cdot \binom{n-1}{k-1}$ ciągów rozważanej postaci.

Jak wspomniałem, niezależnie od sposobu zliczania elementów musimy otrzymać ten sam wynik. Mamy zatem równość

$$k \cdot \binom{n}{k} = n \cdot \binom{n-1}{k-1}.$$

Ponieważ założyliśmy, że $k \geq 1$, więc możemy obie strony podzielić przez k:

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k} \cdot \binom{n-1}{k-1}.$$

Ten wzór możemy zastosować do obliczania współczynników dwumianowych. Pokazuję to na przykładzie zadania o grze losowej.

14. Na ile sposobów można wybrać 6 liczb spośród liczb od 1 do 49? Inaczej mówiąc, ile jest 6-elementowych podzbiorów zbioru 49-elementowego?

Z definicji wiemy, że liczba takich podzbiorów jest równa $\binom{49}{6}$. Korzystając kilkakrotnie z powyższego wzoru oraz ze znanego nam już wzoru $\binom{n}{0} = 1$, otrzymujemy:

$$\begin{aligned}\binom{49}{6} &= \frac{49}{6} \cdot \binom{48}{5} = \frac{49}{6} \cdot \frac{48}{5} \cdot \binom{47}{4} = \frac{49}{6} \cdot \frac{48}{5} \cdot \frac{47}{4} \cdot \binom{46}{3} = \\ &= \frac{49}{6} \cdot \frac{48}{5} \cdot \frac{47}{4} \cdot \frac{46}{3} \cdot \binom{45}{2} = \frac{49}{6} \cdot \frac{48}{5} \cdot \frac{47}{4} \cdot \frac{46}{3} \cdot \frac{45}{2} \cdot \binom{44}{1} = \\ &= \frac{49}{6} \cdot \frac{48}{5} \cdot \frac{47}{4} \cdot \frac{46}{3} \cdot \frac{45}{2} \cdot \frac{44}{1} \cdot \binom{43}{0} = \frac{49}{6} \cdot \frac{48}{5} \cdot \frac{47}{4} \cdot \frac{46}{3} \cdot \frac{45}{2} \cdot \frac{44}{1} \cdot 1 = \\ &= \frac{49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}.\end{aligned}$$

Po skróceniu ułamka (bo: $48 = 6 \cdot 4 \cdot 2$ oraz $15 = 5 \cdot 3$) , otrzymujemy

$$\binom{49}{6} = 49 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 3 \cdot 44 = 13983816.$$

Nietrudno uogólnić to rozumowanie, by otrzymać wzór na współczynnik dwumianowy $\binom{n}{k}$ — w liczniku mamy iloczyn kolejnych (w porządku malejącym) k liczb począwszy od n (a więc od n do $n-k+1$), w mianowniku zaś iloczyn wszystkich liczb od 1 do k. Wielu uczniów zna już pojęcie silni, więc ten wzór można zapisać w znany sposób za pomocą silni. Proszę jednak uczniów, by zapamiętali w otrzymanej postaci kilka szczególnych przypadków wzoru na współczynnik dwumianowy:

$$\binom{n}{1} = n, \quad \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}, \quad \binom{n}{3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}.$$

Po tym krótkim kursie kombinatoryki powracam do zadań z rachunku prawdopodobieństwa. Wybieram kilkanaście zadań (najczęściej korzystam ze zbioru zadań [Stachowski]) dotyczących dość prostych doświadczeń losowych (rzut kostką, także wielościenną, losowanie jednej lub kilku liczb z danego zbioru liczb lub z urny z ponumerowanymi kulami, jednoczesny rzut kostką i monetą, losowanie kart z talii). Oczekuję, że w rozwiązaniach uczniowie będą korzystali wyłącznie z reguł dodawania i mnożenia oraz możliwie prostych metod obliczania współczynników dwumianowych.

Ten rozdział chcę zakończyć kilkoma ogólnymi uwagami dotyczącymi nauczania kombinatoryki. Po pierwsze, kombinatoryka to nie tylko permutacje, kombinacje i wariacje (z powtórzeniami lub bez). Tych pojęć na lekcji nie omawiam. Kombinatoryka (przynajmniej w zakresie obowiązującym w szkole) to przede wszystkim sztuka zliczania elementów zbiorów skończonych. Chciałbym, by uczniowie nauczyli się tej sztuki korzystając z najprostszych zasad — ten sposób myślenia znacznie bardziej przyda im się w dalszej nauce kombinatoryki, niż wyłącznie umiejętność rozpoznawania wybranych obiektów kombinatorycznych (wspomniane permutacje, kombinacje i wariacje). Każde zadanie, w którym korzysta się z gotowych wzorów na liczbę wariacji, można bardzo łatwo rozwiązać bezpośrednio z reguły mnożenia — ale nie na odwrót (np. zadanie 8). Pokazane wyżej dwa ważne wzory:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

(gdzie $1 \leq k \leq n-1$) oraz

$$k \cdot \binom{n}{k} = n \cdot \binom{n-1}{k-1}$$

(gdzie $1 \leq k \leq n$) zostały wyprowadzone bezpośrednio z definicji współczynnika dwumianowego $\binom{n}{k}$ jako liczby ciągów zerojedynkowych długości n, w których jest k jedynek, a nie za pomocą przekształceń algebraicznych wzoru z silniami. Takie dowody nazywamy w kombinatoryce **dowodami kombinatorycznymi**. Otrzymane w drodze rozumowania kombinatorycznego wzory mają widoczny sens, nie są tylko wynikiem zręcznej manipulacji symbolami. To bardzo ważne, bo w ten sposób uczniowie dostrzegają treść poznawanych wzorów. Wiele wzorów można też znacznie łatwiej uzasadnić metodą kombinatoryczną niż metodami algebraicznymi.

Przykładem jest następująca tożsamość:

$$\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \binom{n}{2}^2 + \ldots + \binom{n}{n-1}^2 + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}.$$

Dowód polega na zliczaniu dwoma sposobami ciągów zerojedynkowych długości $2n$ mających n jedynek. Z jednej strony jest ich oczywiście $\binom{2n}{n}$ — to jest prawa strona wzoru. Z drugiej strony patrzymy na liczbę jedynek wśród pierwszych n wyrazów ciągu — jest to liczba od 0 do n. Jeśli wśród pierwszych n wyrazów ciągu jest k jedynek, to wśród ostatnich n wyrazów jest $n-k$ jedynek. Istnieje $\binom{n}{k}$ ciągów mających k jedynek i $\binom{n}{n-k}$, czyli $\binom{n}{k}$ ciągów mających $n-k$ jedynek. Musimy wziąć dwa ciągi — jeden mający k jedynek i jeden mający $n-k$ jedynek. Reguła mnożenia mówi, że możemy to zrobić na $\binom{n}{k}^2$ sposobów. Reguła dodawania mówi z kolei, że te liczby mamy dodać — to daje lewą stronę wzoru. Dowód kombinatoryczny równości $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$ pozostawię jako ćwiczenie.

Oczywiście istnieje dowód rachunkowy tej tożsamości. Nie polecam szukania bezpośredniego dowodu przez indukcję. Łatwiej będzie udowodnić tożsamość ogólniejszą, zwaną tożsamością Cauchy'ego-Vandermonde'a:

$$\sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i}\binom{m}{k-i} = \binom{m+n}{k}$$

dla dowolnych liczb m, n i k. Wyjaśnienia wymaga tylko, co to znaczy $\binom{n}{k}$ dla $k > n$, co w tej tożsamości może się zdarzyć (najprościej przyjąć, tak jak się to zwykle robi, że $\binom{n}{k} = 0$ dla $k < 0$ oraz dla $k > n$). Tego dowodu jednak nie przeprowadzałbym w gimnazjum. Dowód kombinatoryczny można pokazać zdolnym gimnazjalistom.

Bardzo zachęcam do takiego właśnie uczenia kombinatoryki, a zacząć można już w gimnazjum.

13. Funkcje

Pod koniec II klasy lub na początku III klasy zaczynamy zajmować się funkcjami. Zaczynam od przykładów — funkcja, która każdemu uczniowi mojej klasy przyporządkowuje jego numer na liście, funkcja, która każdemu uczniowi przypisuje jego sąsiada w ławce (tu zwracam uwagę na to, że dla niektórych uczniów ta funkcja może być nieokreślona). Ogół (zbiór) tych obiektów, dla których funkcja jest określona, nazywamy dziedziną. Tu zazwyczaj już używam słowa „zbiór”, choć rozumiem je w sposób potoczny i nie próbuję wyjaśniać uczniom, czym są zbiory w matematyce.

Pokazuję przykłady przekształceń geometrycznych. To właśnie teraz uczniowie dowiadują się, że te wszystkie ruchy płaszczyzny, które demonstrowałem przy omawianiu szlaczków i tapet, były przekształceniami geometrycznymi. Mamy więc przesunięcia i obroty wokół ustalonego punktu. Mamy symetrie i symetrie z poślizgiem. Przy okazji uczniowie zauważają, że niektóre punkty przechodzą na siebie i pytają, czy jest to w porządku. Mówię im wtedy o punktach stałych, a nawet o figurach stałych dla przekształcenia. Uczniowie znajdują łatwo przykłady figur stałych przy przesunięciach (zazwyczaj tylko proste równoległe do wektora przesunięcia; o pasach trzeba im powiedzieć, a zaskoczeniem jest to, że cała płaszczyzna też jest taka). Później szukamy figur stałych przy obrotach, symetriach i symetriach z poślizgiem.

Pokazuję przykłady innych przekształceń, ale nie omawiam dokładnie ich własności. Tak więc pokazuję rzuty (nie tylko prostokątne), jednokładność oraz przekształcenia przestrzeni (przesunięcia oraz rzuty na płaszczyznę).

Po przekształceniach geometrycznych przychodzi pora na funkcje liczbowe i ich wykresy. Przypominam, co to jest układ współrzędnych i pokazuję na przykładzie wykres funkcji. Biorę najpierw jakąś funkcję o dziedzinie skończonej, na przykład opisuję funkcję, która przyporządkowuje liczbom od 1 do n (gdzie n jest liczbą uczniów w klasie) liczby z tego samego zbioru w sposób następujący:

$$\text{liczba} \mapsto \text{uczeń o tym numerze} \mapsto \text{sąsiad tego ucznia} \mapsto \text{numer tego sąsiada.}$$

Taki wykres można szczególnie dobrze narysować na tablicy kratkowanej.

Wreszcie przychodzi pora na funkcje liczbowe, których wartości obliczamy ze wzoru. Tłumaczę uczniom, co to jest dziedzina tak określonej funkcji i jak tworzymy wykresy takich funkcji. Wyjaśniam, że na ogół wykres jest krzywą. Zdarza się jednak, że wykres składa się z kilku oddzielnych kawałków. Mówię, w jaki sposób można narysować wykres ręcznie i jak można to zrobić na komputerze. Istnieją specjalne programy do rysowania wykresów funkcji; można też wykorzystać program *Excel*, tworząc tablicę wartości funkcji w pewnym przedziale i rysując odpowiedni diagram. Wtedy rozdaję uczniom zestaw 20 funkcji i proszę o zrobienie wykresów. Najlepiej, jeśli uczniowie te wykresy wydrukują i przyniosą na jedną z następnych lekcji otrzymane wydruki — będziemy je omawiać. Proszę też, by przyjrzeli się tym wykresom i zastanowili się, jakie szczególne własności wykresów są warte omówienia.

Uczniowie sami często dostrzegają takie punkty jak maksima i minima lokalne, a także dostrzegają pojęcie monotoniczności. Być może na lekcjach innych przedmiotów (na przykład na fizyce) z takimi pojęciami już się zetknęli. Te właśnie pojęcia będziemy omawiać na następnych lekcjach. A oto wspomniany zestaw funkcji:

Zadanie domowe. Obejrzyj na komputerze wykresy następujących funkcji, wydrukuj te wykresy. Na każdym wykresie zaznacz jego charakterystyczne miejsca:

1. $f(x) = \frac{1}{2}x + 1;$

2. $f(x) = 3x - 5;$

3. $f(x) = -x + 3;$

4. $f(x) = -3x + 6;$

5. $f(x) = x^2;$

6. $f(x) = x^2 - 6x + 5;$

7. $f(x) = x^3;$

8. $f(x) = x^3 - 3x;$

9. $f(x) = 3x^2 - x^3;$

10. $f(x) = \dfrac{1}{x};$

11. $f(x) = x + \dfrac{4}{x};$

12. $f(x) = x - \dfrac{1}{x};$

13. $f(x) = \dfrac{2}{x^2 + 1};$

14. $f(x) = -\dfrac{4x}{x^2 + 1};$

15. $f(x) = \dfrac{1}{x^2};$

16. $f(x) = \dfrac{4x}{(x-1)^2};$

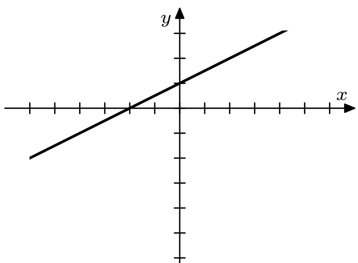
17. $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 1};$

18. $f(x) = \dfrac{x}{(x+2)(x-1)};$

19. $f(x) = \dfrac{4x}{(x-1)(x-4)};$

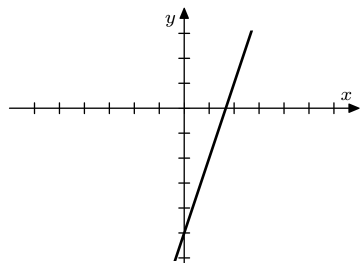
20. $f(x) = \sqrt{16 - x^2}.$

Oto te wykresy (pokazuję wszystkie na rysunkach 13.1 – 13.20, w razie, gdyby uczniowie jakiejś szkoły nie mieli programu komputerowego pozwalającego te wykresy obejrzeć):



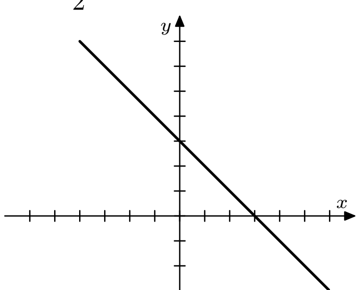
Rys. 13.1

1. $f(x) = \dfrac{1}{2}x + 1$



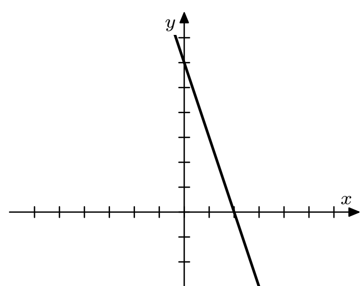
Rys. 13.2

2. $f(x) = 3x - 5$



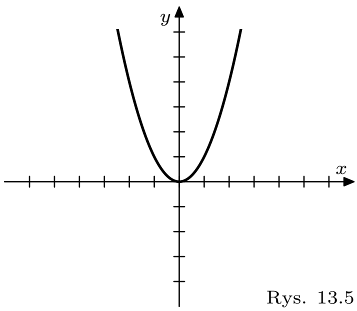
Rys. 13.3

3. $f(x) = -x + 3$



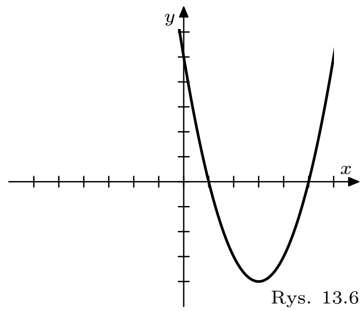
Rys. 13.4

4. $f(x) = -3x + 6$



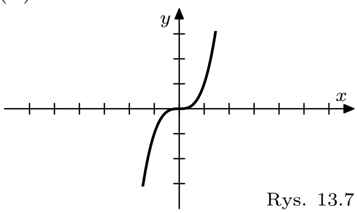
Rys. 13.5

5. $f(x) = x^2$



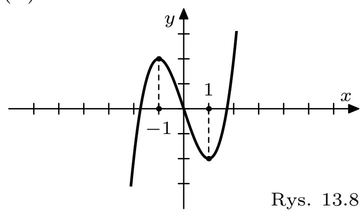
Rys. 13.6

6. $f(x) = x^2 - 6x + 5$



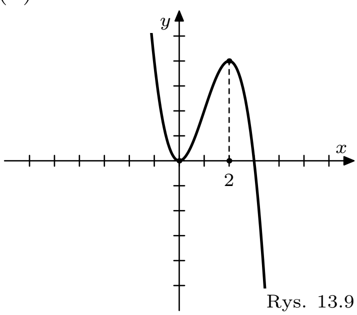
Rys. 13.7

7. $f(x) = x^3$



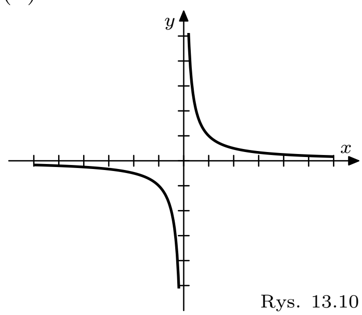
Rys. 13.8

8. $f(x) = x^3 - 3x$



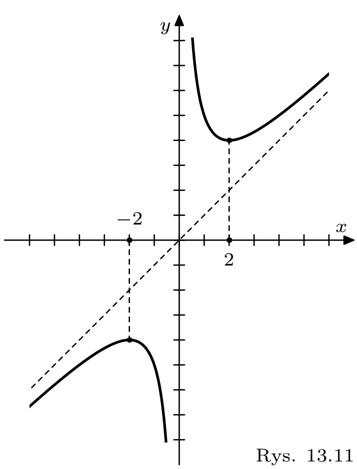
Rys. 13.9

9. $f(x) = 3x^2 - x^3$



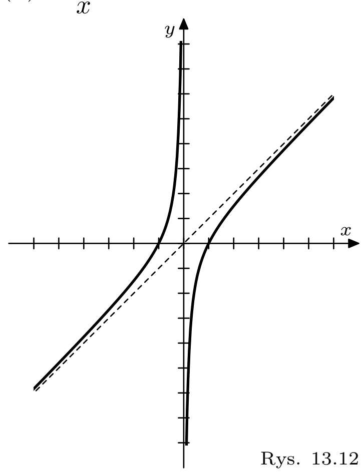
Rys. 13.10

10. $f(x) = \dfrac{1}{x}$



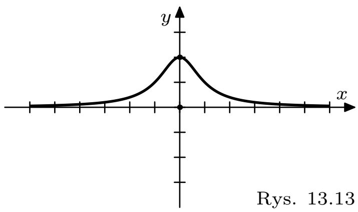
Rys. 13.11

11. $f(x) = x + \dfrac{4}{x}$



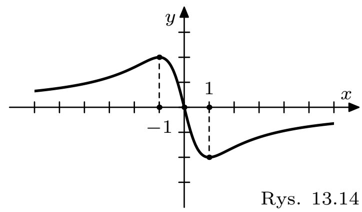
Rys. 13.12

12. $f(x) = x - \dfrac{1}{x}$



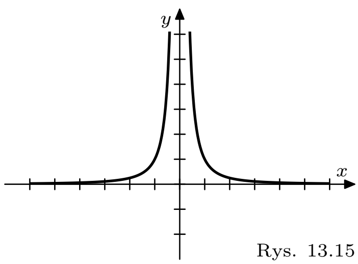
Rys. 13.13

13. $f(x) = \dfrac{2}{x^2+1}$



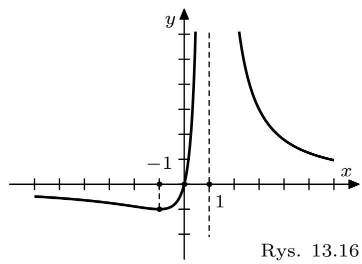
Rys. 13.14

14. $f(x) = -\dfrac{4x}{x^2+1}$



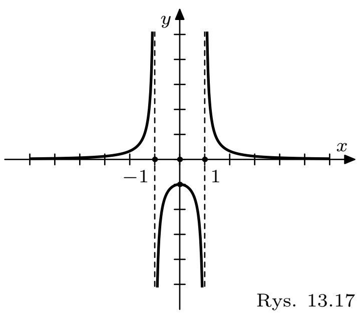
Rys. 13.15

15. $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$



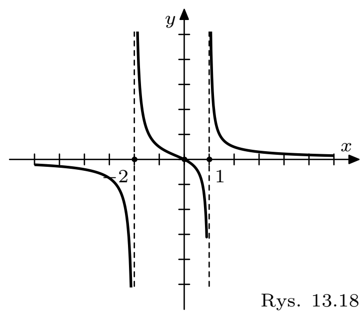
Rys. 13.16

16. $f(x) = \dfrac{4x}{(x-1)^2}$



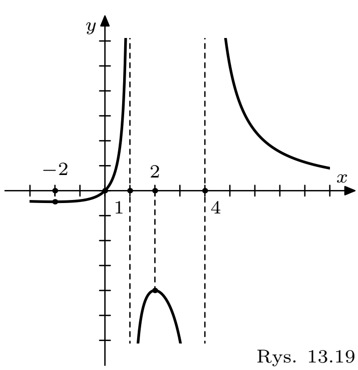
Rys. 13.17

17. $f(x) = \dfrac{1}{x^2-1}$



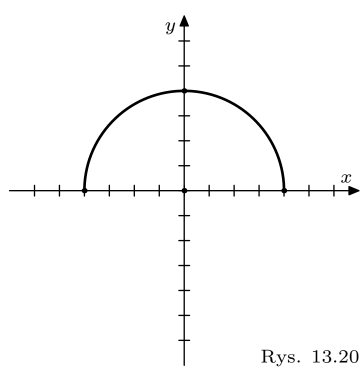
Rys. 13.18

18. $f(x) = \dfrac{x}{(x+2)(x-1)}$



Rys. 13.19

19. $f(x) = \dfrac{4x}{(x-1)(x-4)}$



Rys. 13.20

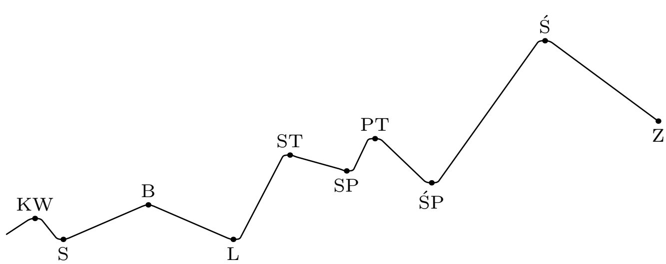
20. $f(x) = \sqrt{16-x^2}$

Po obejrzeniu przez uczniów i wydrukowaniu wykresów, zaczynam omawiać te wykresy z uczniami. Uczniowie sami dość łatwo dostrzegają pewne własności funkcji, których wykresy oglądają. Zauważają, że pierwsze cztery wykresy są liniami prostymi. Omawiam z nimi własności tych prostych. Zauważamy różne nachylenia tych prostych, pytam uczniów, od czego te nachylenia zależą. Proszę, by w domu obejrzeli jeszcze kilkanaście wykresów funkcji liniowych (podaję im postać wzoru: $f(x) = ax + b$) i na podstawie obserwacji odpowiedzieli na pytanie, jaka jest rola obu współczynników a i b. Oczywiście niektórzy uczniowie już to wiedzą, ale dla wielu innych jest to dobry moment do własnych badań, obserwacji i stawiania hipotez. Na jednej z następnych lekcji do tego tematu wracamy i wyjaśniam wszystkie kwestie związane z funkcjami liniowymi. Na razie pytam o kierunek nachylenia, o to czy wykres może być prostą poziomą lub pionową, gdzie wykres przecina osie itp. Oczekuję odpowiedzi — powtarzam — na podstawie obserwacji.

Uczniowie zauważają, że niektóre wykresy zmieniają kierunek (tzn. w jednych przedziałach rosną, w innych maleją), inne nie. Zaznaczają ekstrema lokalne, nie umiejąc ich nazwać. Widzą jednak, że są to jakieś charakterystyczne miejsca na wykresie. Zauważają, że niektóre wykresy składają się z jednej części (z jednego kawałka), inne natomiast się rozrywają. Czasami umieją nawet powiedzieć, skąd się takie rozrywanie bierze. Zauważają, że niektóre wzory nie definiują funkcji określonych dla wszystkich liczb rzeczywistych; powodem jest dzielenie przez zero lub wyciąganie pierwiastka z liczby ujemnej. Wreszcie zauważają półokrąg w przykładzie 20 i pytają o to, czy cały okrąg może być wykresem jakiejś funkcji. To pytanie generuje oczywiście następne: czy mogą też być inne krzywe lub jednocześnie kilka prostych (na przykład proste równoległe itp.). Jeśli uczniowie sami takich pytań nie zadadzą, ja sam je prowokuję. Te pytania pozwalają przede wszystkim zrozumieć, co to jest funkcja liczbowa i co to jest jej wykres.

Teraz przychodzi pora na monotoniczność. Monotoniczność funkcji to bardzo ważne pojęcie matematyczne i należy odpowiednio wcześnie je uczniom wyjaśniać. Moim zdaniem również wiele innych pojęć matematycznych należy wyjaśniać wielokrotnie, za każdym razem nieco inaczej i dokładniej. Monotoniczność funkcji należy omawiać z uczniami co najmniej trzykrotnie. Najpierw muszą oni zrozumieć samo pojęcie — najlepiej za pomocą wykresu. Tłumaczę im, że wykres to tak jakby rysunek drogi w górach: idziemy od lewej strony do prawej (a więc zgodnie z kierunkiem wyznaczonym przez oś Ox) i zwracamy uwagę na to, czy idziemy pod górę, czy schodzimy w dół. Podaję przykład takiej wędrówki.

Przypuśćmy, że wyruszamy ze stacji kolejki linowej na Kasprowym Wierchu, wchodzimy na szczyt Kasprowego Wierchu i następnie idziemy przez Świnicę na Przełęcz Zawrat (rys. 13.21).



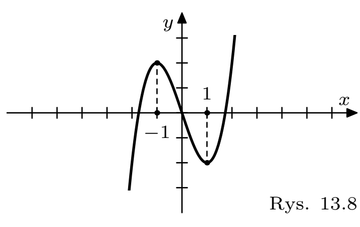
Rys. 13.21

Wówczas najpierw podchodzimy ok. 30 metrów (różnicy poziomów) na szczyt (1987 m n.p.m.), potem schodzimy na Suchą Przełęcz (1955 m), podchodzimy na Beskid (2011 m), schodzimy na Przełęcz Liliowe (1950 m), podchodzimy na Skrajną Turnię (2099 m) i schodzimy na Skrajną Przełęcz (2071 m). Teraz ścieżka turystyczna omija szczyt Pośredniej Turni (2128 m). Gdybyśmy jednak weszli na ten szczyt, to mielibyśmy następne podejście, ze szczytu Pośredniej Turni zeszlibyśmy na Świnicką Przełęcz (2050 m). Wreszcie — tym razem już nie wyobrażajmy sobie drogi granią — obchodzimy ścieżką niższy wierzchołek Świnicy i wchodzimy od razu na główny wierzchołek (2301 m). Teraz schodzimy ścieżką (omijając grań Świnicy) na Przełęcz Zawrat (2159 m) i tu kończymy interesujący nas odcinek wycieczki. Oto najbardziej charakterystyczne punkty (szczyty i przełęcze) wycieczki:

KW	Kasprowy Wierch	1987 m n.p.m.
S	Sucha Przełęcz	1955 m n.p.m.
B	Beskid	2011 m n.p.m.
L	Przełęcz Liliowe	1950 m n.p.m.
ST	Skrajna Turnia	2099 m n.p.m.
SP	Skrajna Przełęcz	2071 m n.p.m.
PT	Pośrednia Turnia	2128 m n.p.m.
ŚP	Świnicka Przełęcz	2050 m n.p.m.
Ś	Świnica	2301 m n.p.m.
Z	Zawrat	2159 m n.p.m.

Dostrzegamy pięć podejść i pięć zejść. Po drodze zdobywamy pięć szczytów i schodzimy na cztery przełęcze (oprócz końcowego Zawratu). Oczywiste jest, że są to bardzo charakterystyczne punkty naszej wędrówki; tym samym charakterystyczne punkty wykresu funkcji. Szczyty nazywam maksimami lokalnymi, przełęcze minimami lokalnymi. Słowo „lokalny" staje się jasne, gdy porównamy osiągnięcie, jakim jest „zdobycie" po drodze Beskidu z wejściem na najwyższy szczyt naszej wędrówki — Świnicę. Ten szczyt to oczywiście maksimum globalne. W przedziale, w którym podchodzimy pod górę, funkcja jest rosnąca; jeśli schodzimy w dół, to funkcja jest malejąca.

Terminologia górska bardzo dobrze przemawia do wyobraźni i uczniowie dość łatwo zapamiętują ważne pojęcia. Teraz przychodzi pora na zapisanie obserwacji. Proszę uczniów o zrobienie tabelki przebiegu zmienności funkcji na podstawie wykresów. Na przykład dla funkcji o numerze 8 (dla przypomnienia: $f(x) = x^3 - 3x$) wykresowi na rysunku 13.8



Rys. 13.8

odpowiada tabelka:

x		$-1{,}7$		-1		0		1		$1{,}7$	
y	$\nearrow$	0 miejsce zerowe	$\nearrow$	2 max lok.	$\searrow$	0 miejsce zerowe	$\searrow$	-2 min lok.	$\nearrow$	0 miejsce zerowe	$\nearrow$

Zwracam uwagę na to, że podobne tabelki robię z uczniami wyłącznie na podstawie obserwacji wykresów, a nie obliczeń. Te przyjdą później. Dlatego na przykład w tabelce pojawiają się liczby $-1{,}7$ oraz $1{,}7$ zamiast $-\sqrt{3}$ i $\sqrt{3}$. Dokładne wartości miejsc zerowych otrzymamy rozwiązując równanie $x^3 - 3x = 0$, co nie jest trudne, bowiem

$$x^3 - 3x = x(x^2 - 3) = x(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3}).$$

To oczywiście warto z uczniami kiedyś zrobić, ale teraz cel jest inny, przekazać intuicję monotoniczności funkcji i przedziałów monotoniczności, a do tego w zupełności wystarczą wartości przybliżone odczytane z wykresu.

Uczniowie dość łatwo tworzą tabelki z wykresów funkcji. Powstaje wtedy naturalne pytanie o to, czy z tabelki można odtworzyć wykres. Łatwo przekonujemy się, że tak nie jest, z tabelki nie można odtworzyć wykresu funkcji w sposób jednoznaczny. Nie można na przykład rozstrzygnąć, czy funkcja jest ograniczona. Porównajmy wykresy funkcji 8 i 14. Ich tabelki różnią się tylko miejscami zerowymi funkcji, przedziały monotoniczności i ekstrema lokalne są takie same. Możemy jednak wyobrazić sobie taką modyfikację wykresu funkcji 14, w której będą te dwa brakujące miejsca zerowe i wykresy tak się „odegną”, że funkcja będzie ograniczona, w przeciwieństwie do funkcji nr 8. Nie ma przy tym znaczenia, że nie umiemy podać wzoru takiej funkcji i nie umiemy w związku z tym wprowadzić takiego wzoru do komputera i obejrzeć wykresu. Ważne jest, że umiemy sobie taką funkcję wyobrazić. Rysujemy teraz z uczniami różne wykresy odpowiadające jednej tabelce i w ten sposób dochodzimy do tego, że w przyszłości będą potrzebne dodatkowe informacje o funkcjach. Na razie jednak zadowalamy się taką tabelką, która jedynie opisuje przedziały monotoniczności, ekstrema lokalne, miejsca zerowe i punkt przecięcia z osią Oy.

Po zrobieniu i omówieniu kilku tabelek podaję uczniom definicję monotoniczności. Mówię, że rozpatrujemy zawsze przedziały (być może niewłaściwe) i zastanawiamy się, czy w danym przedziale funkcja jest rosnąca czy malejąca (czy też nie ma żadnej z tych własności). Wybieramy dwie liczby x_1 i x_2 z rozważanego przedziału i zakładamy, że $x_1 < x_2$. Funkcja f jest rosnąca, jeśli niezależnie od tego, jakie liczby x_1 i x_2 z tego przedziału wybierzemy (pamiętając o warunku, że $x_1 < x_2$), to będzie zachodzić nierówność $f(x_1) < f(x_2)$. Funkcja f jest natomiast malejąca w tym przedziale, jeśli niezależnie od wyboru liczb x_1 i x_2 (takich, że $x_1 < x_2$) będzie zachodzić nierówność przeciwna, tzn. $f(x_1) > f(x_2)$.

Tych definicji nie zapisuję w sposób formalny! Zapisuję je na tablicy w sposób taki jak wyżej, słowami. Mówię następnie, że w obu przypadkach możemy badać znak różnicy $f(x_2) - f(x_1)$. Wówczas:

- jeśli $f(x_2) - f(x_1) > 0$, to funkcja f jest rosnąca;
- jeśli $f(x_2) - f(x_1) < 0$, to funkcja f jest malejąca.

Popatrzmy, w jaki sposób badamy monotoniczność funkcji. W praktyce najpierw wybieramy dowolne x_1 i x_2 takie, że $x_1 < x_2$ i obliczamy różnicę $f(x_2) - f(x_1)$, doprowadzając ją do wygodnej postaci. Dopiero wtedy zastanawiamy się, w jakim przedziale chcemy rozpatrywać naszą funkcję. Zobaczmy na przykładach, jak się to robi. Najpierw zbadajmy funkcje liniowe.

Niech funkcja f będzie dana wzorem $f(x) = 3x+2$. Bierzemy dowolne x_1 i x_2 i zakładamy, że $x_1 < x_2$. Wówczas

$$f(x_2) - f(x_1) = (3x_2 + 2) - (3x_1 + 2) = 3x_2 + 2 - 3x_1 - 2 = 3(x_2 - x_1).$$

Ponieważ $x_1 < x_2$, więc $x_2 - x_1 > 0$ i stąd wynika, że $f(x_2) - f(x_1) > 0$. Zauważmy, że ta nierówność zachodzi dla dowolnych x_1 i x_2. Stąd wniosek, że rozpatrywana funkcja f jest rosnąca w całym zbiorze liczb rzeczywistych (tzn. w przedziale niewłaściwym $(-\infty, +\infty)$).

W taki sam sposób możemy zbadać monotoniczność funkcji liniowej określonej wzorem ogólnym. Niech zatem $f(x) = ax + b$. Wówczas

$$f(x_2) - f(x_1) = (ax_2 + b) - (ax_1 + b) = a(x_2 - x_1).$$

Ponieważ znów wybieramy $x_1 < x_2$, więc $x_2 - x_1 > 0$. Zatem

- jeśli $a > 0$, to funkcja jest rosnąca (w całym zbiorze liczb rzeczywistych);
- jeśli $a < 0$, to funkcja jest malejąca (w całym zbiorze liczb rzeczywistych).

Przypadek, gdy $a = 0$ omawiamy oddzielnie. Funkcja liniowa jest wtedy stała i jej wykres jest prostą poziomą (równoległą do osi Ox). Wyjaśniam też uczniom, dlaczego wykres funkcji nie może być prostą pionową.

Następnie przychodzi kolej na funkcję kwadratową. Niech $f(x) = x^2$. Wówczas

$$f(x_2) - f(x_1) = x_2^2 - x_1^2 = (x_2 - x_1)(x_2 + x_1).$$

Tak jak poprzednio, $x_2 - x_1 > 0$. Interesuje nas zatem znak wyrażenia w drugim nawiasie, tzn. $x_2 + x_1$. Teraz zauważamy, że jeśli $0 \le x_1 < x_2$, to $x_2 + x_1 > 0$. Jeśli natomiast $x_1 < x_2 \le 0$, to $x_2 + x_1 < 0$. Stąd wyciągamy wniosek, że:

- w przedziale $\langle 0, +\infty)$ funkcja f jest rosnąca;
- w przedziale $(-\infty, 0\rangle$ funkcja f jest malejąca.

Oczywiście tego, że liczbą oddzielającą oba przedziały monotoniczności jest zero, możemy się domyślić patrząc na wykres lub przyglądając się wyrażeniu $x_2 + x_1$. Pamiętamy, że obie liczby x_1 i x_2 są wybierane z tego samego przedziału. Zastanawiamy się, jakie muszą one być, by ta suma na pewno była dodatnia. Nietrudno zauważyć, że tak jest właśnie dla obu liczb dodatnich. Potem możemy jeszcze dostrzec, że liczba x_1 może być równa 0 (bo wtedy $x_2 > 0$). W przypadku funkcji określonych bardziej skomplikowanym wzorem takie odgadnięcie może być trudniejsze.

Popatrzmy na następną funkcję kwadratową. Funkcja o numerze 6 jest określona wzorem $f(x) = x^2 - 6x + 5$. Wówczas

$$\begin{aligned} f(x_2) - f(x_1) &= (x_2^2 - 6x_2 + 5) - (x_1^2 - 6x_1 + 5) = x_2^2 - 6x_2 + 5 - x_1^2 + 6x_1 - 5 = \\ &= x_2^2 - x_1^2 - 6x_2 + 6x_1 = (x_2 - x_1)(x_2 + x_1) - 6(x_2 - x_1) = \\ &= (x_2 - x_1)(x_2 + x_1 - 6). \end{aligned}$$

Teraz domyślamy się, że liczbą oddzielającą przedziały monotoniczności jest 3. Mianowicie, jeśli $3 \le x_1 < x_2$, to $x_1 + x_2 > 6$ i wtedy $f(x_2) - f(x_1) > 0$. Podobnie, jeśli $x_1 < x_2 \le 3$, to $f(x_2) - f(x_1) < 0$. Zatem:

- w przedziale $\langle 3, +\infty)$ funkcja f jest rosnąca;
- w przedziale $(-\infty, 3\rangle$ funkcja f jest malejąca.

Teraz przychodzi pora na wielomiany trzeciego stopnia. Tu jest trudniej. Zacznijmy od funkcji o numerze 7, określonej wzorem: $f(x) = x^3$. Tym razem mamy

$$f(x_2) - f(x_1) = x_2^3 - x_1^3 = (x_2 - x_1)(x_2^2 + x_1 x_2 + x_1^2).$$

Tak jak poprzednio, $x_2 - x_1 > 0$ i interesuje nas znak wyrażenia $x_2^2 + x_1x_2 + x_1^2$. Przypominamy sobie lekcje o dowodzeniu nierówności; dowodziliśmy, że dla dowolnych liczb rzeczywistych a i b zachodzi nierówność $a^2 + ab + b^2 \geq 0$, przy czym równość była tylko dla $a = b = 0$. Dla przypomnienia:

$$a^2 + ab + b^2 = \frac{1}{2} \cdot \left(a^2 + (a+b)^2 + b^2\right).$$

Ponieważ $x_1 < x_2$, więc liczby x_1 i x_2 nie mogą być jednocześnie równe zeru. Zatem

$$x_2^2 + x_1x_2 + x_1^2 > 0,$$

skąd wynika, że $f(x_2) - f(x_1) > 0$. Funkcja f jest więc rosnąca w całym zbiorze liczb rzeczywistych.

Trudniej jest znaleźć przedziały monotoniczności następnej funkcji, określonej wzorem $f(x) = x^3 - 3x$. Tym razem mamy

$$f(x_2) - f(x_1) = (x_2^3 - x_1^3) - (3x_2 - 3x_1) = (x_2 - x_1)(x_2^2 + x_1x_2 + x_1^2 - 3).$$

Teraz zauważamy, że:

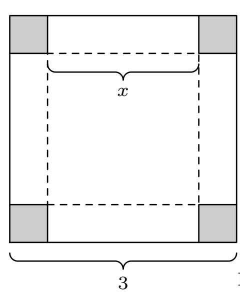
- jeśli $1 \leq x_1 < x_2$, to $x_1^2 \geq 1$, $x_1x_2 > 1$ oraz $x_2^2 > 1$; stąd wynika nierówność ostra $x_2^2 + x_1x_2 + x_1^2 - 3 > 0$;
- jeśli $x_1 < x_2 \leq -1$, to $x_1^2 > 1$, $x_1x_2 > 1$ oraz $x_2^2 \geq 1$; stąd wynika nierówność ostra $x_2^2 + x_1x_2 + x_1^2 - 3 > 0$;
- jeśli $-1 \leq x_1 < x_2 \leq 1$, to $x_1^2 \leq 1$, $x_1x_2 \leq 1$ oraz $x_2^2 \leq 1$; stąd wynika nierówność nieostra $x_2^2 + x_1x_2 + x_1^2 - 3 \leq 0$. Równość może przy tym zachodzić tylko wtedy, gdy $x_1^2 = x_1x_2 = x_2^2 = 1$; wówczas x_1 i x_2 muszą być tego samego znaku i łatwo stwierdzamy, że $x_1 = x_2 = -1$ lub $x_1 = x_2 = 1$. Ponieważ $x_1 < x_2$, więc to jest niemożliwe; zatem $x_2^2 + x_1x_2 + x_1^2 - 3 < 0$.

Stąd wynika, że:

- w przedziale $\langle 1, +\infty)$ funkcja f jest rosnąca;
- w przedziale $(-\infty, -1\rangle$ funkcja f jest rosnąca;
- w przedziale $\langle -1, 1\rangle$ funkcja f jest malejąca.

Wyjaśniam uczniom także, po co to wszystko, podając jeden przykład. Rozwiązujemy następujące, dobrze znane zadanie optymalizacyjne. Zazwyczaj jest ono dobrą ilustracją zastosowania rachunku różniczkowego. Pokazuję uczniom, że można je rozwiązać elementarnie.

Zadanie. Dany jest kwadratowy arkusz blachy o boku 3 m. Z tego arkusza chcemy wyciąć cztery jednakowe kwadraty, po jednym w każdym rogu kwadratu. Otrzymany kwadrat zaznaczony na poniższym rysunku ma bok równy x. Następnie zaginamy blachę wzdłuż linii przerywanych, tworząc w ten sposób prostopadłościenne pudełko (otwarte od góry). Dla jakiej wartości x otrzymane pudełko będzie miało największą objętość?



Rys. 13.22

Pokażę dwa sposoby rozwiązania. Pierwszy z nich korzysta z nierówności między średnią arytmetyczną i geometryczną. Drugi polega na badaniu monotoniczności pewnej funkcji. W obu rozwiązaniach najpierw obliczamy objętość pudełka.

Rozwiązanie. Oczywiście podstawa pudełka jest kwadratem o boku x, wysokość pudełka będzie równa $\frac{3-x}{2}$. Zauważmy, że liczba x musi spełniać nierówności: $0 \leq x \leq 3$. Objętość pudełka jest równa

$$V = x^2 \cdot \frac{3-x}{2}.$$

Teraz przystąpimy do pierwszego sposobu rozwiązania. Przypomnijmy nierówność między średnimi. Mamy dane trzy liczby dodatnie a, b i c. Wówczas

$$\sqrt[3]{abc} \leq \frac{a+b+c}{3}.$$

Przyjmijmy

$$a = b = \frac{x}{2}, \quad c = 3 - x.$$

Oczywiście te trzy liczby są dodatnie. Mamy wówczas

$$\sqrt[3]{abc} = \sqrt[3]{\frac{x^2(3-x)}{4}}$$

oraz

$$\frac{a+b+c}{3} = \frac{\frac{x}{2} + \frac{x}{2} + (3-x)}{3} = \frac{3}{3} = 1.$$

Z nierówności między średnimi wynika, że

$$\sqrt[3]{\frac{x^2(3-x)}{4}} \leq 1,$$

czyli

$$\frac{x^2(3-x)}{4} \leq 1.$$

Zatem

$$V = \frac{x^2(3-x)}{2} \leq 2.$$

Z drugiej strony, jeśli $x = 2$, to objętość pudełka wynosi

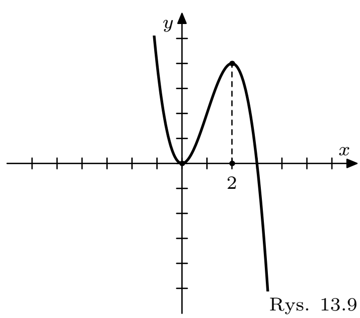
$$V = \frac{2^2 \cdot (3-2)}{2} = 2.$$

Tak więc największą możliwą wartość ta objętość przyjmuje dla $x = 2$.

Teraz przejdziemy do drugiego sposobu rozwiązania. Rozważmy funkcję określoną wzorem

$$f(x) = x^2(3-x) = 3x^2 - x^3.$$

Wykres tej funkcji już widzieliśmy na rysunku 13.9.



Rys. 13.9

Dostrzegamy maksimum lokalne w punkcie $x = 2$. Udowodnimy teraz, że w przedziale domkniętym $\langle 0, 2\rangle$ funkcja f jest rosnąca, a w przedziale $\langle 2, +\infty)$ funkcja f jest malejąca. Mamy zatem pokazać, że:

- jeśli $0 \le x_1 < x_2 \le 2$, to $f(x_2) - f(x_1) > 0$;
- jeśli $2 \le x_1 < x_2$, to $f(x_2) - f(x_1) < 0$.

Niech $x_1 < x_2$. Obliczamy najpierw $f(x_2) - f(x_1)$:

$$\begin{aligned} f(x_2) - f(x_1) &= (3x_2^2 - x_2^3) - (3x_1^2 - x_1^3) = \\ &= 3(x_2^2 - x_1^2) - x_2^3 + x_1^3 = 3(x_2^2 - x_1^2) - (x_2^3 - x_1^3) = \\ &= 3(x_2 - x_1)(x_2 + x_1) - (x_2 - x_1)(x_2^2 + x_1x_2 + x_1^2) = \\ &= (x_2 - x_1)\big(3(x_1 + x_2) - (x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2)\big). \end{aligned}$$

Ponieważ $x_1 < x_2$, więc $x_2 - x_1 > 0$. Interesuje nas zatem znak wyrażenia

$$3(x_1 + x_2) - (x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2).$$

Przekształćmy je w następujący sposób:

$$\begin{aligned} 3(x_1 + x_2) - (x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) &= (2x_1 - x_1^2) + (2x_2 - x_2^2) + (x_1 + x_2 - x_1x_2) = \\ &= x_1(2 - x_1) + x_2(2 - x_2) + \frac{1}{2}\big((2x_1 - x_1x_2) + (2x_2 - x_1x_2)\big) = \\ &= x_1(2 - x_1) + x_2(2 - x_2) + \frac{1}{2}x_1(2 - x_2) + \frac{1}{2}x_2(2 - x_1). \end{aligned}$$

Przypuśćmy najpierw, że $0 \le x_1 < x_2 \le 2$. Wówczas

- ponieważ $x_1 \ge 0$ oraz $x_1 < 2$, więc $x_1(2 - x_1) \ge 0$;
- ponieważ $x_2 > 0$ oraz $x_2 \le 2$, więc $x_2(2 - x_2) \ge 0$;
- ponieważ $x_1 \ge 0$ oraz $x_2 \le 2$, więc $\frac{1}{2}x_1(2 - x_2) \ge 0$;
- ponieważ $x_2 > 0$ oraz $x_1 < 2$, więc $\frac{1}{2}x_2(2 - x_1) > 0$.

Stąd wynika, że

$$x_1(2 - x_1) + x_2(2 - x_2) + \frac{1}{2}x_1(2 - x_2) + \frac{1}{2}x_2(2 - x_1) > 0,$$

czyli $f(x_2) - f(x_1) > 0$. Zatem w przedziale $\langle 0, 2\rangle$ funkcja f jest rosnąca. Niech teraz $2 \le x_1 < x_2$. Wówczas

- ponieważ $x_1 \ge 2$, więc $x_1(2 - x_1) \le 0$;
- ponieważ $x_2 > 2$, więc $x_2(2 - x_2) < 0$;
- ponieważ $x_1 \ge 2$ oraz $x_2 > 2$, więc $\frac{1}{2}x_1(2 - x_2) < 0$;
- ponieważ $x_2 > 2$ oraz $x_1 \ge 2$, więc $\frac{1}{2}x_2(2 - x_1) \le 0$.

Stąd wynika, że

$$x_1(2 - x_1) + x_2(2 - x_2) + \frac{1}{2}x_1(2 - x_2) + \frac{1}{2}x_2(2 - x_1) < 0,$$

czyli $f(x_2) - f(x_1) < 0$. Zatem w przedziale $\langle 2, +\infty)$ funkcja f jest malejąca. A więc w przedziale $\langle 0, 3\rangle$ największą wartość funkcja f przyjmuje w punkcie $x = 2$.

Rozwiązanie zadania drugim sposobem jest więc zakończone. Podsumujmy te dwa sposoby. Oczywiście sposób pierwszy jest trikowy i w związku z tym prawdopodobnie nie uogólni się na inne funkcje. Sposób drugi pokazuje pewną metodę dowodzenia, że w jakimś punkcie funkcja przyjmuje maksimum. Pozostaje jednak pytanie, jak można odgadnąć, że tym punktem jest $x = 2$. My popatrzyliśmy na wykres, ale w gruncie rzeczy odgadliśmy, że to maksimum jest dokładnie w punkcie $x = 2$. Gdyby rozważana przez nas funkcja miała maksimum w jakimś punkcie o współrzędnej x niewymiernej (np. $x = \frac{1}{2}(\sqrt{3}+\sqrt{5}) \approx 1{,}984$), to takiej wartości moglibyśmy nie odgadnąć. Widzimy z tego, że potrzebne będą metody, za pomocą których tę wartość x będzie można obliczyć.

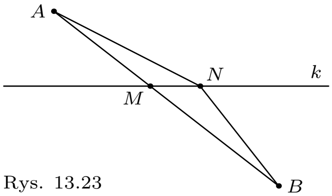
Takie metody oczywiście nasi uczniowie poznają w liceum — jest to rachunek różniczkowy. Zadanie, które powyżej omówiłem, można rozwiązać do końca już z uczniami gimnazjum i jest ono dobrą motywacją dla tego, co ich czeka w przyszłości. Uważam, że tak należy uczyć matematyki. Możliwie wcześnie należy pokazywać dobre motywacje dla tego, czego nasi uczniowie będą uczyć się później. Ideałem byłoby, gdyby wiele zadań, które z uczniami rozwiązujemy, miało naturalną kontynuację w przyszłości. Jeśli chodzi o temat tak ważny jak badanie monotoniczności funkcji, to jak wspomniałem wcześniej, należy go omawiać z uczniami kilkakrotnie: raz, aby przekazać intuicję tego pojęcia, drugi raz, by dobrze wytłumaczyć definicję i pokazać przykłady ilustrujące to pojęcie i wreszcie trzeci raz, by nauczyć skutecznych narzędzi. Dobrze, jeśli przy tym te działania są rozciągnięte w czasie — tak, aby uczniowie mogli te pojęcia dobrze przyswoić. Jak było widać wyżej, wraz z pojęciem monotoniczności można pokazywać uczniom zadania optymalizacyjne. Głównym czasem, w którym takie zadania rozwiązujemy, jest czas nauki w liceum. Uważam jednak, że pewne pojęcia należy wprowadzać wcześniej, uczniowie powinni do nich przywyknąć, by lepiej je rozumieć później. Zadania optymalizacyjne można rozwiązywać już w gimnazjum. Dobrym przykładem jest następujące zadanie geometryczne:

Zadanie. Dane są dwa punkty A i B nie leżące na prostej k. Znajdź na tej prostej punkt M taki, że suma odległości $AM + MB$ jest jak najmniejsza.

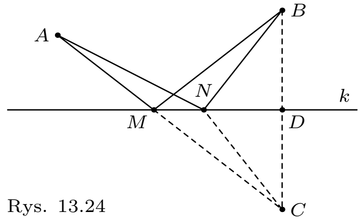
Rozwiązanie. Najpierw przypuśćmy, że punkty A i B leżą po przeciwnych stronach prostej k (rys. 13.23). Punkt M jest wówczas punktem przecięcia prostej k z odcinkiem AB. Jeśli bowiem N jest dowolnym innym punktem prostej k, to z nierówności trójkąta dla trójkąta ABN otrzymujemy:

$$AN + NB > AB = AM + BM,$$

czyli rzeczywiście suma odległości $AM + MB$ jest najmniejsza. Niech teraz punkty A i B leżą po tej samej stronie prostej k (rys. 13.24). Niech punkt C będzie położony symetrycznie do punktu B względem prostej k (tzn. odcinek BC jest prostopadły do prostej k oraz $BD = CD$).



Rys. 13.23



Rys. 13.24

Punkt M jest wówczas punktem przecięcia prostej k z odcinkiem AC. Niech punkt N będzie dowolnym, różnym od M, punktem leżącym na prostej k. Najpierw zauważamy, że

$\triangle MBD \equiv \triangle MCD$ (bok MD wspólny, $BD = CD$, $\measuredangle MDB = \measuredangle MDC = 90°$, cecha przystawania BKB). Zatem $MB = MC$. W podobny sposób pokazujemy, że $NB = NC$. Teraz korzystamy z nierówności trójkąta dla trójkąta ANC:

$$AN + NB = AN + NC > AC = AM + MC = AM + MB,$$

czyli znów suma odległości $AM + MB$ jest najmniejsza.

Innym przykładem geometrycznego zadania optymalizacyjnego jest zadanie o tym, że punkt przecięcia przekątnych czworokąta wypukłego jest punktem, dla którego suma odległości od wierzchołków czworokąta jest najmniejsza. Wspominamy też wtedy analogiczne zadanie dla trójkąta. Jego rozwiązanie jest jednak znacznie trudniejsze.

Warto również polecić następujące zadanie:

Zadanie. Miasta A, B i C leżą w tej kolejności na jednej prostej drodze. Znane są odległości między miastami. W każdym mieście mieszkańcy bardzo lubią napój owocowy o nazwie „Owocek”. Znane są zapotrzebowania na „Owocek” w każdym mieście (wyrażane liczbą ciężarówek z „Owockiem”, które muszą codziennie do danego miasta ten napój przywieźć). Zadanie polega na znalezieniu takiego punktu na drodze, w którym należy wybudować wytwórnię „Owocka”, tak aby koszt transportu napoju był jak najmniejszy. Koszt transportu z punktu X do punktu Y jest równy iloczynowi odległości z X do Y przez liczbę ciężarówek pokonujących tę drogę.

Wskazówka do rozwiązania. Są dwa sposoby rozwiązania zadania. Pierwszy z nich polega na zbudowaniu funkcji wyrażającej koszt transportu i znalezieniu minimum tej funkcji. Umieśćmy nasze miasta na osi liczbowej w punktach o współrzędnych a, b i c (niech przy tym $a < b < c$). Niech zapotrzebowania na „Owocek” będą równe odpowiednio z_A, z_B i z_C. Umieśćmy wreszcie wytwórnię „Owocka” w punkcie x. Wówczas koszt transportu wyraża się następującą funkcją:

$$f(x) = z_A \cdot |x - a| + z_B \cdot |x - b| + z_C \cdot |x - c|.$$

Teraz dajemy uczniom konkretne dane (możemy różnym uczniom dać różne dane) i prosimy o obejrzenie wykresu, a następnie próbujemy wyciągnąć wniosek ogólny.

Drugi sposób rozwiązania polega na „przesuwaniu” punktu, w którym umieszczamy wytwórnię. Pokazujemy, że jeśli umieścimy najpierw punkt x na lewo od punktu a, to koszt transportu zmniejszy się, jeśli przesuniemy x do a. A więc nie ma minimum globalnego na lewo od punktu a. Podobnie dowodzimy, że nie ma minimum globalnego na prawo od punktu c. Pozostają dwa przedziały: $\langle a, b\rangle$ i $\langle b, c\rangle$, Teraz wystarczy wykazać, że:

- jeśli $z_A > z_B + z_C$, to w przedziale $\langle a, b\rangle$ najbardziej opłaca się $x = a$;
- jeśli $z_A < z_B + z_C$, to w przedziale $\langle a, b\rangle$ najbardziej opłaca się $x = b$;
- jeśli $z_A = z_B + z_C$, to w przedziale $\langle a, b\rangle$ każde położenie punktu x daje ten sam koszt transportu;
- jeśli $z_C > z_A + z_B$, to w przedziale $\langle b, c\rangle$ najbardziej opłaca się $x = a$;
- jeśli $z_C < z_A + z_B$, to w przedziale $\langle b, c\rangle$ najbardziej opłaca się $x = b$;
- jeśli $z_C = z_A + z_B$, to w przedziale $\langle b, c\rangle$ każde położenie punktu x daje ten sam koszt transportu.

Tak więc najlepszy wybór punktu x zależy wyłącznie od zapotrzebowań na „Owocek” w trzech miastach i nie zależy od odległości między miastami.

Interesujące jest rozwiązanie z uczniami uogólnienia tego zadania na większą liczbę miast. Okazuje się, że jeśli miasta $A_1, \ldots, A_n$ są położone w punktach $a_1, \ldots, a_n$ (przy czym $a_1 < \ldots < a_n$) oraz zapotrzebowania w miastach $A_1, \ldots, A_n$ wynoszą odpowiednio $z_1, \ldots, z_n$, to:

- jeśli $z_1 + \ldots + z_i > z_{i+1} + \ldots + z_n$, to w przedziale $\langle a_i, a_{i+1} \rangle$ najbardziej opłaca się $x = a_i$;
- jeśli $z_1 + \ldots + z_i < z_{i+1} + \ldots + z_n$, to w przedziale $\langle a_i, a_{i+1} \rangle$ najbardziej opłaca się $x = a_{i+1}$;
- jeśli $z_1 + \ldots + z_i = z_{i+1} + \ldots + z_n$, to w przedziale $\langle a_i, a_{i+1} \rangle$ każde położenie punktu x daje ten sam koszt transportu.

Dowody tych trzech własności są całkowicie elementarne. Stąd otrzymujemy następujący prosty algorytm znajdowania optymalnego położenia punktu x. Najpierw obliczamy sumę wszystkich zapotrzebowań:

$$Z = z_1 + \ldots + z_n.$$

Następnie obliczamy kolejne sumy:

$$\begin{aligned} S_1 &= z_1, \\ S_2 &= z_1 + z_2, \\ \ldots & \quad \ldots \\ S_n &= z_1 + \ldots + z_n. \end{aligned}$$

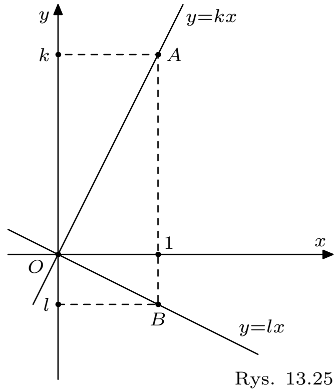
Niech i będzie najmniejszą liczbą taką, że $S_i \geq \frac{1}{2} \cdot Z$. Mamy wtedy dwa przypadki:

- jeśli $S_i > \frac{1}{2} \cdot Z$, optymalny jest wybór $x = a_i$;
- jeśli $S_i = \frac{1}{2} \cdot Z$, to w przedziale $\langle a_i, a_{i+1} \rangle$ każde położenie punktu x daje ten sam najmniejszy koszt transportu.

W tradycyjnym programie nauczania w gimnazjum nie ma miejsca na takie zadania. W gimnazjum rozwiązujemy zadania prowadzące do równań. Mówiąc językiem bardziej zaawansowanym, równanie polega na znalezieniu wszystkich argumentów x, dla których $f(x) = g(x)$, gdzie f i g są dwiema danymi funkcjami. Inaczej mówiąc, chodzi o znalezienie miejsc zerowych funkcji $f - g$. Zadanie optymalizacyjne polega na znalezieniu najmniejszej lub największej wartości funkcji. Ze względu na to, iż w gimnazjum tak naprawdę poważnie zajmujemy się tylko funkcjami liniowymi, zadania optymalizacyjne nie są rozpatrywane. Chcę powiedzieć, że takie zadania można rozwiązywać ze zdolniejszymi uczniami gimnazjum, bardziej niż przeciętnie zainteresowanymi matematyką. Korzyść jest moim zdaniem ogromna — uczniowie, którzy wcześniej dostrzegą potrzebę rozwiązywania zadań optymalizacyjnych i zobaczą elementarne sposoby ich rozwiązywania, będą lepiej rozumieli bardziej zaawansowane metody rozwiązywania.

Na zadaniach optymalizacyjnych kończę zajmowanie się funkcjami w ogólności. Przechodzimy do funkcji liniowych i będę chciał pokazać najważniejsze — moim zdaniem — ich zastosowanie. Mianowicie chodzi mi o wprowadzenie do geometrii analitycznej. Wykresem funkcji liniowej jest prosta, zatem wzór definiujący tę funkcję to równanie prostej. Pewnym problemem są proste pionowe, równoległe do osi Oy; nimi zajmuję się oddzielnie. Omawianie równania prostej wiąże się z bardzo ważnym pomysłem w matematyce — zamiast zajmować się figurami geometrycznymi w sposób tradycyjny (któremu poświęciliśmy bardzo wiele czasu), możemy zajmować się równaniami tych figur i wykorzystywać do tego algebrę. To bardzo ważne — już w gimnazjum możemy pokazać uczniom, że na te same problemy matematyki można patrzeć z różnych stron i do rozwiązywania problemów można stosować różne metody. Pokażę dwa zadania, które zazwyczaj rozwiązuję z uczniami obydwiema metodami: analityczną i tradycyjną.

Własności funkcji liniowych i ich wykresów omawiam w zasadzie tak jak to jest zrobione w dobrych podręcznikach. Jedyną różnicę stanowi to, że pokazuję uczniom równanie prostej prostopadłej do danej prostej. Przypuśćmy zatem, że mamy dane dwie proste o równaniach $y = kx$ i $y = lx$ (rys. 13.25). Bierzemy trzy punkty: punkt $O = (0, 0)$ przecięcia obu prostych oraz punkty leżące na tych prostych o współrzędnej x równej 1, tzn. $A = (1, k)$ i $b = (1, l)$. Proste te są prostopadłe wtedy i tylko wtedy, gdy trójkąt OAB jest prostokątny (przy czym $\measuredangle AOB = 90°$). A zatem wtedy i tylko wtedy, gdy $AB^2 = OA^2 + OB^2$. Uczniowie znają już wzór na długość odcinka w układzie współrzędnych. Mamy zatem:



Rys. 13.25

$$OA^2 = 1^2 + k^2, \quad OB^2 = 1^2 + l^2 \quad \text{oraz} \quad AB^2 = |k - l|^2.$$

Stąd wynika, że

$$|k - l|^2 = 1^2 + k^2 + 1^2 + l^2.$$

Przekształcamy tę równość w sposób równoważny:

$$\begin{aligned}(k - l)^2 &= k^2 + l^2 + 2,\\ k^2 - 2kl + l^2 &= k^2 + l^2 + 2,\\ -2kl &= 2,\\ kl &= -1.\end{aligned}$$

Otrzymaliśmy warunek konieczny i wystarczający na to, by proste o współczynnikach kierunkowych k i l były prostopadłe: $kl = -1$. Teraz możemy rozwiązać z uczniami trzy podstawowe typy zadań:

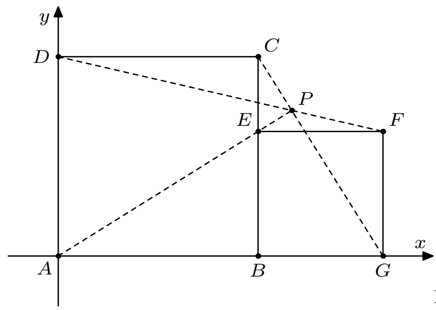
- dla danych punktów A i B znajdź równanie prostej przechodzącej przez te punkty;
- dla danego punktu A i prostej k o danym równaniu kierunkowym znajdź równanie prostej równoległej do prostej k i przechodzącej przez punkt A;
- dla danego punktu A i prostej k o danym równaniu kierunkowym znajdź równanie prostej prostopadłej do prostej k i przechodzącej przez punkt A.

Dla każdego z tych trzech typów zadań daję uczniom po kilka przykładów, najpierw z konkretnymi danymi liczbowymi, a potem w postaci ogólnej. Na przykład:

- znajdź równanie prostej przechodzącej przez punkty $A = (1, a)$ i $B = (3, b)$;
- znajdź równanie prostej równoległej do prostej o równaniu $y = kx + 3$ (gdzie $k \neq 0$) i przechodzącej przez punkt $A = (a, b)$;
- znajdź równanie prostej prostopadłej do prostej o równaniu $y = kx - m$ (gdzie $k \neq 0$) i przechodzącej przez punkt $A = (a, b)$.

Zwracam uwagę na to, że w pierwszym zadaniu dane zostały dobrane tak, by prosta AB nie była pionowa. Teraz przychodzi pora na wspomniane dwa zadania. Każde z tych zadań rozwiązuję najpierw z danymi liczbowymi (a więc tylko jeden przykład), a potem z danymi w postaci ogólnej. Tłumaczę wtedy uczniom, że w danej sytuacji geometrycznej mogę dobrać układ współrzędnych i jednostkę w sposób najdogodniejszy. Wybór odpowiedniego układu współrzędnych jest jednym z najtrudniejszych momentów w rozwiązaniu zadania metodą analityczną. Wreszcie pokazuję klasyczne rozwiązania zadań. A oto pierwsze zadanie.

Zadanie 1. Dany jest kwadrat $ABCD$ i punkt E leżący na boku BC. Na zewnątrz kwadratu $ABCD$ budujemy kwadrat $BEFG$.



Rys. 13.26

Udowodnij, że proste AE, CG i DF przecinają się w jednym punkcie.

W pierwszej wersji daję to zadanie z konkretnymi współrzędnymi punktów, na przykład:

$$A = (0, 0),\ B = (5, 0),\ C = (5, 5),\ D = (0, 5),\ E = (5, 3),\ F = (8, 3),\ G = (8, 0).$$

Teraz trzykrotnie rozwiązuję pierwsze z podstawowych zadań, znajduję równanie prostej przechodzącej przez dwa punkty. Otrzymuję następujące wyniki:

- prosta AE ma równanie $y = \frac{3}{5}x$;
- prosta CG ma równanie $y = -\frac{5}{3}x + \frac{40}{3}$;
- prosta DF ma równanie $y = -\frac{1}{4}x + 5$.

Rozwiązuję układ równań złożony z pierwszych dwóch równań:

$$\begin{cases} y = \frac{3}{5}x \\ y = -\frac{5}{3}x + \frac{40}{3} \end{cases}$$

Porównując prawe strony obu równań, otrzymuję równanie z jedną niewiadomą x:

$$\frac{3}{5}x = -\frac{5}{3}x + \frac{40}{3},$$
$$15 \cdot \frac{3}{5}x = -15 \cdot \frac{5}{3}x + 15 \cdot \frac{40}{3},$$
$$9x = -25x + 200,$$
$$34x = 200,$$
$$x = \frac{100}{17}.$$

Następnie znajduję

$$y = \frac{3}{5} \cdot \frac{100}{17} = \frac{60}{17}.$$

Punkt P przecięcia prostych AE i CG ma zatem współrzędne $P = \left(\frac{100}{17}, \frac{60}{17}\right)$. Sprawdzamy, że współrzędne tego punktu spełniają trzecie równanie. Podstawiamy $x = \frac{100}{17}$ do prawej strony tego równania:

$$-\frac{1}{4} \cdot \frac{100}{17} + 5 = -\frac{25}{17} + \frac{85}{17} = \frac{60}{17}.$$

Otrzymaliśmy drugą współrzędną punktu P. To dowodzi, że punkt P leży na wszystkich trzech prostych. Zadanie zostało więc rozwiązane.

Teraz rozwiązuję to samo zadanie w postaci ogólnej. Dobieram układ współrzędnych w sposób najdogodniejszy — podobnie do poprzedniego rozwiązania. Osią Ox jest prosta AB, osią Oy jest prosta AD (rys. 13.26). Dobieram następnie jednostkę: $AB = 1$. Długość boku mniejszego kwadratu oznaczam literą p (pamiętamy, że $0 < p < 1$; okaże się, że z założenia $p < 1$ nigdzie dalej nie skorzystamy, natomiast z założenia $p > 0$ korzystamy wielokrotnie — liczby p i $p+1$ wystąpią bowiem jako mianowniki ułamków). Współrzędne punktów są teraz następujące:

$$A = (0,0),\ B = (1,0),\ C = (1,1),\ D = (0,1),\ E = (1,p),\ F = (1+p,p),\ G = (1+p,0).$$

Znów trzykrotnie rozwiązuję podstawowe zadanie: znaleźć równanie prostej przechodzącej przez dwa dane punkty. Tym razem współrzędne niektórych punktów zawierają parametr p. Otrzymuję:

- prosta AE ma równanie $y = px$;
- prosta CG ma równanie $y = -\frac{1}{p}x + 1 + \frac{1}{p}$;
- prosta DF ma równanie $y = \frac{p-1}{p+1}x + 1$.

Tak jak poprzednio rozwiązujemy układ złożony z pierwszych dwóch równań:

$$\begin{cases} y = px \\ y = -\frac{1}{p}x + 1 + \frac{1}{p} \end{cases}$$

Najpierw rozwiązujemy równanie

$$\begin{aligned} px &= -\frac{1}{p}x + 1 + \frac{1}{p}, \\ p^2x &= -x + p + 1, \\ p^2x + x &= p + 1, \\ (p^2+1)x &= p + 1, \\ x &= \frac{p+1}{p^2+1}. \end{aligned}$$

Teraz łatwo obliczamy, że punkt P przecięcia prostych AE i CG ma współrzędne

$$P = \left(\frac{p+1}{p^2+1}, \frac{p(p+1)}{p^2+1}\right).$$

Wreszcie podstawiamy obliczoną wartość do prawej strony równania prostej DF:

$$\frac{p-1}{p+1} \cdot \frac{p+1}{p^2+1} + 1 = \frac{p-1}{p^2+1} + \frac{p^2+1}{p^2+1} = \frac{p^2+p}{p^2+1} = \frac{p(p+1)}{p^2+1}.$$

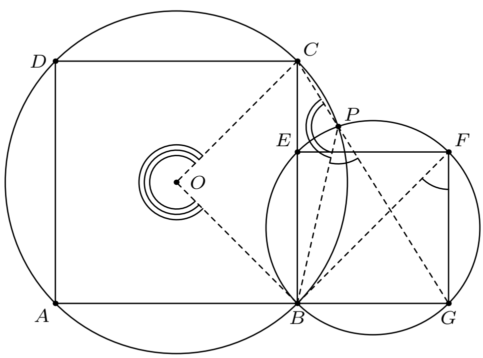
Otrzymaliśmy drugą współrzędną punktu P. To znaczy, że punkt P leży na prostej DF, a więc wszystkie trzy proste przecinają się w jednym punkcie.

Zauważmy, że metodą analityczną udowodniliśmy w całej ogólności twierdzenie geometryczne. To bardzo ważna obserwacja. Twierdzeń geometrii można — jak się okazuje — dowodzić różnymi metodami. Poznaliśmy metodę analityczną. W przyszłości zobaczymy także, w jaki sposób można stosować wiedzę o przekształceniach geometrycznych. A teraz popatrzmy na dowód klasyczny, tzn. przeprowadzony metodami geometrii euklidesowej, tak jak to robiliśmy dotychczas na lekcji geometrii.

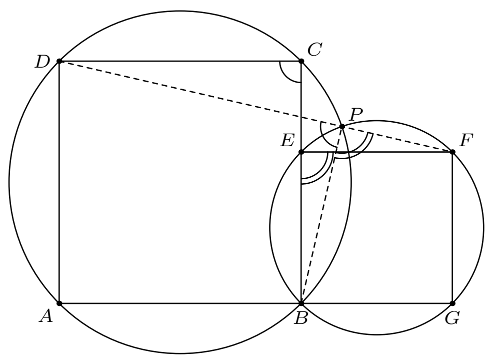
Weźmy okręgi opisane na obu kwadratach. Mają one punkt wspólny B. Nie jest on przy tym współliniowy ze środkami, a zatem te okręgi przecinają się w jeszcze jednym punkcie P. Pokażę, że jest to szukany punkt wspólny prostych AE, CG i DF. Połączmy najpierw punkt P odcinkami z punktami B, C i G (rys. 13.27). Punkt P leży na okręgu opisanym na kwadracie $ABCD$. Stąd wynika, że kąt wpisany BPC jest połową wklęsłego kąta środkowego BOC, ma zatem 135°. Punkt P leży też na okręgu opisanym na kwadracie $BEFG$. Stąd wynika, że kąt wpisany BPG jest równy kątowi wpisanemu BFG, a więc ma 45°. Ponieważ

$$\measuredangle BPC + \measuredangle BPG = 135^\circ + 45^\circ = 180^\circ,$$

więc punkty C, P i G są współliniowe. Zatem punkt P leży na pierwszej z trzech prostych: na prostej CG.



Rys. 13.27



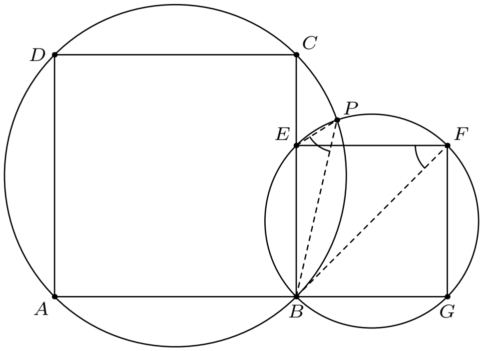
Rys. 13.28

Teraz połączmy odcinkami punkt P z punktami B, D i F (rys. 13.28). Kąty wpisane BPD i BPF są proste, bo są oparte odpowiednio na średnicach BD i BF (lub równoważnie: są równe wpisanym kątom prostym BCD i BEF). Zatem

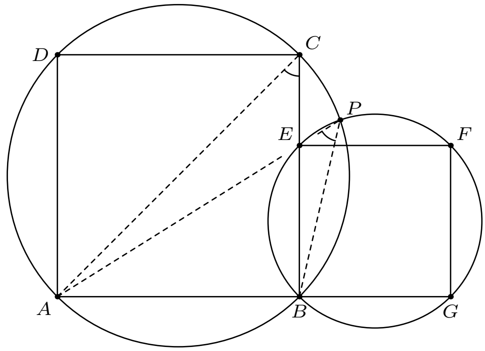
$$\measuredangle BPD + \measuredangle BPF = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ,$$

więc punkty D, P i F są współliniowe. Punkt P leży więc także na drugiej prostej: na prostej DF.

Następnie połączmy punkt P z punktami B i E (rys. 13.29). Kąt wpisany BPE jest równy kątowi wpisanemu BFE, więc ma 45°.



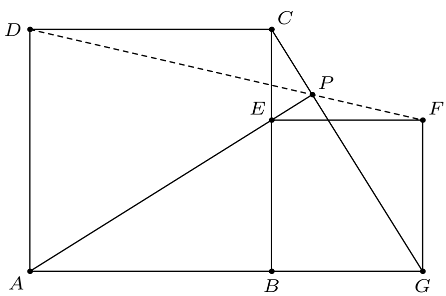
Rys. 13.29



Rys. 13.30

Wreszcie połączmy punkt P z punktami A i B (rys. 13.30). Nie wiemy jeszcze, czy prosta PA przechodzi przez punkt E; na rysunku 13.30 jej fragment przechodzący w pobliżu punktu E nie został zatem narysowany. Kąt wpisany BPA jest równy kątowi wpisanemu BCA, a więc też ma 45°. Półproste PE i PA tworzą z półprostą PB równe kąty (i leżą po tej samej stronie półprostej PB), więc się pokrywają. A zatem punkt P leży także na trzeciej prostej, tzn. prostej AE. To kończy dowód twierdzenia.

Nieco inny dowód otrzymamy inaczej definiując punkt P. Naszkicuję teraz ten dowód. Niech zatem punkt P będzie punktem przecięcia prostych AE i CG. Połączmy punkt P odcinkami z punktami D i F (rys. 13.31).



Rys. 13.31

Zauważmy, że trójkąty prostokątne ABE i CBG są przystające (cecha przystawania BKB). Stąd wynika, że

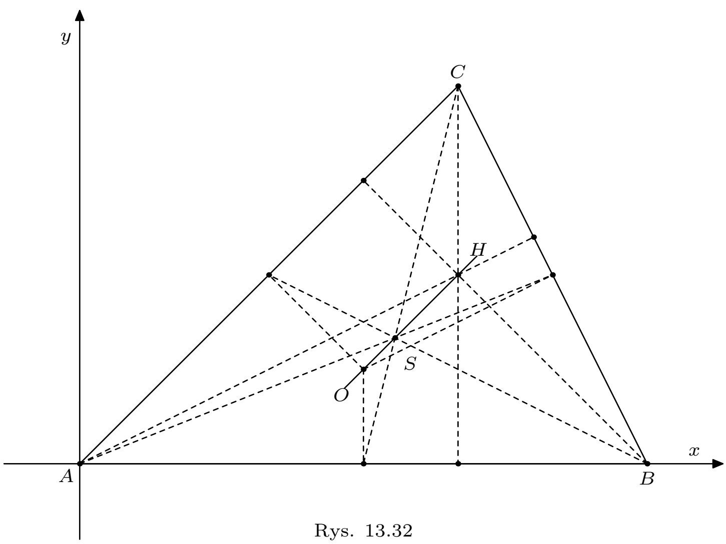
$$\measuredangle PAG + \measuredangle PGA = \measuredangle BAE + \measuredangle CGB = \measuredangle BAE + \measuredangle AEB = 90^\circ.$$

Zatem $\measuredangle APG = 90^\circ$. Stąd wynika, że punkt P leży na okręgach o średnicach AC i EG, czyli na okręgach opisanych na obu kwadratach. Tak jak poprzednio pokazujemy teraz, że punkty D, P i F są współliniowe, co kończy dowód.

Ten dowód, podobnie jak poprzedni, polegał na tym, by zauważyć, że punkt przecięcia prostych AE, CG i DF leży na obu okręgach opisanych na danych kwadratach. Różnica polega na tym, że w pierwszym dowodzie odgadujemy tę własność punktu P, a następnie dowodzimy, że tak określony punkt P leży na trzech rozpatrywanych prostych; w drugim dowodzie definiujemy punkt P jako punkt przecięcia odpowiednio wybranych dwóch z trzech rozpatrywanych prostych, wtedy dowodzimy, że leży on na obu okręgach opisanych na kwadratach i wreszcie dowodzimy, że leży on także na trzeciej prostej. Różnica jest więc niewielka. Co jest naprawdę ważne, to to, że oba dowody klasyczne wykorzystywały geometrię okręgu — mimo iż twierdzenie nic nie mówiło o okręgach. To jest jedna z wielkich sztuczek w geometrii — umieć dostrzec okręgi tam, gdzie na rysunku ich nie ma. Dla kontrastu, dowód analityczny odwoływał się wyłącznie do najprostszych własności prostych — do równania prostej przechodzącej przez dwa punkty. Reszta była algebrą: rozwiązywanie układów równań, przekształcanie wyrażeń algebraicznych, podstawianie do równania. Jedyną trudnością był odpowiedni dobór układu współrzędnych. Przy innym doborze będziemy musieli umieć znaleźć wspólrzędne wierzchołków kwadratów, a dalej dowód będzie taki sam. Tylko obliczenia będą bardziej skomplikowane.

Teraz przejdziemy do drugiego zadania.

Zadanie 2. Udowodnij, że w dowolnym trójkącie środek okręgu opisanego O, środek ciężkości S i ortocentrum H są współliniowe. Ponadto środek ciężkości S leży wewnątrz odcinka OH oraz $HS = 2 \cdot OS$.



Rys. 13.32

Prostą, na której leżą te trzy punkty szczególne trójkąta, nazywamy prostą Eulera. Euler był bowiem pierwszym matematykiem, który to twierdzenie udowodnił. Warto wspomnieć, że jednym z dowodów, które Euler przeprowadził, był dowód analityczny. Spróbujemy prześledzić tę drogę rozwiązania zadania.

Najpierw rozwiążemy to zadanie analitycznie, dla konkretnych współrzędnych punktów. Przyjmijmy

$$A = (0, 0), \quad B = (30, 0), \quad C = (20, 20).$$

Chcemy wyznaczyć współrzędne punktów O, S i H.

Najpierw zauważamy, że prosta AC ma równanie $y = x$. Proste prostopadłe do niej mają równania postaci $y = -x + b$ dla różnych b. Teraz:

- symetralna odcinka AC ma równanie $y = -x + 20$;
- współrzędne punktu O wyznaczamy podstawiając do powyższego równania $x = 15$; zatem $O = (15, 5)$;
- wysokość poprowadzona z punktu B jest zawarta w prostej o równaniu $y = -x + 30$;
- współrzędne punktu H wyznaczamy podstawiając do powyższego równania $x = 20$; zatem $H = (20, 10)$.

Współrzędne punktu S możemy wyznaczyć albo znajdując równania prostych zawierających dwie środkowe i rozwiązując układ równań (co pozostawię jako nietrudne, choć żmudne ćwiczenie), albo korzystając z gotowego wzoru: współrzędne środka ciężkości są średnimi arytmetycznymi współrzędnych wierzchołków. Mamy zatem $S = \left(\frac{50}{3}, \frac{20}{3}\right)$. Teraz pozostaje wykazać, że punkty O, S i H są współliniowe oraz $HS = 2 \cdot OS$. Najprościej skorzystać z wektorów:

$$\overrightarrow{OS} = \left[\tfrac{50}{3} - 15, \tfrac{20}{3} - 5\right] = \left[\tfrac{5}{3}, \tfrac{5}{3}\right],$$
$$\overrightarrow{SH} = \left[20 - \tfrac{50}{3}, 10 - \tfrac{20}{3}\right] = \left[\tfrac{10}{3}, \tfrac{10}{3}\right] = 2 \cdot \overrightarrow{OS}.$$

Można również wyznaczyć równanie prostej OH (ma ono postać $y = x - 10$), sprawdzić, że współrzędne punktu S spełniają to równanie oraz obliczyć długości odcinków OS, SH i OH (by się przekonać, że $OS = \frac{1}{3} \cdot OH$ oraz $SH = \frac{2}{3} \cdot OH$). Szczegóły znów pozostawię jako ćwiczenie.

Rozwiążmy teraz to zadanie w postaci ogólnej. Znów wybieramy układ współrzędnych tak jak w poprzednim zadaniu — prosta AB jest osią Ox, punkt A jest początkiem układu współrzędnych. Wreszcie trzeba wybrać jednostkę. Ponieważ będziemy mieli do czynienia ze środkami odcinków, więc — dla zmniejszenia liczby ułamków w obliczeniach — przyjmiemy $B = (2, 0)$. Punkt C ma teraz dowolne współrzędne, takie jednak, by druga współrzędna nie była równa 0 (bez straty ogólności można przyjąć, że jest dodatnia). Przyjmijmy zatem:

$$A = (0, 0), \quad B = (2, 0), \quad C = (2p, 2q),$$

przy czym $q > 0$. Prosta AC ma równanie $y = \frac{q}{p}x$. Stąd wynika, że proste do niej prostopadłe mają równania postaci $y = -\frac{p}{q}x + b$ dla odpowiednich b. Teraz:

- symetralna odcinka AC ma równanie $y = -\frac{p}{q}x + \frac{p^2+q^2}{q}$;
- współrzędne punktu O wyznaczamy podstawiając do powyższego równania $x = 1$; zatem $O = \left(1, \frac{p^2+q^2-p}{q}\right)$;
- wysokość poprowadzona z punktu B jest zawarta w prostej o równaniu $y = -\frac{p}{q} + \frac{2p}{q}$;
- współrzędne punktu H wyznaczamy podstawiając do powyższego równania $x = 2p$; zatem $H = \left(2p, \frac{2p-2p^2}{q}\right)$.

Tak jak poprzednio, współrzędne środka ciężkości wyznaczamy, obliczając średnie arytmetyczne współrzędnych wierzchołków trójkąta. Otrzymujemy wówczas $S = \left(\frac{2p+2}{3}, \frac{2q}{3}\right)$. Wreszcie

$$\overrightarrow{OS} = \left[\tfrac{2p+2}{3} - 1, \tfrac{2q}{3} - \tfrac{p^2+q^2-p}{q}\right] = \left[\tfrac{2p-1}{3}, \tfrac{3p-3p^2-q^2}{3q}\right],$$
$$\overrightarrow{SH} = \left[2p - \tfrac{2p+2}{3}, \tfrac{2p-2p^2}{q} - \tfrac{2q}{3}\right] = \left[\tfrac{4p-2}{3}, \tfrac{6p-6p^2-2q^2}{3q}\right] = 2 \cdot \overrightarrow{OS}.$$

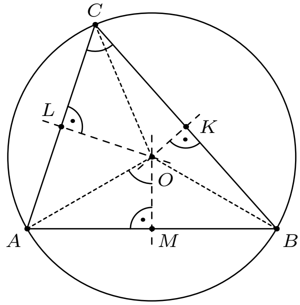
To kończy dowód twierdzenia.

Dowody analityczne twierdzeń geometrycznych polegają często na długich, ale rutynowych obliczeniach. Głównym problemem jest odpowiedni dobór układu współrzędnych, zwłaszcza wtedy, gdy w rozwiązaniu będą występowały równania okręgów. Na poziomie gimnazjum jednak równaniami okręgów nie zajmuję się. Można znaleźć wiele zadań, w których wystarczą równania prostych — tak jak to miało miejsce w powyższych dwóch zadaniach. Uważam, że zdolny uczeń gimnazjum, startujący w Olimpiadzie Matematycznej Gimnazjalistów i przygotowujący się do startu w przyszłości w Olimpiadzie Matematycznej, jest wystarczająco przygotowany, by zobaczyć takie rozwiązania. Wielu takich uczniów może nawet osiągnąć taką biegłość rachunkową, by podobne obliczenia przeprowadzić samodzielnie.

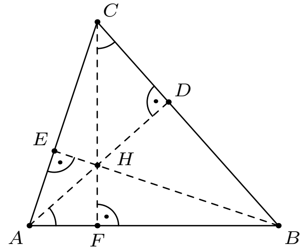
Dowody przeprowadzane metodą analityczną są — moim zdaniem — elementem solidnego warsztatu matematycznego. Uczeń liceum, startujący w Olimpiadzie Matematycznej, na pewno powinien taki warsztat posiąść, a może zacząć przygotowania — jak się okazuje — już w gimnazjum. Jest to doskonały materiał uzupełniający na kółko matematyczne, ale także jest wart pokazania na zwykłej lekcji — chociaż oczywiście nie daję takiego zadania na klasówce. Czym innym jest bowiem zapoznanie się z podobnymi metodami i czym innym jest nauczenie się tych metod tak, by ich używać samodzielnie.

Na zakończenie chcę pokazać dwa geometryczne dowody twierdzenia Eulera. Pierwszy z nich wykorzystuje własności trzech wymienionych w twierdzeniu punktów szczególnych trójkąta oraz korzysta z podobieństwa trójkątów. Na ogół w III klasie uczę cech podobieństwa trójkątów, więc ten dowód jest dostępny dla moich uczniów. Czasem pokazywałem go na kółku. Drugi dowód, który tylko naszkicuję, wykorzystuje przekształcenia geometryczne — mianowicie zostaną wykorzystane własności jednokładności. Ten dowód na pewno wykracza poza program gimnazjum i zamieszczam go tutaj tylko ze względu na jego wyjątkowe piękno.

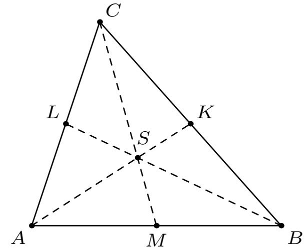
Pierwszym z rozważanych punktów szczególnych jest **środek okręgu opisanego**, będący punktem przecięcia symetralnych boków trójkąta (rys. 13.33). Proste KO, LO i MO są symetralnymi boków trójkąta ABC. Z własności symetralnych wynika, że odcinki AO, BO i CO są równej długości; są to promienie okręgu opisanego na trójkącie. Drugim punktem szczególnym trójkąta jest punkt przecięcia wysokości (rys. 13.34). Dokładniej: jest to punkt przecięcia prostych zawierających wysokości trójkąta. Ten punkt nazywamy **ortocentrum** trójkąta. Trzecim punktem szczególnym trójkąta jest punkt przecięcia środkowych (rys. 13.35). Ten punkt nazywamy **środkiem ciężkości** trójkąta.



Rys. 13.33



Rys. 13.34



Rys. 13.35

Podam teraz kilka podstawowych własności tych punktów szczególnych; własności te będą wykorzystane w dowodzie twierdzenia Eulera. Jeśli trójkąt ABC jest ostrokątny, to środek okręgu opisanego leży wewnątrz trójkąta (tak jak na rysunku 13.33). Z twierdzenia o kącie wpisanym i środkowym wynika wtedy, że $\measuredangle AOB = 2 \cdot \measuredangle ACB$. Ponieważ trójkąt ABO jest równoramienny, więc

$$\measuredangle AOM = \measuredangle BOM = \frac{1}{2} \cdot \measuredangle AOB = \measuredangle ACB.$$

Podobnie

$$\measuredangle BOK = \measuredangle COK = \measuredangle BAC \quad \text{oraz} \quad \measuredangle AOL = \measuredangle COL = \measuredangle ABC.$$

Odcinki AD, BE i CF są wysokościami trójkąta ABC na rysunku 13.34. Jeśli trójkąt jest ostrokątny, to jego ortocentrum (na powyższym rysunku punkt H) leży wewnątrz trójkąta. Nietrudno dostrzec na rysunku 13.34 pewne pary kątów równych. Na przykład

$$\measuredangle BAD = 90^\circ - \measuredangle ABD = 90^\circ - \measuredangle CBF = \measuredangle BCF.$$

Wreszcie ważną własnością środka ciężkości trójkąta (rys. 13.35) jest to, że dzieli on każdą środkową w stosunku 2 : 1, tzn.:

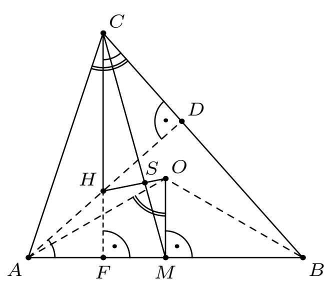
$$\frac{AS}{SK} = \frac{BS}{SL} = \frac{CS}{SM} = 2.$$

Ponieważ istnieje tylko jeden punkt dzielący odcinek w danym stosunku, więc do udowodnienia, że dany punkt S jest środkiem ciężkości, wystarczy pokazać, że dzieli którąkolwiek środkową w stosunku 2 : 1, na przykład $CS : SM = 2 : 1$.

Udowodnimy teraz twierdzenie Eulera dotyczące położenia tych trzech punktów szczególnych trójkąta.

Twierdzenie Eulera. Ortocentrum H, środek ciężkości S i środek O okręgu opisanego na trójkącie leżą na jednej prostej (nazywanej **prostą Eulera**), przy czym punkt S dzieli odcinek HO w stosunku 2 : 1, tzn. $HS = 2 \cdot OS$.

Dowód. Dla ustalenia uwagi przyjmiemy, że trójkąt ABC jest ostrokątny i skorzystamy z zauważonych wyżej równości kątów. Niewielką modyfikację dowodu dla innych trójkątów pozostawimy jako ćwiczenie. Niech punkt H będzie ortocentrum trójkąta ABC, punkt O środkiem okręgu opisanego na tym trójkącie i punkt S punktem przecięcia odcinków HO i CM. Wykażemy, że punkt S jest środkiem ciężkości trójkąta ABC.



Rys. 13.36

Po pierwsze, mamy równość $\measuredangle HCD = \measuredangle FCB = \measuredangle BAD$. Wynika z niej, że trójkąty CDH i ADB są podobne (oba są prostokątne i mają parę równych kątów ostrych). Zatem

$$\frac{CD}{CH} = \frac{AD}{AB}, \quad \text{czyli} \quad CH = \frac{AB \cdot CD}{AD}.$$

Po drugie, mamy równość $\measuredangle ACD = \measuredangle ACB = \measuredangle AOM$. Wynika z niej, podobnie jak wyżej, że trójkąty ACD i AOM są podobne. Mamy stąd równość

$$\frac{CD}{AD} = \frac{OM}{AM}, \quad \text{czyli} \quad OM = \frac{AM \cdot CD}{AD} = \frac{\frac{1}{2}AB \cdot CD}{AD} = \frac{1}{2} \cdot CH.$$

Wreszcie, odcinki CH i OM są równoległe, skąd wynika, że trójkąty CHS i MOS są podobne (mają parę równych kątów wierzchołkowych i dwie pary równych kątów naprzemianległych). Stąd dostajemy proporcję

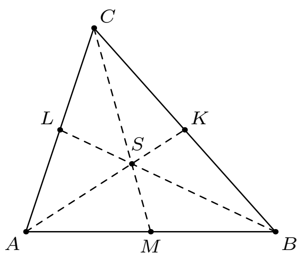
$$\frac{CS}{CH} = \frac{MS}{OM},$$

z której wynika, że

$$CS = MS \cdot \frac{CH}{OM} = 2 \cdot MS.$$

Punkt S dzieli zatem odcinek CM w stosunku $2 : 1$, a więc rzeczywiście jest środkiem ciężkości trójkąta ABC, c. b. d. o.

Drugi dowód twierdzenia Eulera wykorzystuje pojęcie jednokładności. Niech punkt S będzię środkiem ciężkości trójkąta ABC (rys. 13.35). Rozważmy jednokładność o środku S i skali $-\frac{1}{2}$. Wówczas punkt A przechodzi na punkt K, punkt B przechodzi na punkt L i punkt C przechodzi na punkt M. Następnie korzystamy z tego, że jeśli punkt Y jest obrazem punktu X w jednokładności, to obrazem prostej k przechodzącej przez punkt X jest prosta l równoległa do k i przechodząca przez punkt Y. Stąd wynika, że obrazem prostej zawierającej wysokość poprowadzoną z wierzchołka A jest prosta do niej równoległa przechodząca przez punkt K. Tą prostą równoległą jest symetralna odcinka BC (bowiem rozważana wysokość i symetralna są równoległe: są bowiem prostopadłe do prostej BC). Tak więc obrazami prostych zawierających wysokości są symetralne boków. A stąd wynika, że obrazem ortocentrum (czyli punktu przecięcia wysokości) jest środek okręgu opisanego (bo jest to punkt przecięcia symetralnych boków, czyli obrazów prostych zawierających wysokości). Jeśli punkt O jest obrazem punktu H w jednokładności o skali $-\frac{1}{2}$, to punkty H, S i O są współliniowe, punkty H i S leżą po przeciwnych stronach punktu S oraz $HS = 2 \cdot OS$. To kończy dowód twierdzenia.



Rys. 13.35

14. Projekty
Część I — szlaczki i tapety

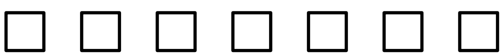
W mojej pracy ze zdolnymi uczniami dużą rolę odgrywają prace projektowe. Opiszę tutaj projekty, które wykonywali moi uczniowie. Jeden projekt, który wykonywali na ogół w I klasie, dotyczył symetrii. Drugi, wykonywany na ogół w III klasie (czasem rozpoczynany w II klasie), dotyczył geometrii w sztuce gotyku.

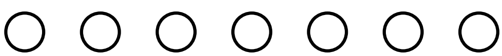
Projekt dotyczący symetrii był podsumowaniem nauki o symetriach. Po pierwszych lekcjach symetrii, gdy omawialiśmy to pojęcie na podstawie podręcznika, zadawałem uczniom niewielką pracy do wykonania w domu. Przypominałem, że w szkole podstawowej rysowali szlaczki. Szlaczek jest to rysunek, teoretycznie rozciągający się w obie strony do nieskończoności, składający się z niewielkiego fragmentu powtarzanego w obie strony nieskończenie wiele razy. Oczywiście my rysujemy tylko niewielki fragment takiego szlaczka, ale w wyobraźni mamy cały szlaczek nieskończony. Przy okazji tej definicji tłumaczę uczniom, że gdybyśmy przesunęli ten szlaczek o długość powtarzanego fragmentu, to rysunek przesunięty pokryłby się całkowicie z oryginalnym. Często demonstruję im to za pomocą rzutnika pisma. Na dwóch foliach mam narysowany dokładnie ten sam szlaczek. Kładę jedną na drugiej i uczniowie widzą, że rysunki się pokrywają. Następnie przesuwam jedną folię po drugiej i w pewnym momencie rysunki znów się pokrywają. Tak w nieformalny sposób wprowadzam pojęcie przekształcenia geometrycznego.

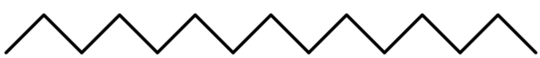
W I klasie nie używam terminu przekształcenie geometryczne. Ten termin pojawia się pod koniec II klasy lub na początku III klasy, gdy uczę funkcji. Wtedy przypominam im doświadczenia z przesuwaniem, obracaniem i odbijaniem rysunków szlaczków i tapet i wyjaśniam, że przekształcenie geometryczne jest jednym z rodzajów funkcji. Wtedy też wyjaśniam im, co to są izometrie i mówię, że są (poza identycznością) tylko cztery rodzaje izometrii, dobrze im znane z I klasy: przesunięcia, obroty, symetrie osiowe i symetrie z poślizgiem.

W I klasie natomiast będę demonstrował za pomocą folii także inne przekształcenia. Mówię jednak tylko o przesuwaniu czy obracaniu rysunku, demonstruję takie przesuwanie czy obracanie za pomocą dwóch folii, ale nie nazywam tego przekształceniem płaszczyzny.

Po demonstracji szlaczka jako rysunku powtarzalnego, czy równoważnie — przesuwalnego, proszę uczniów, by w domu narysowali po kilkanaście różnych szlaczków. Na następnej lekcji przerysowujemy te szlaczki na tablicy. Proszę, by ktoś narysował swoje szlaczki i na przykładzie tych szlaczków omawiam ich „matematyczną klasyfikację". Mówię, że szlaczki będziemy klasyfikować ze względu na rodzaje symetrii, które posiadają. Najczęściej zdarza się, że wśród pierwszych szlaczków pojawiają się dwa rodzaje, które wybieram jako pierwsze do omówienia (pokazuję tu po dwa szlaczki każdego typu). Są to rysunki 14.1 – 14.4. Szlaczki, a w przyszłości także tapety, będę w dalszym ciągu rysował grubą linią; wszystkie linie cienkie na następnych rysunkach będą liniami pomocniczymi lub ilustrującymi własności szlaczka, takimi jak osie symetrii.

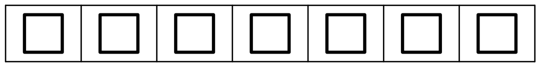

Rys. 14.1

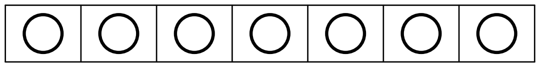

Rys. 14.2

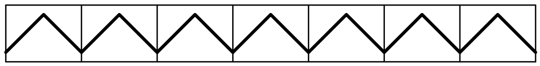

Rys. 14.3

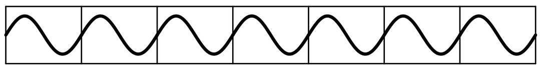

Rys. 14.4

Krótko omawiam z uczniami, jakie fragmenty szlaczków są tymi podstawowymi powtarzalnymi komórkami — na rysunkach 14.5 – 14.8 są to narysowane cienką linią prostokąty:

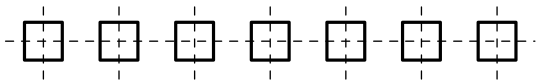

Rys. 14.5

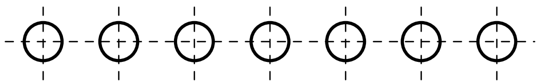

Rys. 14.6


Rys. 14.7


Rys. 14.8

Teraz zauważamy, jakie osie symetrii mają te szlaczki. W pierwszych dwóch (rys. 14.9 i 14.10) od razu dostrzegamy poziome osie symetrii. Wielu uczniów dostrzega też pionowe osie symetrii przechodzące przez środki kwadratów i okręgów (osie symetrii będę zaznaczał na rysunkach linią przerywaną o długich odcinkach):

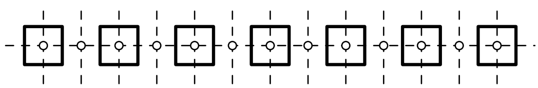

Rys. 14.9

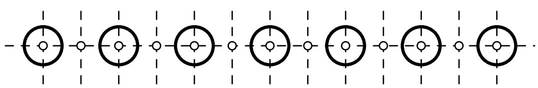

Rys. 14.10

Te osie symetrii demonstruję też na foliach. Folię odwracam na drugą stronę w taki sposób, by pokryły się wybrane osie symetrii — rysunki pokrywają się. Mam oczywiście zawczasu przygotowane takie cztery rodzaje folii. Jak wspomniałem, prawie zawsze wśród pierwszych rysunków były właśnie te cztery szlaczki.

Uczniowie trudniej dostrzegają pionowe osie symetrii między kwadratami i okręgami, widocznie bardziej myślą o osiach symetrii figur tworzących szlaczek, niż o osiach symetrii całego szlaczka. Widzimy zatem, że szlaczek może mieć dwa rodzaje pionowych osi symetrii. Oś pierwszego rodzaju jest osią symetrii powtarzającego się rysunku tworzącego szlaczek. Oś drugiego rodzaju przebiega między rysunkami tworzącymi szlaczek.

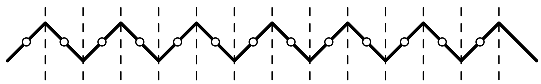
Zdarzają się też pytania, czy należy także narysować ukośne osie symetrii kwadratów. Mam też przygotowane takie folie — odbicie wzdłuż ukośnej osi symetrii powoduje, że szlaczek odbity jest pionowy zamiast poziomy. Ta demonstracja przekonuje uczniów, że szlaczek może mieć tylko dwa rodzaje osi symetrii: poziome i pionowe. Wreszcie pokazuję uczniom środki symetrii, czyli środki obrotów o 180° (rys. 14.11 i 14.12). Okazuje się, że leżą one dokładnie w punktach przecięcia poziomej osi symetrii z osiami pionowymi (środki symetrii będę zaznaczał niewielkimi kółeczkami rysowanymi cienką linią):


Rys. 14.11


Rys. 14.12

Oczywiście na foliach demonstruję także środki symetrii. Wyjaśniam też, że to, iż środki symetrii leżą w punktach przecięcia osi symetrii, nie jest przypadkiem. Punkt przecięcia prostopadłych osi symetrii dowolnej figury geometrycznej jest środkiem symetrii tej figury. Na ogół też pokazuję prosty dowód tego faktu. Warto też wspomnieć, że prawdziwe jest następujące twierdzenie odwrotne: jeśli środek symetrii figury geometrycznej leży na osi symetrii tej figury, to ta figura ma też drugą oś symetrii — linię prostą prostopadłą do danej osi i przechodzącą przez dany środek symetrii. Ten dowód nie jest trudny i także można go pokazać uczniom (lub zostawić jako ćwiczenie). Proszę uczniów, by zapamiętali te dwa przydatne fakty. Będą one pomocne przy odnajdywaniu środków i osi symetrii w bardziej skomplikowanych sytuacjach.

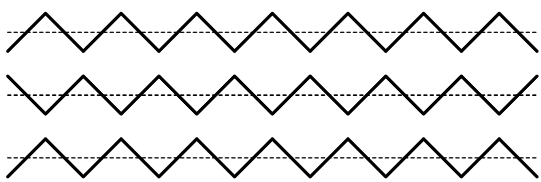
Uczniowie teraz łatwo odnajdują w dwóch następnych szlaczkach pionowe osie symetrii i nieco trudniej środki symetrii. Oto one w szlaczku trzecim (rys. 14.13).



Rys. 14.13

Ten szlaczek ma jeszcze jeden rodzaj symetrii. Po odbiciu symetrycznym względem prostej poziomej i przesunięciu o połowę długości podstawowej komórki, szlaczek nałoży się na siebie. Na rysunkach 14.14 – 14.16 widzimy:

1) jeszcze raz trzeci szlaczek (rys. 14.14),
2) następnie ten sam szlaczek odbity względem osi poziomej narysowanej linią przerywaną o krótkich odcinkach (rys. 14.15),
3) wreszcie ten sam trzeci szlaczek odbity względem tej osi poziomej i przesunięty o połowę długości podstawowej komórki (rys. 14.16) — przypominam, że szlaczek jest nieskończony i rysujemy tylko jego ograniczony fragment, przesuwamy zaś cały szlaczek.

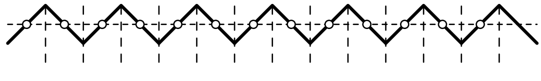


Rys. 14.14

Rys. 14.15

Rys. 14.16

Widzimy, że szlaczek najniższy (rys. 14.16) pokrywa się z najwyższym (rys. 14.14). Poziomą oś o tej własności nazywamy osią poślizgową. Przekształcenie geometryczne będące złożeniem symetrii osiowej z przesunięciem wzdłuż tej osi nazywamy symetrią z poślizgiem. Osie poślizgowe będę na rysunkach oznaczał linią przerywaną rysowaną krótkimi odcinkami w odróżnieniu od osi symetrii rysowanej długimi odcinkami. Na rysunku 14.17 widzimy wszystkie rodzaje symetrii trzeciego szlaczka: poziomą oś poślizgową, pionowe osie symetrii oraz środki symetrii.



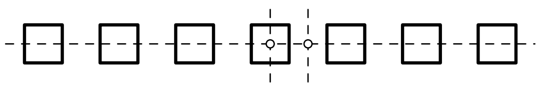
Rys. 14.17

Szlaczek czwarty ma te same rodzaje symetrii i nie będę ich już tu rysował.

Mamy więc cztery rodzaje symetrii szlaczków: poziome osie symetrii, pionowe osie symetrii (czasem dwóch rodzajów), środki symetrii i osie poślizgowe. Okazuje się, że istnieje tylko 7 rodzajów szlaczków różniących się posiadanymi rodzajami symetrii. W bardziej zaawansowanym języku matematycznym oznacza to, że istnieje tylko 7 jednowymiarowych grup krystalograficznych. Oczywiście badanie przez matematyków takich powtarzających się struktur ma motywację biorącą się z krystalografii. Kryształ jest powtarzającą się strukturą przestrzenną — mamy sieć powtarzającą się (teoretycznie) w nieskończoność w trzech wymiarach, w oczkach tej sieci znajdują się atomy tworzące dany związek chemiczny. Rozważamy grupę przekształceń tej sieci, przeprowadzającą daną sieć (i odpowiednie atomy) na siebie. Pytamy następnie, ile jest takich grup przekształceń. Okazuje się, że jeśli ograniczymy się do sieci jednowymiarowych, to istnieje dokładnie 7 takich grup, odpowiadających siedmiu szlaczkom. Można także udowodnić, że istnieje dokładnie 17 dwuwymiarowych grup krystalograficznych, będą one odpowiadały tzw. tapetom, które zaczniemy badać po szlaczkach. Te dwie liczby podaję oczywiście uczniom bez uzasadnienia i nie mówię także o grupach przekształceń. Podczas rysowania odpowiednich szlaczków i tapet tylko autorytet nauczyciela gwarantuje, że zostały narysowane wszystkie. Uczniowie dostają ode mnie wydrukowane rysunki wszystkich szlaczków i tapet oraz klucz do rozpoznawania tapet.

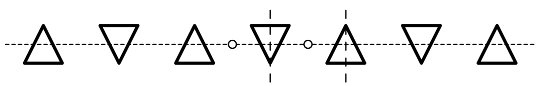
Wróćmy do szlaczków. Mamy 7 rodzajów szlaczków. Oto one. Przy każdym szlaczku podaję jego nazwę (biorącą się z krystalografii) oraz posiadane rodzaje symetrii. Na rysunku zaznaczam posiadane przez szlaczek osie poziome (symetrii lub poślizgową), po jednej osi pionowej każdego rodzaju i po jednym środku symetrii każdego rodzaju. Zaczynamy od dwóch poznanych szlaczków. Mają one po trzy rodzaje symetrii i różnią się tym, że jeden ma poziomą oś symetrii, drugi zaś poziomą oś poślizgową.

Szlaczek 1 (typ $pmm2$). Ma poziomą oś symetrii, dwa rodzaje pionowych osi symetrii i dwa rodzaje środków symetrii (rys. 14.18).



Rys. 14.18

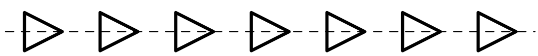
Szlaczek 2 (typ $pma2$). Ma poziomą oś poślizgową, dwa rodzaje pionowych osi symetrii i dwa rodzaje środków symetrii (rys. 14.19).



Rys. 14.19

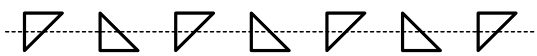
Teraz przychodzą cztery rodzaje szlaczków, każdy z nich ma dokładnie jeden rodzaj symetrii. Zaczynamy od szlaczków mających znane nam osie poziome, potem zobaczymy szlaczek z osiami pionowymi i wreszcie szlaczek ze środkami symetrii.

Szlaczek 3 (typ $p1m1$). Ma tylko poziomą oś symetrii (rys. 14.20).



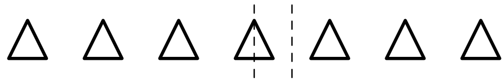
Rys. 14.20

Szlaczek 4 (typ $p1a1$). Ma tylko poziomą oś poślizgową (rys. 14.21).



Rys. 14.21

Szlaczek 5 (typ $pm11$). Ma tylko dwa rodzaje pionowych osi symetrii (rys. 14.22).



Rys. 14.22

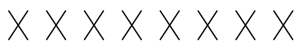
Szlaczek 6 (typ $p112$). Ma tylko dwa rodzaje środków symetrii (rys. 14.23).

Rys. 14.23

Wreszcie ostatni typ szlaczków.
Szlaczek 7 (typ $p111$). Nie ma żadnych symetrii (rys. 14.24).

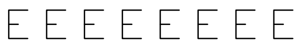
Rys. 14.24

Pokazuję też szlaczki utworzone z liter. Oto przykłady takich szlaczków, w tej samej kolejności:



Rys. 14.25

Rys. 14.26



Rys. 14.27

Rys. 14.28

Rys. 14.29

Rys. 14.30

Rys. 14.31

Czasami używam z uczniami nazw szlaczków pochodzących od liter, z których zostały utworzone. Tak więc:

- typ $pmm2$ nazywam typem X (rys. 14.25);
- typ $pma2$ nazywam typem MW (rys. 14.26);
- typ $p1m1$ nazywam typem E (rys. 14.27);
- typ $p1a1$ nazywam typem LΓ (rys. 14.28);
- typ $pm11$ nazywam typem A (rys. 14.29);
- typ $p112$ nazywam typem N (rys. 14.30);
- typ $p111$ nazywam typem F (rys. 14.31).

Litery, obok najprostszych figur geometrycznych (kwadratów, prostokątów, okręgów, trójkątów) będą też podstawowym składnikiem tapet, którymi zajmiemy się po szlaczkach.

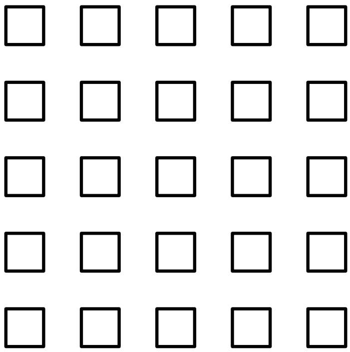
Uczniowie rozpoznają te szlaczki wśród narysowanych przez siebie. Na ogół, wśród pierwszych kilku narysowanych na tablicy, znajduje się 4 – 5 typów szlaczków. Uczniowie, którzy znajdą u siebie szlaczek typu, którego nie ma na tablicy, dorysowują go. Na ogół okazuje się, że wszystkie (lub prawie wszystkie) rodzaje zostały znalezione. Teraz przychodzi pierwsza część projektu. Proszę uczniów, by znaleźli gdziekolwiek w otaczającym nas świecie takie szlaczki, sfotografowali je i stworzyli album szlaczków. W albumie, dla każdego rodzaju szlaczka powinien być rysunek wzorcowy, np. wzięty z dostarczonego im wzoru wszystkich 7 szlaczków, co najmniej jedno zdjęcie szlaczka tego typu, rysunek (odręczny lub lepiej komputerowy) sfotografowanego szlaczka, na którym są zaznaczone (najlepiej różnymi kolorami) osie i środki symetrii. Taki album ma zatem co najmniej 7 stron odpowiadających siedmiu typom szlaczków i stronę objaśnień do rysunków (wyjaśniajacych np. użyte na rysunkach kolory). Czasami uczniowie poprzedzają strony poświęcone szlaczkom kilkoma stronami, na których fotografują obiekty symetryczne (względem osi lub środka symetrii). Takie zdjęcia są często bardzo pomysłowe. Poza naturalnymi zdjęciami domów czy pospolitych przedmiotów codziennego użytku widziałem zdjęcia wtyczki do prądu, widelca, czajnika sfotografowanego z góry itp. Wśród zdjęć szlaczków pomysłowość jest jeszcze większa. Jako szlaczek mający tylko oś poślizgową, oprócz narzucających się śladów człowieka, widziałem zdjęcie bieżnika opony samochodowej. Jako szlaczek mający tylko środki symetrii widziałem zdjęcie gwintu długiej śruby. Zebranie odpowiedniej liczby zdjęć (znalezienie wszystkich 7 szlaczków wokół nas nie jest rzeczą łatwą) zajmuje uczniom nawet kilka tygodni. Często widać, że pomysły się powtarzają, niektóre pojawiają się naturalnie, inne są wynikiem pomocy kolegów, podpowiedzi. Nie mam nic przeciwko takiej współpracy, o ile ogranicza się ona do podpowiedzenia pomysłu, a nie do skopiowania zdjęcia lub rysunku. Zdjęcia mają być w każdej pracy różne, rysunki wykonane własnoręcznie przez autora pracy.

Zdarza się, że uczniowie znajdują potrzebne zdjęcia w Internecie. Podpowiadam im także, gdzie można je znaleźć. Wiele takich szlaczków pojawia się jako elementy dekoracyjne w architekturze i sztuce zdobniczej: meandry na wazach greckich, fryzy na budynkach właściwie każdego stylu, kafelki w sztuce islamu, elementy ubioru (np. biżuteria damska czy paski do zegarków) i wiele innych. Pomysłowość uczniów w poszukiwaniach w sieci przewyższa wielokrotnie moje oczekiwania, wielokrotnie byłem też zaskoczony skojarzeniami uczniów. Nie zawsze zdjęcie przedstawiało idealny szlaczek, ale kojarzyło się z takim szlaczkiem. Na przykład zdjęcie ptaków siedzących na drucie — oczywiście odległości między nimi nie były jednakowe, ale skojarzenie z prawidłowym szlaczkiem jest oczywiste. Wreszcie jako szlaczek można potraktować jeden pasek „wycięty” z tapety, a tapet wokół nas i w Internecie można znaleźć mnóstwo.

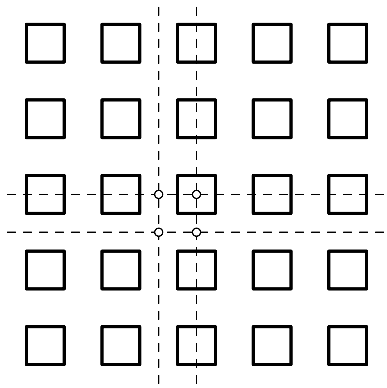
Najczęściej prace oddane za pierwszym razem zawierają błędy (złe zakwalifikowanie szlaczka) czy luki (np. brak pewnych osi lub symetrii na rysunku). Wiele prac jest wykonanych pośpiesznie (widać, że tuż przed terminem), niestarannie. Wprawdzie zaliczam taką pracę, ale proszę o poprawienie jej — tak, by po całkowitym ukończeniu przyjemnie było wziąć ją do ręki. Całkowite ukończenie takiej pracy trwa wiele tygodni, a nawet miesięcy i często przenosi się do II klasy.

Po zakończeniu omawiania szlaczków przechodzimy do tapet. Tapeta jest to wzór powtarzalny w dwóch kierunkach: poziomo i pionowo (lub na ukos). W ten sposób tapeta wypełnia całą płaszczyznę i rysunek nakłada się na siebie przy dwóch rodzajach przesunięć, np. poziomo i pionowo. Oczywiście to nakładanie się rysunku przy dwóch rodzajach przesunięć także ilustruję za pomocą folii. Jedną wybraną tapetę (o dość skomplikowanym wzorze, trudnym do skopiowania przez uczniów) drukuję na dwóch foliach i demonstruję uczniom. Starannie pokazuję, co to znaczy, że rysunek nakłada się na siebie przy przesunięciach w dwóch różnych kierunkach. Po tej demonstracji proszę uczniów o samodzielne narysowanie kilku tapet.

Rysowanie tapet jest dla uczniów zadaniem znacznie trudniejszym niż rysowanie szlaczków. Najczęściej uczniowie umieją narysować zaledwie dwa, trzy rodzaje tapet. Jedną z tapet, którą rysuje chyba każdy uczeń, jest tapeta na rysunku 14.32. Narysowanie takiej tapety jest łatwe, bardziej kłopotliwe jest znajdowanie symetrii. Uczniowie widzą cztery najprostsze osie symetrii, dwa rodzaje osi poziomych i dwa rodzaje osi pionowych. Na ogół pamiętają też, że punkty przecięcia prostopadłych osi symetrii są środkami symetrii, czyli środkami obrotu o 180° (rys. 14.33).

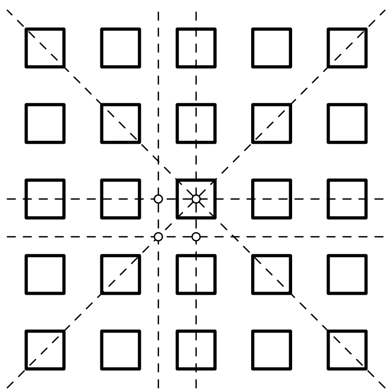


Rys. 14.32



Rys. 14.33

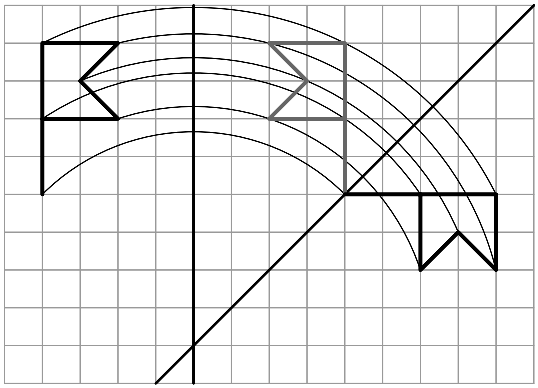
Dwa rodzaje ukośnych osi symetrii (rys. 14.34) demonstruję za pomocą folii. Folie z takimi tapetami i narysowanymi odpowiednimi osiami i środkami symetrii przygotowuję zawczasu, bo tę tapetę rysują wszyscy lub prawie wszyscy uczniowie. Rzeczywiście demonstracja za pomocą dwóch folii potwierdza, że osie ukośne są osiami symetrii całej tapety.



Rys. 14.34

Dochodzi jeszcze jeden rodzaj ruchu rysunku, za pomocą którego można nałożyć cały rysunek na siebie — jest nim obrót. Z pojęciem obrotu uczniowie już się zetknęli. Pokazuję im przecież, że symetria środkowa jest obrotem o 180°. Teraz na tapetach widzą nowe obroty, np. o 90°. Jest tak w najczęściej rysowanej tapecie złożonej z kwadratów, tę tapetę można obrócić o 90° wokół środka kwadratu. Zauważamy przy tym, że taki środek obrotu jest punktem przecięcia osi symetrii tworzących kąt 45°. Osie prostopadłe dały środek obrotu o 180°, osie przecinające się pod kątem 45° dały obrót o 90°. Czy to przypadek?

Tę ostatnią kwestię należy zbadać dokładniej. Na papierze w kratkę łatwo rysuje się odbicia symetryczne względem osi poziomych, pionowych i ukośnych nachylonych pod kątem 45 stopni. Popatrzmy na rysunek 14.35.

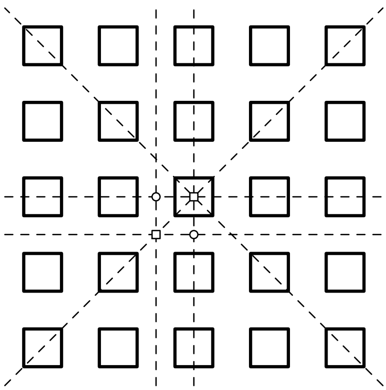


Rys. 14.35

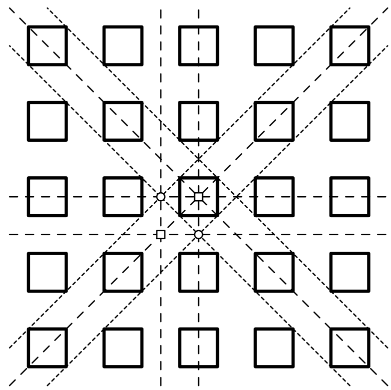
Dwie osie symetrii, pionowa i ukośna, przecinają się pod kątem 45°. Chorągiewka narysowana na lewo od obu osi jest przekształcana przez symetrię najpierw względem osi pionowej (rysunek odbitej chorągiewki jest nieco bledszy od początkowego), a następnie przez symetrię względem osi ukośnej. Zaznaczone łuki utwierdzają nas w przekonaniu, że ostateczny rysunek chorągiewki został otrzymany z początkowego rysunku przez obrót o 90° wokół punktu przecięcia osi symetrii. Podobne doświadczenia można wykonać dla osi przecinających się pod innymi kątami. Można też przeprowadzić dowód twierdzenia mówiącego, że jeśli dwie osie symetrii przecinają się pod kątem α, to złożenie symetrii osiowych względem tych osi jest obrotem o kąt 2α wokół punktu przecięcia osi symetrii (chociaż na ogół takiego dowodu w gimnazjum nie przeprowadzam).

W tym miejscu można zadać pytanie, co na lekcji matematyki powinno być udowodnione, a co można uczniom przekazać bez dowodu, jedynie „na wiarę". Moim zdaniem w gimnazjum należy nauczyć uczniów dowodzenia twierdzeń matematycznych przy wykorzystaniu możliwie prostych środków. Do dowodu wspomnianego twierdzenia o złożeniu symetrii potrzeba środków, które — moim zdaniem — wykraczają poza to, czego powinno się wymagać od (nawet zdolnego) gimnazjalisty. Mamy tu pojęcie przekształcenia geometrycznego w ogólności, złożenie przekształceń i dowód wymagający rozpatrywania wielu przypadków położenia punktu lub ogólnego pojęcia kąta zorientowanego. To wszystko powinniśmy uczniom przekazać, ale chyba jednak nie w gimnazjum. Teraz ograniczyłbym się do przykładu (lub kilku przykładów) dobrze ilustrującego tezę (np. takich jak zrobiony wyżej rysunek) i zapewnienia uczniów, że odpowiednie twierdzenie można udowodnić w sposób ścisły. Używam jednak słowa „twierdzenie". Nie podaję prawd matematycznych bez jakiegokolwiek uzasadnienia. Po przykładach ilustrujących tezę, mówię uczniom, że odpowiednie **twierdzenie** można **udowodnić**, chociaż tego dowodu nie będę im pokazywać. Powodów, dla których nie pokazuję dowodu, może być wiele: dowód może być za trudny lub po prostu może on bardzo wydłużyć rozważania, które prowadzę, może za bardzo oderwać nas od głównego toku rozważań. Jednak w matematyce nie powinno być stwierdzeń nieuzasadnionych. Wszystko jest albo aksjomatem i wtedy wyraźnie o tym mówimy uczniom, albo jest twierdzeniem i wymaga dowodu (chociaż samego dowodu mamy prawo nie pokazywać).

Teraz widzimy, że niektóre punkty, które były środkami obrotu o 180° w pewien sposób „awansowały" — stały się środkami obrotu o 90°. Na rysunku 14.36 zostały one zaznaczone małymi kwadratami. Oczywiście, jeśli obrót rysunku o 90 stopni wokół jakiegoś punktu powoduje, że rysunek pokryje się z oryginałem, to obrót o 180 stopni tym bardziej ma tę własność. Przecież obrót o 180 stopni powstaje z dwóch kolejnych obrotów o 90 stopni. Dokonajmy jeszcze pewnej umowy terminologicznej. Obroty będziemy zaliczać do symetrii rysunku. Mówimy czasem, że pewien rysunek ma symetrię trzykrotną, rozumiejąc przez to, że każdy z trzech obrotów (o 120°, o 240° i o 360° przeprowadza ten rysunek na siebie). Tak w szczególności pojęcie symetrii rozumieją fizycy. Mówiąc ogólnie o symetriach tapety, będziemy zatem rozumieli także jej obroty.



Rys. 14.36



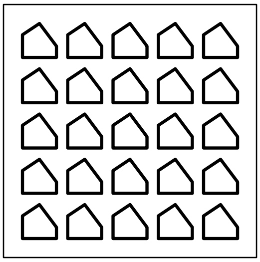
Rys. 14.37

Podsumujmy: na rysunku 14.37 mamy zaznaczone następujące symetrie tapety złożonej z kwadratów — pionowe i poziome osie symetrii (zaznaczone linią przerywaną złożoną z długich odcinków), środki obrotów o 180° (zaznaczone, jak poprzednio, małymi kółeczkami) oraz środki obrotów o 90° (zostały zaznaczone małymi kwadratami). Te symetrie mogliśmy łatwo dostrzec. Okazuje się, że nasza tapeta ma jeszcze osie poślizgowe (zaznaczone na rysunku 14.37, tak jak poprzednio, liniami przerywanymi o krótkich odcinkach). Analiza naszej tapety jest zakończona. Teraz przychodzi pora na badanie możliwych tapet. Przede wszystkim mówię uczniom, że tapety klasyfikujemy ze względu na najmniejszy obrót przeprowadzający ją na siebie. Możliwe jest przy tym tylko pięć sytuacji:

1) tapeta nie ma żadnego obrotu przeprowadzającego ją na siebie;
2) najmniejszy obrót przeprowadzający tapetę na siebie ma 180°;
3) najmniejszy obrót przeprowadzający tapetę na siebie ma 90°;
4) najmniejszy obrót przeprowadzający tapetę na siebie ma 120°;
5) najmniejszy obrót przeprowadzający tapetę na siebie ma 60°.

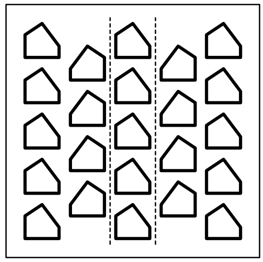
Tłumaczę uczniom, że tapeta, która nie dopuszcza żadnego obrotu, w pewien sposób wskazuje kierunek i zwrot, na przykład pionowy do góry. Tapeta, która dopuszcza jedynie obroty o 180° wskazuje kierunek, bez zwrotu, na przykład pionowy. I tak dalej. W punkcie 3) tapeta wyróżnia dwa kierunki, na przykład poziomy i pionowy, w punkcie 4) trzy kierunki, a w punkcie 5) sześć kierunków. Tłumaczę dalej, że rysunki tapet pierwszych trzech grup najłatwiej wykonywać na papierze kratkowanym (który w naturalny sposób wyróżnia kierunki poziomy i pionowy), a tapety ostatnich dwóch grup najłatwiej wykonywać na papierze z siatką trójkątów równobocznych. Taką siatkę przygotowałem dla uczniów. Dostają oni kartki z wydrukowanymi takimi siatkami (rysunek siatki znajduje się w dalszej części tego rozdziału, po omówieniu wszystkich tapet), a także daję uczniom plik w formacie pdf, zawierający rysunek takiej siatki.

Teraz przechodzimy do rysowania tapet wszystkich pięciu grup. Istnieją cztery tapety bez obrotów pokazane na rysunkach 14.38 – 14.41.



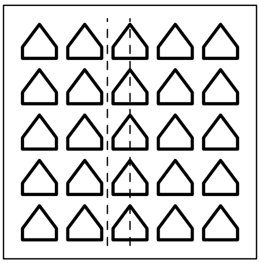
typ $p1$

Rys. 14.38



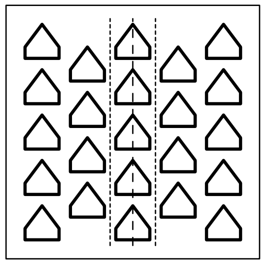
typ pg

Rys. 14.39



typ pm

Rys. 14.40



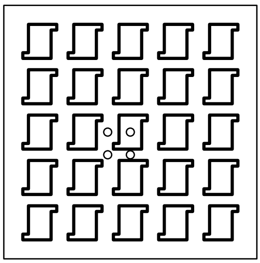
typ cm

Rys. 14.41

Typ tapety	Własności
$p1$	1) Nie istnieją środki obrotów; 2) nie istnieją osie symetrii; 3) nie istnieją osie poślizgowe.
pg	1) Nie istnieją środki obrotów; 2) nie istnieją osie symetrii; 3) istnieją osie poślizgowe.
pm	1) Nie istnieją środki obrotów; 2) istnieją osie symetrii; 3) nie istnieją osie poślizgowe.
cm	1) Nie istnieją środki obrotów; 2) istnieją osie symetrii; 3) istnieją osie poślizgowe.

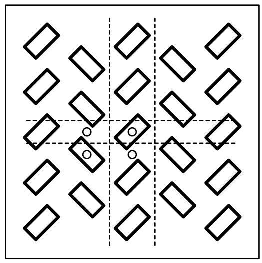
Te tapety uczniowie na ogół łatwo znajdują, czasem po niewielkich podpowiedziach. Istotną wskazówką jest to, że tapety pierwszej grupy wskazują pewien kierunek i zwrot. Naturalne jest zatem poszukiwanie powatarzającego się wzoru, który taki kierunek wskazuje. Kwestia istnienia osi symetrii też jest podpowiedzią; gdy szukamy tapety mającej oś symetrii (łatwo zauważyć, że nie może ona mieć przecinających się osi symetrii, bo miałaby obroty), budujemy ją ze wzorów symetrycznych. Jeśli szukamy tapety bez symetrii, budujemy ją ze wzorów niesymetrycznych. Uczniowie najczęściej rysują odpowiednie trójkąty (równoramienne lub prostokątne). Ja w powyższych rysunkach wybrałem pięciokąty, ponieważ trójkąty często są rysowane tak, że trudno odróżnić trójkąt równoramienny nierównoboczny od trójkąta równobocznego.

Przechodzimy następnie do tapet dopuszczających obroty o 180°. Te tapety wyróżniają kierunek, ale nie wskazują zwrotu. Mogą one zatem mieć prostopadłe osie symetrii. Istnieje pięć typów takich tapet (rys. 14.42 – 14.46). Większość z nich uczniowie także dość łatwo znajdują. Oto te tapety:



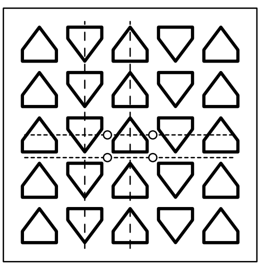
typ $p2$

Rys. 14.42



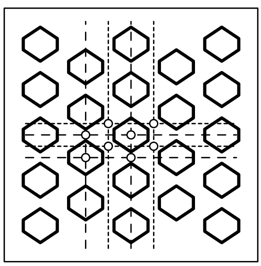
typ pgg

Rys. 14.43



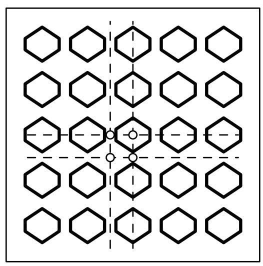
typ pmg

Rys. 14.44



typ cmm

Rys. 14.45



typ pmm

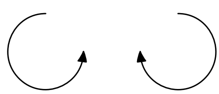
Rys. 14.46

Tapetą, którą uczniowie znajdują najrzadziej, jest chyba tapeta typu pgg (rys. 14.43). Jest to tym dziwniejsze, że ten typ tapety spotykamy niemal codziennie. Tak bowiem najczęściej są układane klepki podłogowe (jest to ułożenie w tzw. jodełkę). Jak widać, zidentyfikowanie tapety bywa dość trudne dla osoby nie mającej wprawy. Pewne kłopoty sprawia też tapeta typu $p2$, ale w tym przypadku pomaga podpowiedź, że bardzo praktycznym sposobem tworzenia tapet jest budowanie ich z liter. Uczniowie znają już kilka liter mających tylko symetrię środkową (N, S, Z) i mogą z nich ułożyć odpowiednią tapetę. Tapeta, którą widzimy wyżej, jest zbudowana z figur przypominających nieco literę S.

A oto podsumowane własności tych pięciu typów tapet:

Typ tapety	Własności
$p2$	1) Istnieją środki obrotów o 180° (środki symetrii); 2) nie istnieją osie symetrii; 3) nie istnieją osie poślizgowe.
pgg	1) Istnieją środki obrotów o 180° (środki symetrii); 2) nie istnieją osie symetrii; 3) istnieją prostopadłe osie poślizgowe.
pmg	1) Istnieją środki obrotów o 180° (środki symetrii); 2) istnieją równoległe osie symetrii; 3) istnieją osie poślizgowe prostopadłe do osi symetrii.
cmm	1) Istnieją środki obrotów o 180° (środki symetrii); 2) istnieją prostopadłe osie symetrii; 3) istnieją prostopadłe osie poślizgowe (równoległe do osi symetrii); 4) nie wszystkie środki obrotów leżą na osiach symetrii.
pmm	1) Istnieją środki obrotów o 180° (środki symetrii); 2) istnieją prostopadłe osie symetrii; 3) nie istnieją osie poślizgowe; 4) wszystkie środki obrotów leżą na osiach symetrii.

Istnieją wreszcie trzy typy tapet, w których najmniejszy obrót ma 90°. Jeden typ już znamy — to tapeta zbudowana z samych kwadratów. Jest też typ nie dopuszczający symetrii (tzn. tapety, które nie mają ani osi symetrii, ani osi poślizgowych). W tym miejscu warto poświęcić trochę czasu, by porozmawiać z uczniami o dwóch orientacjach na płaszczyźnie. Jedną orientację wyznacza ruch wskazówek zegara, natomiast ruch w przeciwnym kierunku wyznacza drugą orientację na płaszczyźnie. Możemy pokazać uczniom figury geometryczne wyznaczające pewną orientację. Oto najprostszy przykład (rys. 14.47):



Rys. 14.47

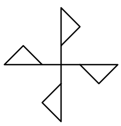
Strzałka po lewej stronie wskazuje ruch w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara, a strzałka po prawej stronie wskazuje ruch w kierunku zgodnym z ruchem wskazówek zegara. Pokazuję uczniom kilka innych przykładów par figur o przeciwnej orientacji. Najpierw dwa trójkąty prostokątne (rys. 14.48). Rysowanie trójkąta prostokątnego w kolejności: najpierw dłuższa przyprostokątna, potem krótsza i na końcu przeciwprostokątna, w lewym trójkącie daje ruch w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara, w prawym zaś, ruch zgodny z ruchem wskazówek zegara. Następnie litera N i litera symetryczna do niej (rys. 14.49).

Rys. 14.48

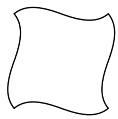
Rys. 14.49

Jeśli rysujemy literę N, to niezależnie od którego końca zaczniemy, najpierw zakręcamy zgodnie z ruchem wskazówek zegara, a potem przeciwnie. Gdy rysujemy literę symetryczną do litery N, postępujemy odwrotnie — najpierw skręcamy przeciwnie do ruchu wskazówek zegara, a potem zgodnie z ruchem wskazówek zegara.

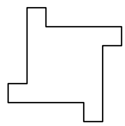
Te przykłady wyjaśniają uczniom dość dobrze, co to jest orientacja na płaszczyźnie. Następnie zauważamy, że figury symetryczne nie wyznaczają orientacji. Stąd wniosek, że jeśli chcemy stworzyć tapetę, która nie ma osi symetrii (ani osi poślizgowych), a ma przy tym środki obrotu, to możemy próbować ją budować z figur wyznaczających orientację płaszczyzny i mających środek obrotu. To udało się zrobić w przypadku tapety typu $p2$. Figura, z której budowaliśmy taką tapetę miała środek symetrii i wyznaczała orientację (np. litera N lub figura podobna do litery S). Weźmy zatem figurę wyznaczającą orientację płaszczyzny, którą można przy tym obrócić o $90°$. Oto kilka takich figur (rys. 14.50 – 14.52).



Rys. 14.50



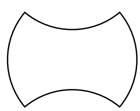
Rys. 14.51



Rys. 14.52

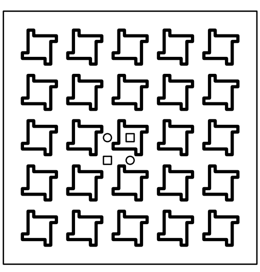
Zwracam szczególną uwagę na pierwszą z nich — wiatraczek z czterema ramionami. Podobne figury jeszcze wykorzystamy.

Z figury pokazanej na rysunku 14.52 zbudujemy naszą przykładową tapetę (rys. 14.54). Trzecią tapetę (rys. 14.56) już dobrze znamy. Środkowa (rys. 14.55) jest trudna do wymyślenia, choć wielokrotnie widziana. W taki sposób są układane kostki brukowe wyglądające mniej więcej tak jak na rysunku 14.53 (przy czym łuki wypukłe i wklęsłe są dokładnie takie same po to, by dwie takie kostki dobrze do siebie pasowały).



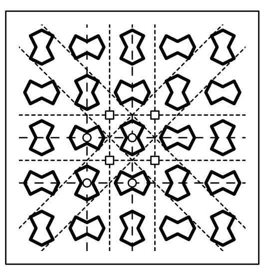
Rys. 14.53

Mamy zatem nasz zestaw trzech tapet ze środkami obrotu o 90 stopni:



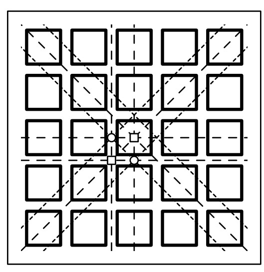
typ $p4$

Rys. 14.54



typ $p4g$

Rys. 14.55



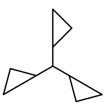
typ $p4m$

Rys. 14.56

W następującej tabeli zebrane są własności tych trzech typów tapet.

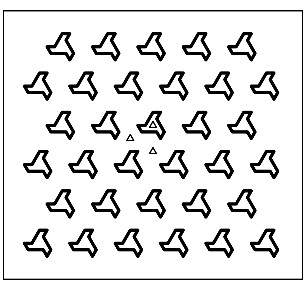
Typ tapety	Własności
$p4$	1) Istnieją środki obrotów o 90° i o 180° (środki symetrii); 2) nie istnieją osie symetrii; 3) nie istnieją osie poślizgowe.
$p4g$	1) Istnieją środki obrotów o 90° i o 180° (środki symetrii); 2) istnieją prostopadłe osie symetrii; 3) istnieją 4 kierunki osi poślizgowych.
$p4m$	1) Istnieją środki obrotów o 90° i o 180° (środki symetrii); 2) istnieją 4 kierunki osi symetrii; 3) istnieją prostopadłe osie poślizgowe.

Wszystkie dotychczasowe tapety można było łatwo narysować na siatce kwadratowej, czyli na papierze w kratkę. Teraz przechodzimy do tapet, które najłatwiej narysować na papierze z siatką trójkątną. Uczniowie wykorzystują tu siatki, które dostają. Plik typu pdf pozwala im dodrukować tyle stron, ile będą potrzebować. Najpierw mamy trzy tapety, w których najmniejszy obrót ma 120 stopni. Jedna z nich jest dość oczywista — chcemy mieć tapetę bez osi symetrii. Próbujemy ją zbudować z figur wyznaczających orientację płaszczyzny, mających środek obrotu o 120 stopni. Możemy spróbować narysować na przykład „wiatraczek" z trzema ramionami (rys. 14.57) i z takich wiatraczków zbudować naszą tapetę. Na przykładowej tapecie (rys. 14.58) są figury podobnego typu. Dwie następne tapety (rys. 14.59 i 14.60) stwarzają wielu uczniom prawdziwe kłopoty. Na pierwszy rzut oka nie widać, czym one się różnią. W jednej i drugiej mamy trójkąty równoboczne rozmieszczone w środkach stykających się ze sobą sześciokątów — tak jakby każdy trójkąt został umieszczony wewnątrz jednej komórki plastra miodu. Różnią się skręceniem tych trójkątów o 90 stopni. Czy jest to naprawdę poważna różnica? Otóż okazuje się, że w jednej tapecie wszystkie środki obrotu o 120 stopni leżą na osiach symetrii, a w drugiej tak nie jest. To bardzo subtelna różnica, ale jednak...



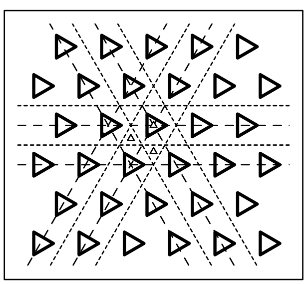
Rys. 14.57

Na poniższych rysunkach środki obrotu o 120 stopni zostały zaznaczone małymi trójkącikami narysowanymi cienką linią:



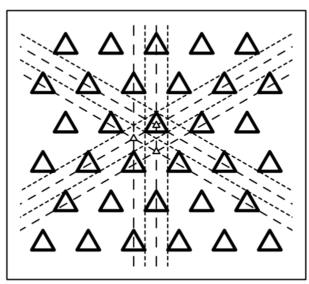
typ $p3$

Rys. 14.58



typ $p31m$

Rys. 14.59



typ $p3m1$

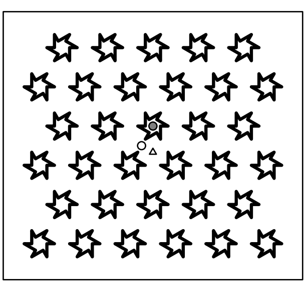
Rys. 14.60

Rysunki, które nazwałem tu tapetami, były często stosowanym elementem zdobniczym w sztuce. Zacznijmy od układania klepek podłogowych. Jest wiele różnych deseni i wszystkie polegają na powtarzaniu pewnego podstawowego kształtu. Podobnie układamy kostki brukowe, kafelki na podłogach lub ścianach. Tapety na ścianie też tak wyglądają — stąd nazwa. Sweter robiony na drutach czy ozdobne kraty w oknach to następne przykłady. Wiele tradycyjnych wzorów ludowych w różnych kulturach jest opartych na powtarzalności. Niektóre typy tapet występują bardzo często, inne są dużo rzadsze. W wielu kulturach występowały prawie wszystkie typy tapet; najczęściej zdarzało się, że brakowało właśnie jednego z tych dwóch ostatnich wzorów. Różnica jest bowiem subtelna i trudna do zauważenia.

W poniższej tabeli mamy zebrane własności tych trzech tapet:

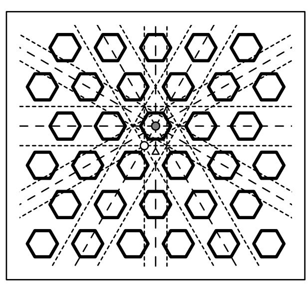
Typ tapety	Własności
$p3$	1) Istnieją środki obrotów o 120°; 2) nie istnieją osie symetrii; 3) nie istnieją osie poślizgowe.
$p31m$	1) Istnieją środki obrotów o 120°; 2) istnieją 3 kierunki osi symetrii; 3) istnieją 3 kierunki osi poślizgowych; 4) nie wszystkie środki obrotów leżą na osiach symetrii.
$p3m1$	1) Istnieją środki obrotów o 120°; 2) istnieją 3 kierunki osi symetrii; 3) istnieją 3 kierunki osi poślizgowych; 4) wszystkie środki obrotów leżą na osiach symetrii.

Pozostają dwie ostatnie tapety, w których najmniejszy obrót ma 60 stopni. Jedna jest złożona z figur wyznaczających orientację płaszczyzny — podobnych do figur na rysunku 14.58 — i nie ma osi symetrii (rys. 14.61), druga ma osie symetrii i jej najprostszym przykładem jest plaster miodu złożony z sześciokątów foremnych (rys. 14.62). Oto one (środki obrotu o 60 stopni zostały zaznaczone małymi kółkami wypełnionymi szarym kolorem):



typ $p6$

Rys. 14.61



typ $p6m$

Rys. 14.62

W następującej tabeli mamy zebrane własności tych ostatnich dwóch tapet.

Typ tapety	Własności
$p6$	1) Istnieją środki obrotów o 60°, 120° i o 180° (środki symetrii); 2) nie istnieją osie symetrii; 3) nie istnieją osie poślizgowe.
$p6m$	1) Istnieją środki obrotów o 60°, 120° i o 180° (środki symetrii); 2) istnieje 6 kierunków osi symetrii; 3) istnieje 6 kierunków osi poślizgowych.

Mamy więc 17 rodzajów tapet. Uczniowie na ogół sami znajdują nieco ponad połowę, a z podpowiedziami czasem trochę więcej. Po omówieniu wszystkich typów rozszerzamy temat pracy projektowej ze szlaczków także na tapety. Zasady są takie same. Każda tapeta powinna być starannie narysowana i opisana. Następnie oczekuję zdjęć wykonanych samodzielnie lub ściągniętych z Internetu. Przy każdym zdjęciu powinien być rysunek sfotografowanej tapety z zaznaczonymi osiami symetrii (lub poślizgowymi) i środkami obrotu. Najlepiej, jeśli są one narysowane różnymi kolorami. Rysunki te w I klasie uczniowie najczęściej robią ręcznie. W II klasie, gdy na lekcjach informatyki nauczą się korzystania z programów graficznych, w tym z bardzo ważnego programu do konstrukcji geometrycznych, będą mogli wykonać odpowiednie rysunki za pomocą komputera. Można też wziąć zdjęcie, przerobić je na zdjęcie z odcieniami szarości zamiast kolorów, na tak spreparowanym zdjęciu narysować kolorami osie i środki obrotów i wreszcie wskanować je. Wreszcie powinna też znaleźć się strona wyjaśniająca stosowane oznaczenia (np. użyte kolory). Obowiązkiem uczniów korzystających z Internetu jest w każdym przypadku zaznaczenie, z jakich stron zostały wzięte wykorzystane ilustracje. Taka praca, mająca kilkadziesiąt stron, bardzo ładnie się prezentuje — zwłaszcza, jeśli została w całości wykonana za pomocą komputera.

Celem tego projektu, oprócz nauczenia symetrii i dobrego wprowadzenia do pojęcia przekształcenia geometrycznego, jest nauczenie starannego obserwowania otaczającej nas rzeczywistości. Uczniowie sami się dziwią, jak wielu rzeczy przedtem wokół siebie nie dostrzegali. Patrzyli, nie dostrzegając. Chodzi mi o to, by nauczyć moich uczniów zauważania matematyki wszędzie tam, gdzie ona się pojawia. Następnie ważne jest staranne analizowanie tapety — tak, by możliwe było bezbłędne rozpoznanie jej typu. Daję uczniom zestawienie wszystkich tapet oraz klucz do rozpoznawania typu tapety. Chodzi mi o to, by kierując się dostarczonymi wzorami i kluczem, umieli prawidłowo zakwalifikować tapetę do danego typu.

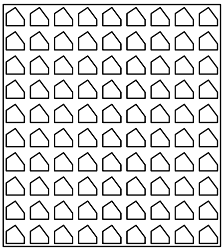
Nie bez znaczenia jest to, że wskazuję uczniom związek matematyki ze sztuką. Symetrie zawsze odgrywały ważną rolę w sztuce, zwłaszcza w architekturze. Szlaczki i tapety także były wielokrotnie wykorzystywane. Ich obecność w sztuce nie jest przypadkowa. Twórcy byli wielokrotnie zafascynowani prawidłowościami matematycznymi i celowo włączali te prawidłowości, zwłaszcza geometryczne, w swoją twórczość artystyczną.

Wreszcie przychodzi czas na sprawdzian. Mam przygotowany drugi zestaw tapet, z którego — po włączeniu dodatkowych trzech tapet, by otrzymać w pełni wypełnioną 20 wzorami kartkę — robię zestaw klasówkowy. Uczniowie mają prawo korzystać z kartki z 17 przykładami i z klucza. Ich zadaniem jest poprawne zidentyfikowanie 20 tapet. Okazuje się, że najlepsi uczniowie w klasie robią tę klasówkę bezbłędnie, natomiast wszyscy potrafią poprawnie zidentyfikować ponad połowę tapet.

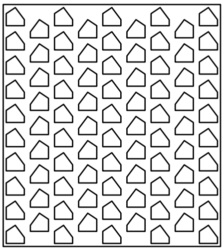
Na następnych pięciu stronach zamieszczam:

- zestaw 17 tapet, które były omówione w tekście (rys. 14.63);
- klucz do rozpoznawania rodzaju tapety (rys. 14.64);
- drugi zestaw 17 tapet, z którego tworzę zestaw klasówkowy (rys. 14.65);
- zestaw klasówkowy zawierający, oprócz 17 tapet zestawu drugiego, trzy dodatkowe tapety typów pm, $p2$ i $p4m$ umieszczone w najniższym wierszu (rys. 14.66);
- trzeci zestaw 17 tapet; każda z tych tapet powstaje przez podział całej płaszczyzny na jednakowe kawałki (czasem odbite symetrycznie) (rys. 14.67);
- kartkę z siecią trójkątną do rysowania tapet ostatnich pięciu typów (rys. 14.68).

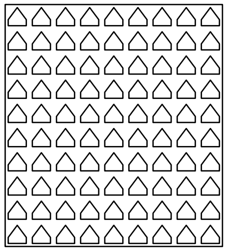
Na zakończenie opisu tego projektu podaję kilka wskazówek, gdzie można szukać informacji o szlaczkach i tapetach. W Internecie można szukać haseł typu: *wallpaper patterns*, *wallpaper groups*, *crystallographic groups*, *frieze patterns*. Istnieje wiele interesujących stron, na których można znaleźć wiele rysunków tapet. Istnieją także programy do tworzenia własnych tapet na podstawie jednego wzoru, który ma się powtarzać zgodnie z wybranym typem tapety. Warto również przyjrzeć się ornamentom w architekturze, zwłaszcza w sztuce islamu. Szczególnie piękne są ściany wykładane kafelkami w pałacach Alhambra w Granadzie i Alkazar w Sewilli. Polecam również grafiki holenderskiego artysty M. C. Eschera. Wiele albumów z jego grafikami jest dostępnych na rynku. Grafiki Eschera można znaleźć na specjalnej stornie internetowej poświęconej jego twórczości ([Escher]). Szczególnie warto przejrzeć album o tych grafikach napisany, z punktu widzenia matematyki, przez D. Schattschneider. Polecam też jej artykuł na temat tapet w *American Mathematical Monthly* (zob. [Schattschneider-1] i [Schattschneider-2]).



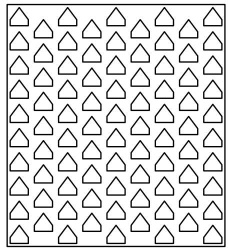
typ $p1$



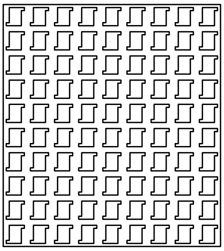
typ pg



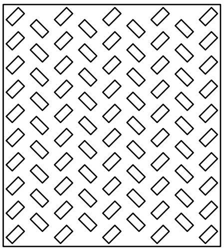
typ pm



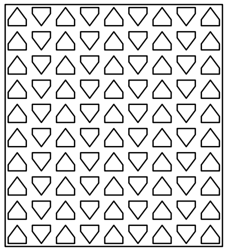
typ cm



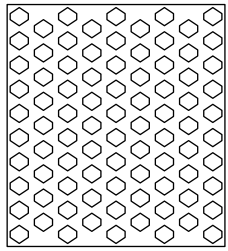
typ $p2$



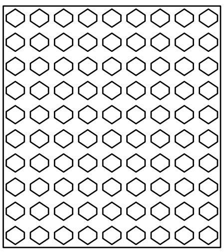
typ pgg



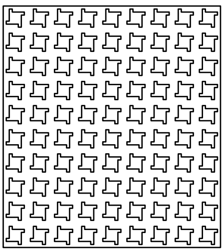
typ pmg



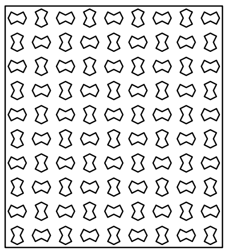
typ cmm



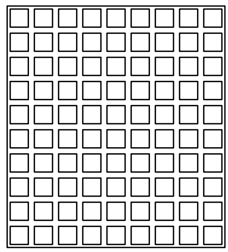
typ pmm



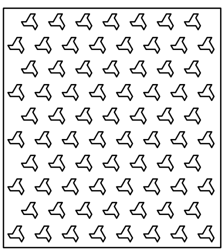
typ $p4$



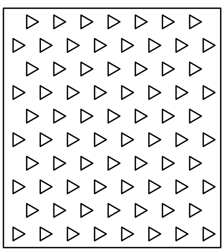
typ $p4g$



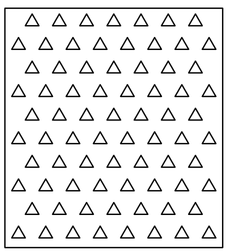
typ $p4m$



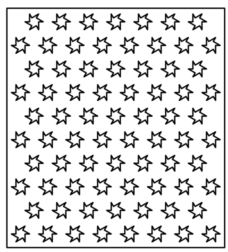
typ $p3$



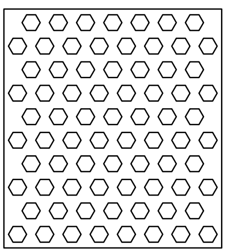
typ $p31m$



typ $p3m1$



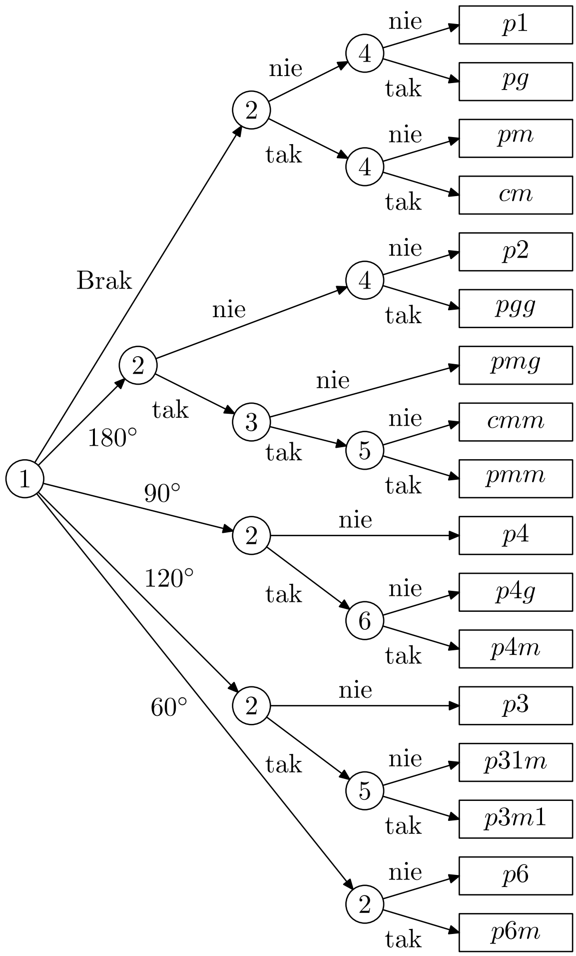
typ $p6$



typ $p6m$

Rys. 14.63

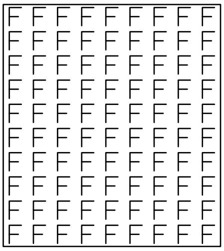
Klucz do rozpoznawania typu tapety



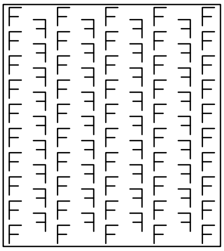
Rys. 14.64

Pytania:

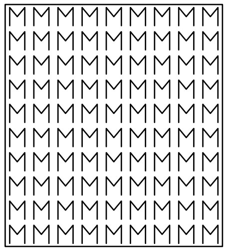
1) Jaki jest najmniejszy obrót?
2) Czy istnieje oś symetrii?
3) Czy istnieją nierównoległe osie symetrii?
4) Czy istnieje właściwa oś poślizgowa?
5) Czy środki obrotu leżą tylko na osiach symetrii?
6) Czy istnieją osie symetrii przecinające się pod kątem 45°?



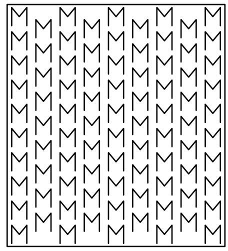
typ $p1$



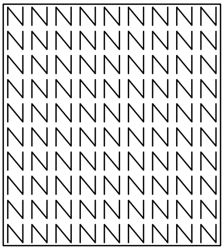
typ pg



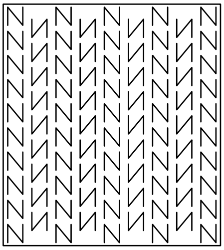
typ pm



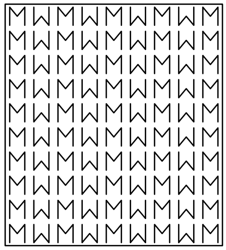
typ cm



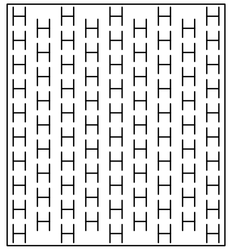
typ $p2$



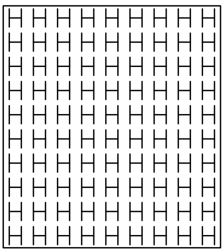
typ pgg



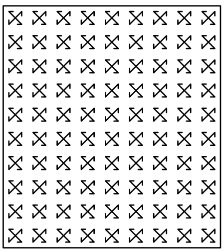
typ pmg



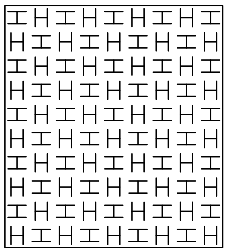
typ cmm



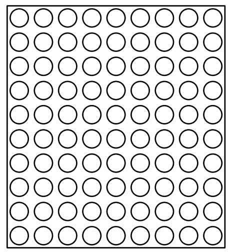
typ pmm



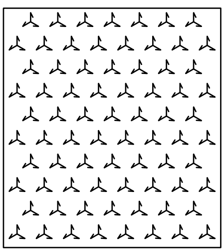
typ $p4$



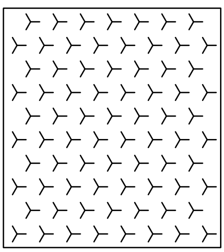
typ $p4g$



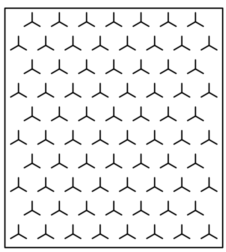
typ $p4m$



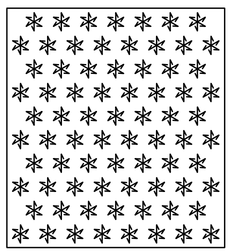
typ $p3$



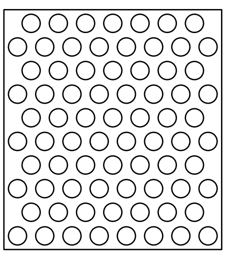
typ $p31m$



typ $p3m1$

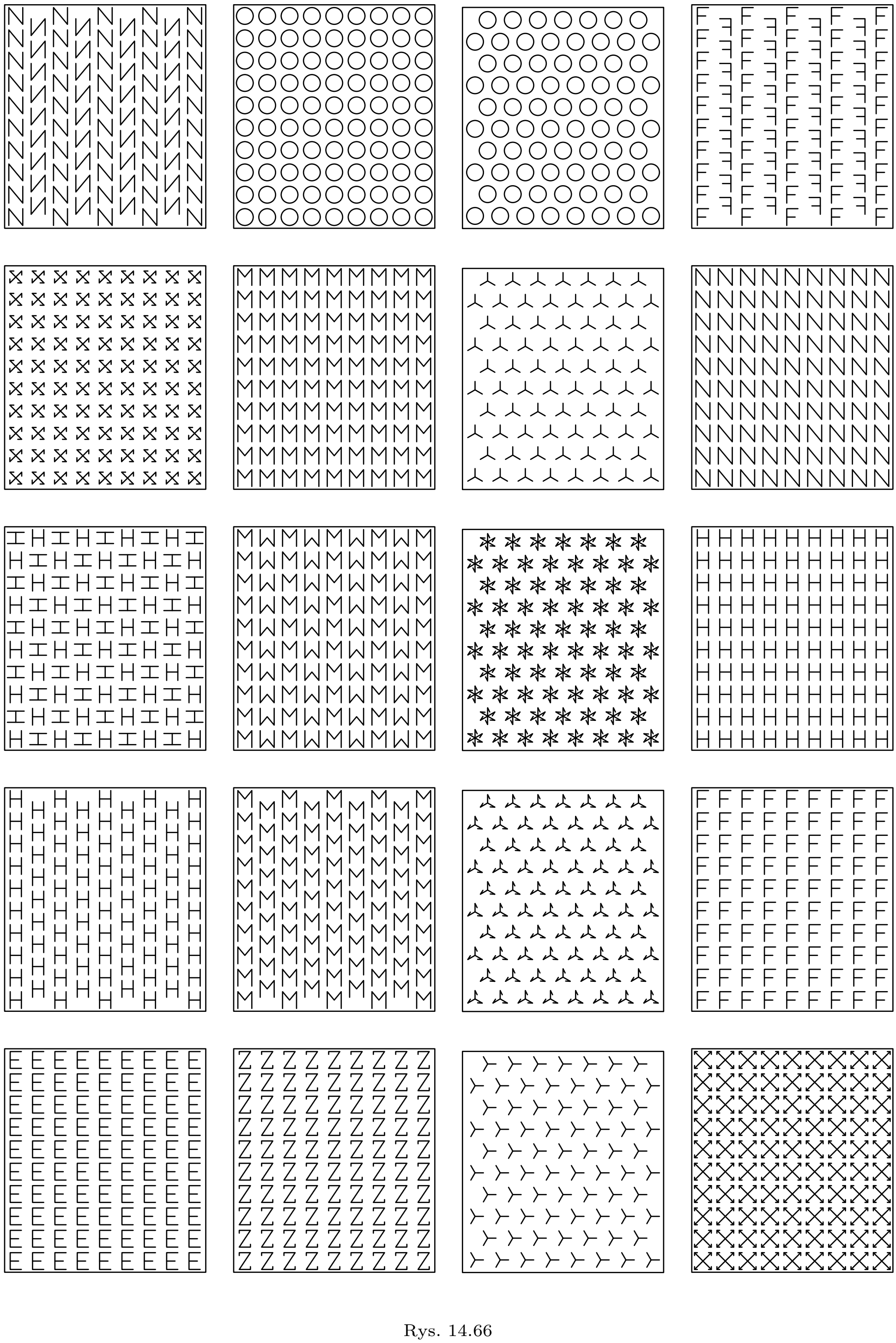


typ $p6$

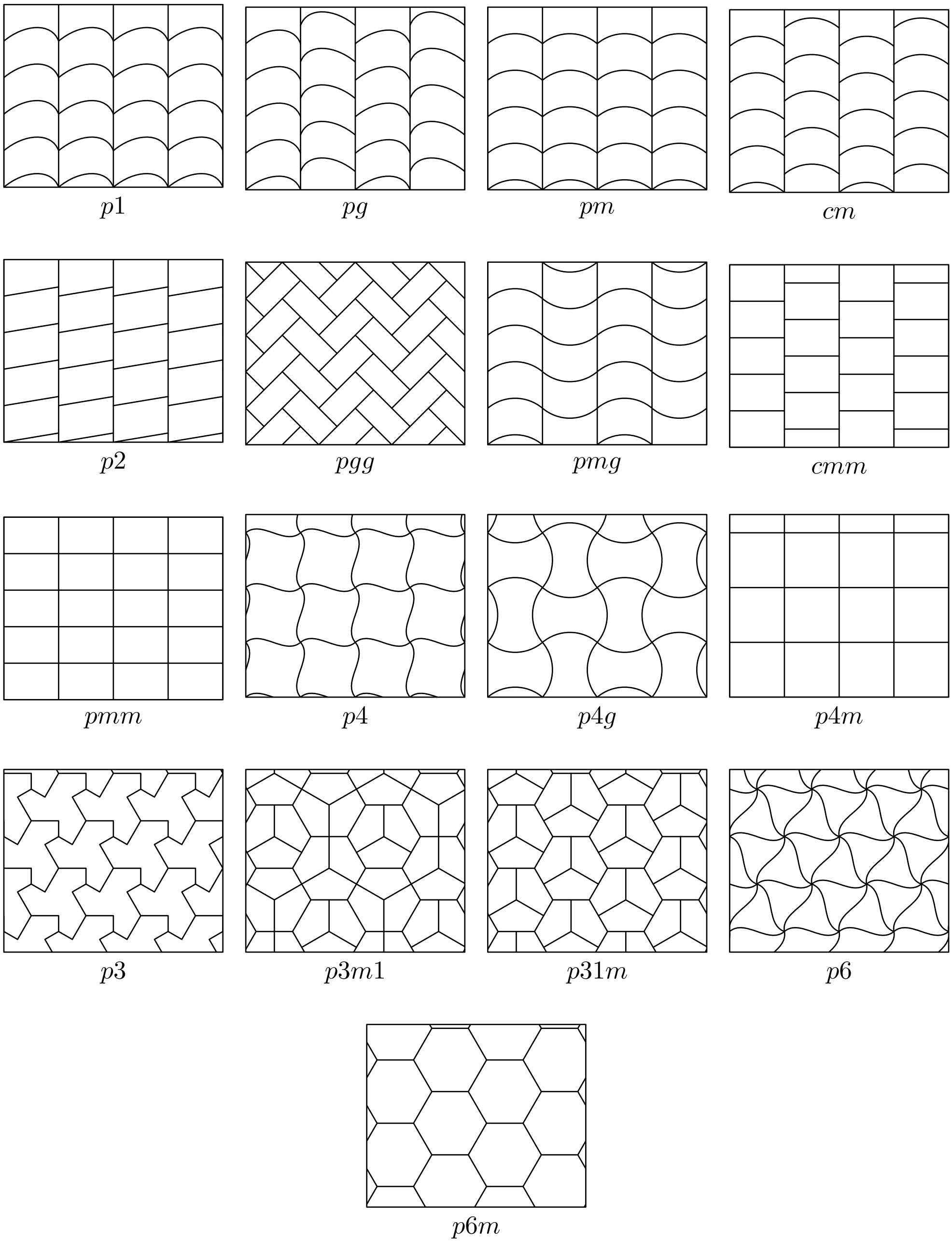


typ $p6m$

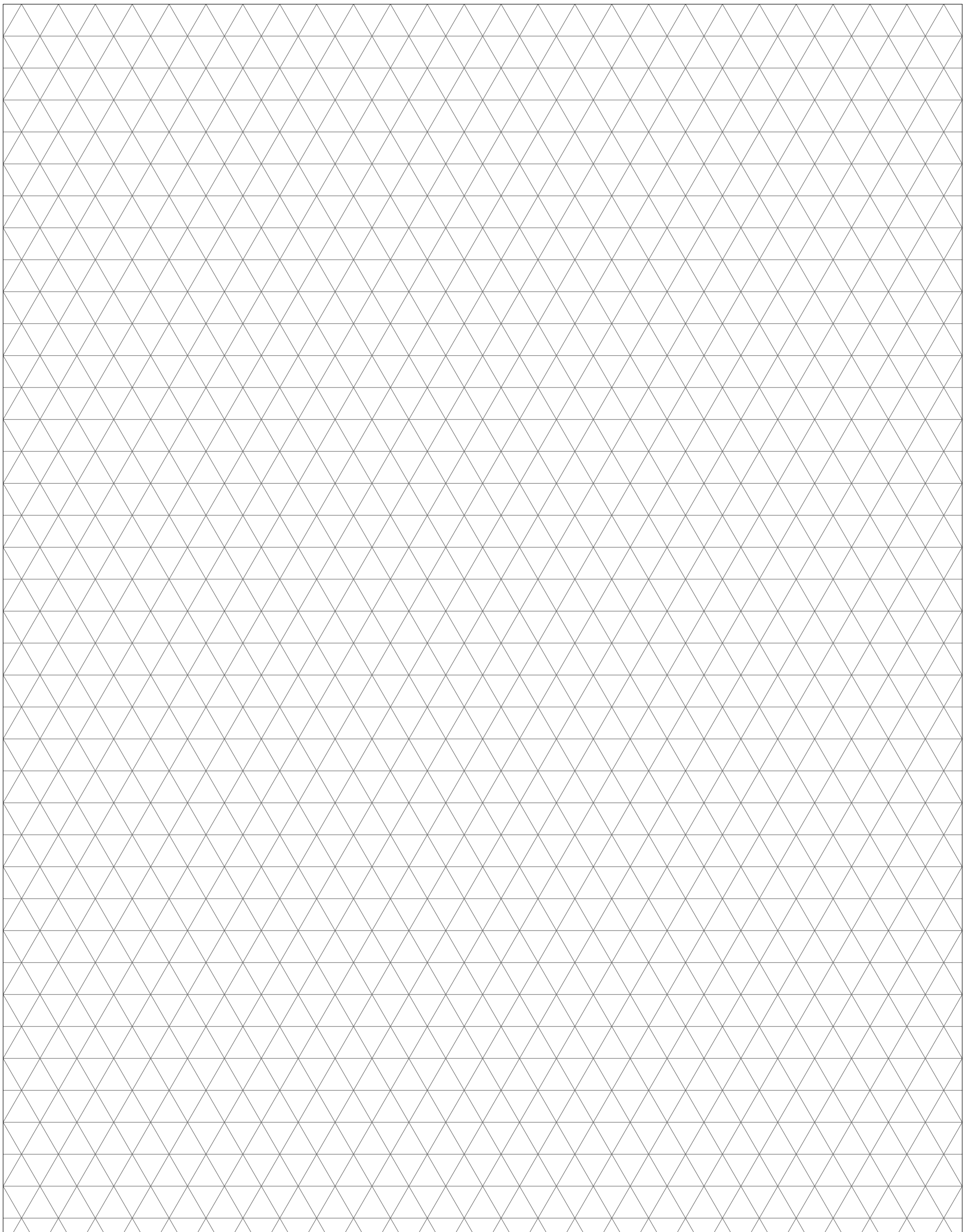
Rys. 14.65



Rys. 14.66



Rys. 14.67



Rys. 14.68

Część II — okna gotyckie

Drugi projekt, który chcę tu opisać, jest też związany ze sztuką. Tym razem będziemy analizować geometrię okien gotyckich. Ponieważ tej tematyce poświęciłem osobną publikację [Guzicki-2] oraz cykl artykułów w czasopiśmie *Delta* [Guzicki-Δ], więc tutaj zagadnienia matematyczne z tym tematem związane potraktuję bardzo skrótowo, koncentrując się na dydaktycznej stronie zagadnienia.

Projekt, który uczniowie wykonują, polega na przedstawieniu analizy wybranego okna gotyckiego. Praca nad projektem rozpoczyna się od wykładu, na którym pokazuję uczniom zdjęcia okien gotyckich i wyjaśniam podstawowe zasady tworzenia takich okien. Następnie daję uczniom kilka zadań przygotowawczych do rozwiązania, a następnie z całą grupą uczniów omawiam te rozwiązania. Wtedy dzielę uczniów na zespoły (najczęściej od 2 do 4 osób). Każdy zespół otrzymuje zdjęcie okna. Uczniowie, pracujący razem, mają narysować takie okno za pomocą odpowiedniego programu komputerowego, opisać wykonaną konstrukcję i (na ogół) wykonać obliczenia wielkości pewnych elementów okna.

Dwukrotnie organizowaliśmy takie prace projektowe w czasie wymiany zagranicznej, raz ze szkołą w Coimbrze w Portugalii, drugi raz ze szkołą w Kolonii w Niemczech. W takim przypadku po wykładzie i zadaniach wstępnych zwiedzaliśmy kościół gotycki, któremu poświęcony był projekt (kościół klasztoru Batalha w Portugalii i katedra w Kolonii). Uczniowie wyszukiwali „swoje” okna, fotografowali je i następnego dnia przystępowali do pracy.

Ostatecznym efektem pracy są plakaty lub książeczka, w której zawarte jest łączne opracowanie zespołu okien. Na plakacie powinno znajdować się zdjęcie okna i często odręczny rysunek tego okna. Zdjęcie okna zostaje następnie wydrukowane jako czarno-białe, z różnymi odcieniami szarości. Na takim zdjęciu uczniowie zaznaczają kolorową linią te elementy okna, które będą podlegały analizie. Z reguły bowiem okno jest na tyle skomplikowane, że tylko najważniejsze elementy konstrukcji będą rysowane przez uczniów. Następnie seria rysunków (wraz z niewielkimi opisami, ponieważ na plakacie takie opisy są mało czytelne) pokazuje sposób konstruowania okna. Czasami uczniowie umieszczają również na plakacie wyniki obliczeń, bo same obliczenia są zbyt długie, by je przytoczyć.

Kilkakrotnie wymagałem od uczniów, by ostatecznym efektem pracy było opracowanie zestawiające efekty pracy całej klasy (czy grupy uczniów). Każdy zespół w swojej części umieszczał oczywiście na początku zdjęcie swojego okna i ostateczny rysunek komputerowy. To pokazywało dokładnie, jakie elementy okna są analizowane i na ile taka analiza jest dokładna, na ile rysunek komputerowy odpowiada rzeczywistości. Następnie uczniowie pokazywali na kolejnych stronach poszczególne kroki konstrukcji, opisując je tym razem dokładnie. Po zakończeniu konstrukcji (lub przed nią, jeśli jest to konieczne do konstrukcji) przedstawiali obliczenia wielkości różnych elementów okna. Prace wszystkich zespołów były następnie zbierane razem i drukowane jako jedna całość. Taka książeczka z analizą kilkunastu maswerków zamku w Malborku, wykonana przez grupę kilkunastu uczniów Gimnazjum Przymierza Rodzin, miała ponad 100 stron druku. Każdy uczeń biorący udział w projekcie otrzymał tę książeczkę na pamiątkę.

Projekt kończy się publiczną prezentacją. Uczniowie przygotowujący plakaty omawiają je. Uczniowie przygotowujący książeczkę muszą także przygotować prezentacje komputerowe. Staram się, by taka prezentacja odbyła się w obecności rodziców uczniów. Wtedy książeczki przygotowane przez uczniów najpierw wręczamy rodzicom.

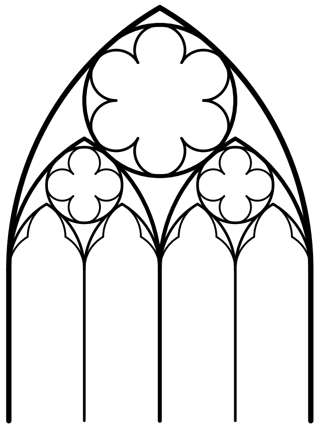
Przygotowanie takiego projektu przez całą klasę trwa zazwyczaj kilka tygodni. Moim zdaniem, najlepszym czasem do tego jest okres po egzaminie gimnazjalnym i przed zakończeniem roku szkolnego. Uczniowie umieją wtedy naprawdę bardzo dużo i praca nad projektem jest doskonałym ukoronowaniem trzyletniej nauki. Parę słów należy powiedzieć o oprogramowaniu komputerowym. Uczniowie korzystają na ogół z programu *Word*, w którym piszą cały tekst, łącznie ze wzorami matematycznymi. Oczywiście na lekcjach informatyki muszą być zapoznani nie tylko z obsługą tego programu, ale także z tym, jak zapisać w nim wzory. Niestety ten program naprawdę nie umożliwia ładnych wydruków, zwłaszcza w przypadku tekstu matematycznego. Miałem okazję pracować z niewielką grupą uczniów Gimnazjum im. Staszica, którzy na lekcji informatyki byli nauczeni (przez praktykantkę — studentkę matematyki) podstaw systemu TEX, systemu komputerowego zaprojektowanego przez D. Knutha, specjalnie do składania tekstów matematycznych (ten poradnik jest pisany właśnie w systemie TEX). Ich praca projektowa (analiza sześciu okien katedry gotyckiej w Pelplinie) wyglądała naprawdę profesjonalnie.

Rysunki są tworzone za pomocą programu do konstrukcji geometrycznych. Na polskim rynku dość popularny jest program *Cabri*, jest on jednak drogi. Istnieją programy bezpłatne o podobnych możliwościach. Ja korzystałem z programu *C.a.R.* (skrót od angielskiego *Compass and Ruler* — czyli Cyrkiel i Linijka; nazwa oryginalna *Z.u.L.* pochodzi od analogicznych słów niemieckich) ściągniętego za darmo z Internetu. Istnieje też polska wersja językowa tego programu. Podstawowe możliwości tego programu to: rysowanie punktów (umieszczonych w dowolnym miejscu lub związanych z daną linią, a więc umieszczonych na danej prostej, na danym odcinku czy na danym okręgu), rysowanie prostych i okręgów (na przykład rysowanie prostej przechodzącej przez dwa punkty czy dla danych trzech punktów A, B i C rysowanie okręgu o środku w punkcie A i promieniu długości BC), rysowanie prostych równoległych i prostopadłych, symetralnych odcinków i dwusiecznych kątów, rysowanie łuków oraz wreszcie znajdowanie punktów przecięcia narysowanych linii i usuwanie z rysunku (ale nie z pamięci programu) zbędnych fragmentów narysowanych linii. Możliwości programu *C.a.R.* są zresztą znacznie większe. Zrobione rysunki mogą być zapamiętane w wielu formatach tak, że odpowiedni z nich może być łatwo wklejony do tekstu napisanego w *Wordzie*. Uczniowie uczą się wcześniej na lekcji informatyki, jak korzystać z tego programu; jak można się spodziewać, po kilku lekcjach sami wynajdują takie możliwości programu, o których nam nauczycielom nawet się nie śniło…

Uczniowie, którzy uczą się systemu TEX, mogą także nauczyć się rysowania za pomocą programu *MetaPost*; tego programu używałem do robienia rysunków w tym poradniku.

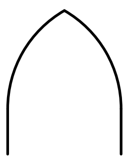
Przejdę teraz do geometrii. Najpierw przedstawię te wiadomości o oknach gotyckich, które podaję uczniom na wykładzie wstępnym, potem pokażę zadania przygotowawcze i omówię ich rozwiązania, a następnie pokażę przykładową konstrukcję okna wraz z opisem. W rozwiązaniach zadań przygotowawczych będą zarówno przeprowadzone obliczenia wielkości występujących w rozważanych oknach, jak i omówione metody konstrukcji.

Okno gotyckie było zazwyczaj wypełnione delikatną konstrukcją kamienną (nazywaną maswerkiem), stanowiącą najczęściej ramy dla wypełniającego okno witraża. Z czasem sam maswerk stał się osobnym dziełem sztuki, dziełem o bardzo matematycznej strukturze. Przyjrzyjmy się przykładowemu oknu gotyckiemu (rys. 14.69). Jest to opisane dokładnie w *Delcie* jedno z okien paryskiej katedry Notre Dame. Oto ono (samego zdjęcia tu nie zamieszczam, wiele zdjęć okien gotyckich można znaleźć na stronie SEM zawierającej ilustracje do mojej książeczki [Guzicki-2]):

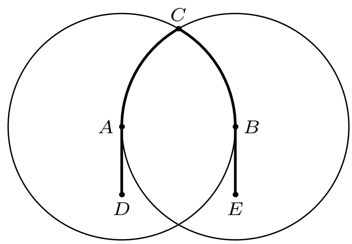


Rys. 14.69

Jest to okno ostrołukowe (rys. 14.70); ostrołuk jest jednym z elementów charakteryzujących styl gotycki. Jak ostrołuk jest zbudowany? Otóż ostrołuk składa się z jednakowych łuków dwóch takich samych okręgów (rys. 14.71).

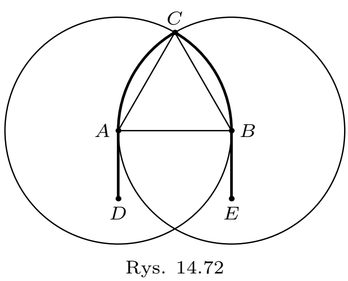


Rys. 14.70

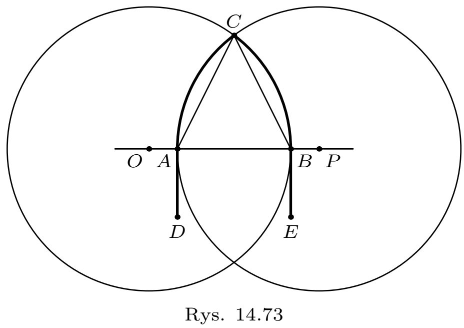


Rys. 14.71

Lewa strona ostrołuku, łuk AC, jest łukiem okręgu o środku w punkcie B. Podobnie prawa strona, łuk BC, jest łukiem okręgu o środku w punkcie A. Odcinki AD i BE stanowią część obramowania dolnej prostokątnej części okna. Jak z tego wynika, trójkąt ABC jest równoboczny (rys. 14.72). Taki ostrołuk nazywamy klasycznym. Konstrukcja takiego ostrołuku jest oczywista — jest to po prostu konstrukcja trójkąta równobocznego. Ostrołuki mogą też być wyższe, ostrzejsze (rys. 14.73).



Rys. 14.72



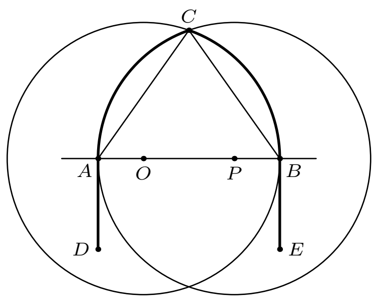
Rys. 14.73

Lewa strona ostrołuku, łuk AC, jest łukiem okręgu o środku w punkcie P. Prawa strona, łuk BC, jest łukiem okręgu o środku w punkcie O. Zauważmy, że środki O i P leżą na prostej AB, nazywanej podstawą ostrołuku, na zewnątrz odcinka AB. Można zauważyć, że punkt O leży także na symetralnej odcinka BC, a punkt P leży na symetralnej odcinka AC. Ta obserwacja pokazuje sposób konstrukcji takiego ostrołuku za pomocą cyrkla i linijki (lub za pomocą odpowiedniego programu komputerowego). Wybieramy najpierw trójkąt ABC, a więc rozmiary ostrołuku: jego podstawę AB i wysokość. Następnie znajdujemy środki okręgów O i P jako punkty przecięcia prostej AB z symetralnymi boków BC i AC trójkąta ABC i wreszcie rysujemy odpowiednie łuki.

Wybór rodzaju trójkąta ABC (równoboczny lub nie) należał do artysty. Na rysunku 14.73 trójkąt ABC został wybrany tak, by jego wysokość była równa podstawie. Jest to dość częsty wybór. Takie są na przykład niektóre maswerki krużganka Wysokiego Zamku w Malborku (zob. rys. 14.105 i dalsze).

Konstrukcję takiego ostrołuku można też zacząć inaczej, wybierając najpierw oba środki O i P okręgów na zewnątrz podstawy AB. Zobaczymy dalej ostrołuk wysoki, w którym $OA = AB = BP$.

Ostrołuk może też być niższy i szerszy (rys. 14.74).



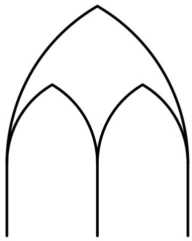
Rys. 14.74

Znów lewa strona ostrołuku, łuk AC, jest łukiem okręgu o środku w punkcie P, a prawa strona, łuk BC, jest łukiem okręgu o środku w punkcie O. Zauważmy, że środki O i P nadal leżą na prostej AB, podstawie ostrołuku, ale tym razem znajdują się wewnątrz odcinka AB. Tak jak poprzednio, leżą one na symetralnych ramion trójkąta równoramiennego ABC.

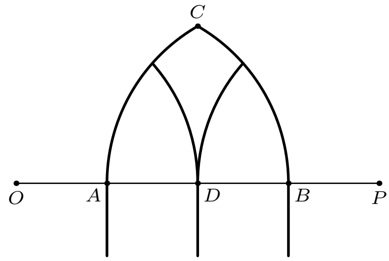
Konstrukcję ostrołuku szerokiego możemy zacząć od narysowania trójkąta ABC lub od wyboru punktów O i P na podstawie AB. Na powyższym rysunku punkty O i P zostały wybrane tak, by $AO = PB = \frac{1}{4} \cdot AB$.

W ten ostrołuk wpisywano następnie mniejsze ostrołuki. Najczęściej były one oparte na tej samej podstawie. Niekiedy zdarzało się, że (zwłaszcza, gdy było ich więcej) niektóre były oparte na podstawie położonej nieco niżej. Na rysunkach 14.75 i 14.76 widzimy dwa przykłady wpisania mniejszych ostrołuków w większy. Ostrołuki na rysunku 14.75 są dokładnie dwa razy mniejsze od dużego ostrołuku. Ostrołuki wysokie na rysunku 14.76 powstały dokładnie tak jak to opisałem poprzednio: punkty O i P są środkami okręgów, których fragmentami są łuki znajdujące się wewnątrz ostrołuku. Ponadto

$$OA = AD = DB = BP.$$

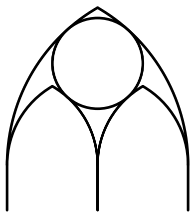


Rys. 14.75

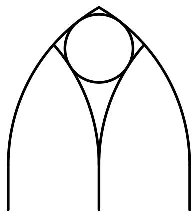


Rys. 14.76

Przestrzeń wewnątrz ostrołuku, nad mniejszymi ostrołukami, wypełniano najczęściej okręgami. Popatrzmy na dwa przykłady takich maswerków, powstałych przez wpisanie okręgów w powyższych dwóch ostrołukach (rys. 14.77 i 14.78).

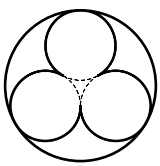


Rys. 14.77

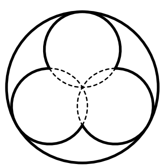


Rys. 14.78

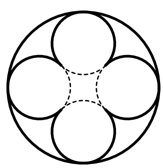
Wreszcie w okręgi wpisywano wieloliście. Oto dwa przykłady trójliści (rys. 14.79 i 14.80), dwa przykłady czteroliści (rys. 14.81 i 14.82) i przykład sześcioliścia (rys. 14.83).



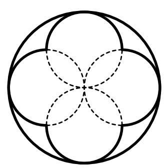
Rys. 14.79



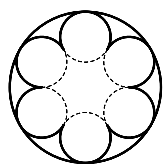
Rys. 14.80



Rys. 14.81



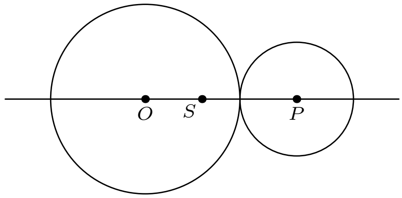
Rys. 14.82



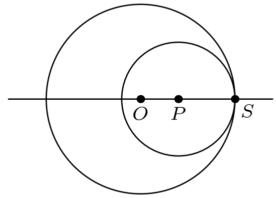
Rys. 14.83

Zauważmy (na przykładzie trójliści i czteroliści), że są dwa podstawowe sposoby tworzenia takich wieloliści. Pierwszy sposób polega na wpisaniu w okrąg serii mniejszych okręgów stycznych do niego wewnętrznie i kolejno stycznych do siebie zewnętrznie. Drugi sposób polega na wpisaniu serii okręgów stycznych wewnętrznie do dużego okręgu i przechodzących przez środek tego okręgu.

Tyle podstawowych zasad geometrii maswerków gotyckich. Wiele dodatkowych informacji uczniowie otrzymają w trakcie pracy nad projektami. Teraz trzeba powiedzieć kilka słów, co uczniowie powinni wiedzieć z geometrii, by móc rozpocząć pracę — na razie nad zadaniami przygotowawczymi. Otóż wielokrotnie będzie stosowane twierdzenie Pitagorasa. Ponadto trzeba przypomnieć uczniom własności okręgów stycznych. Mianowicie, jeśli dwa okręgi są styczne (zewnętrznie lub wewnętrznie), to ich środki i punkt styczności są współliniowe. Oto przypadek okręgów stycznych zewnętrznie (rys. 14.84) oraz przypadek okręgów stycznych wewnętrznie (rys. 14.85).



Rys. 14.84



Rys. 14.85

W obu przypadkach środki O i P oraz punkt styczności S są współliniowe.

Po tym wstępie przechodzimy do zadań przygotowawczych. Te zadania mają uczniom pokazać, w jaki sposób możemy obliczać różne długości oraz w jaki sposób możemy pewne figury geometryczne skonstruować (za pomocą cyrkla i linijki lub za pomocą programu komputerowego). Należy przy tym pamiętać, że przeprowadzone obliczenie może podpowiedzieć sposób konstrukcji, którego przedtem nie widzieliśmy. Konstruujemy oddzielnie odcinki potrzebnych długości i potem z tych odcinków budujemy żądaną figurę geometryczną. Taki sposób konstruowania jest nazywany algebraicznym. Zobaczymy także sposoby konstrukcji wykorzystujące wyłącznie geometryczne własności rysowanych figur. Zwrócę również uwagę na konstrukcje metodami przybliżonymi czy metodami prób i błędów, szczególnie łatwo wykonywanymi za pomocą komputera. Mianowicie konstrukcje dokładne wymagają czasem metod, które dla gimnazjalisty są na ogół za trudne. Na przykład, wiele zadań wymaga skonstruowania okręgu stycznego do trzech danych okręgów lub do dwóch okręgów i prostej. W ogólności jest to tzw. zadanie Apoloniusza. Wprawdzie to zadanie było prawdopodobnie rozwiązane w starożytności przez Pappusa, ale jego rozwiązanie nie dochowało się do naszych czasów. Pierwsze rozwiązania nowożytne pochodzą z końca XVI wieku, prawdopodobnie nie były więc znane budowniczym średniowiecznych katedr. Albo więc używali metod algebraicznych, co jest raczej wątpliwe, albo stosowali metody przybliżone, w tym metodę prób i błędów. Ewentualne niedokładności ukrywali dzięki grubości łuków kamiennych. To, że musieli oni stosować metody przybliżone, jest pewne — zdarzają się maswerki, których dokładne skonstruowanie za pomocą cyrkla i linijki nie jest możliwe, na przykład maswerki, w których zdarzają się siedmioliście czy dziewięcioliście. Więcej takich przykładów można znaleźć w mojej pracy [Guzicki-2]. Konstrukcje metodą prób i błędów są szczególnie łatwe do wykonania za pomocą programu komputerowego *C.a.R.* W tym programie można najechać myszką na jeden z punktów początkowych konstrukcji, „złapać” go naciskając prawy klawisz myszki i przeciągnąć w inne miejsce. Cała konstrukcja zmienia się wraz z położeniem tego punktu. Można zatem złapać środek okręgu i tak go przemieszczać, by wreszcie był on styczny do danych okręgów.

Oto pierwsze zadanie:

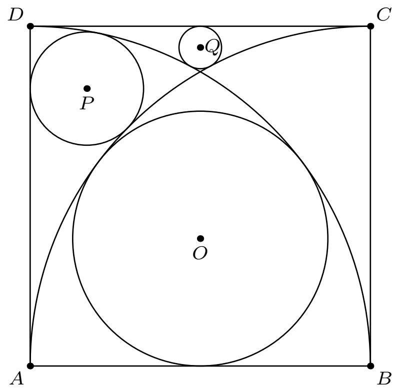
Zadanie 1. Dany jest kwadrat $ABCD$. Łuki BC i AC są łukami okręgów o środkach odpowiednio A i B i promieniach równych bokowi AB kwadratu. Te łuki dzielą kwadrat na cztery części (rys. 14.86). Narysuj okręgi wpisane w te części.

Sformułujmy to zadanie dokładniej.

- Niech O będzie środkiem okręgu stycznego do prostej AB i stycznego wewnętrznie do obu okręgów o środkach A i B.
- Niech P będzie środkiem okręgu stycznego do prostej AD, stycznego wewnętrznie do okręgu o środku A i stycznego zewnętrznie do okręgu o środku B.

- Niech Q będzie środkiem okręgu stycznego do prostej CDi stycznego zewnętrznie do obu okręgów o środkach A i B.

Dana jest długość b boku kwadratu $ABCD$. Oblicz promienie okręgów o środkach O, P i Q. Oblicz, w jakich odległościach od boków kwadratu leżą te środki O, P i Q. W jaki sposób można skonstruować te okręgi za pomocą cyrkla i linijki?



Rys. 14.86

Rozwiązanie. Najpierw obliczamy promień okręgu o środku O oraz odległości punktu O od boków kwadratu. Niech S będzie punktem styczności okręgu o środku O i okręgu o środku A. Punkty A, O i S są współliniowe. Niech M będzie punktem styczności okręgu o środku O z prostą AB (rys. 14.87). Ze względu na symetrię całej figury, punkt M jest środkiem odcinka AB. Niech r będzie promieniem okręgu o środku O, tzn. pierwszym promieniem, który mamy obliczyć.

Teraz

$$AM = \frac{b}{2}, \quad OM = r, \quad AO = b - r$$

i z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta AMO otrzymujemy:

$$AM^2 + OM^2 = AO^2,$$

czyli

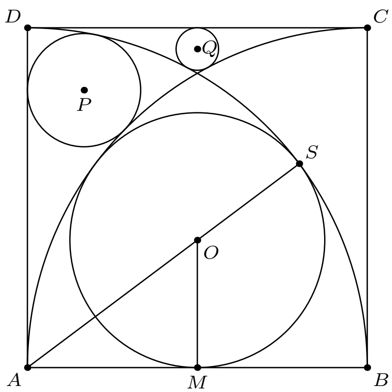
$$\left(\frac{b}{2}\right)^2 + r^2 = (b-r)^2.$$

Upraszczając otrzymane równanie, dostajemy kolejno:

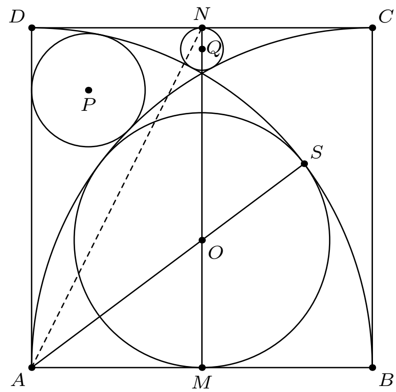
$$\begin{aligned} \frac{b^2}{4} + r^2 &= b^2 - 2br + r^2, \\ \frac{b^2}{4} &= b^2 - 2br, \\ 2br &= \frac{3b^2}{4}, \\ 8br &= 3b^2, \\ r &= \frac{3b}{8}. \end{aligned}$$

Ostatecznie $AM = \frac{b}{2}$ oraz $OM = r = \frac{3b}{8}$. Oczywiście odległość punktu O od boków AD i BC jest równa $\frac{b}{2}$, a odległość od boku CD jest równa $\frac{5b}{8}$.

Skonstruowanie okręgu o środku O jest równoważne ze skonstruowaniem środka O. Promień okręgu jest bowiem równy odcinkowi OM, gdzie punkt M jest środkiem boku AB. Jedna metoda konstruowania punktu O polega na skonstruowaniu odcinka długości $r = \frac{3b}{8}$. Podział odcinka b na 8 równych części jest bardzo łatwy. Wystarczy teraz wziąć 3 takie części.



Rys. 14.87



Rys. 14.88

Zobaczmy inną konstrukcję. Niech N będzie środkiem boku CD i narysujmy odcinek MN (rys. 14.88). Jak wyżej, oznaczmy literą r promień szukanego okręgu. Wiemy już, że $AO = b - r$. Ponieważ $OM = r$ oraz $MN = b$, więc $ON = b - r$. Punkt O jest więc jednakowo oddalony od punktów A i N, leży więc na symetralnej odcinka AN. Tę symetralną łatwo skonstruować — jej przecięcie z odcinkiem MN jest szukanym punktem O. Zauważmy, że to rozumowanie tak naprawdę pokazuje, że punkt O jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABN. Konstrukcja okręgu opisanego na danym trójkącie (w szczególności środka tego okręgu) jest jedną z konstrukcji, które gimnazjalista powinien znać.

Przejdźmy teraz do drugiej części zadania.

Niech S będzie punktem styczności okręgu o środku P i okręgu o środku A. Punkty A, P i S są współliniowe. Niech T będzie punktem styczności okręgu o środku P i okręgu o środku B. Punkty B, T i P są współliniowe. Niech punkt N będzie rzutem prostokątnym punktu P na prostą AB (rys. 14.89). Niech wreszcie r będzie promieniem, którego szukamy, tzn. promieniem okręgu o środku P.

Teraz:

$$AN = r, \quad AP = b - r, \quad BN = b - r, \quad BP = b + r$$

i z twierdzenia Pitagorasa (dla trójkątów ANP i BNP) otrzymujemy

$$AP^2 - AN^2 = BP^2 - BN^2,$$

czyli

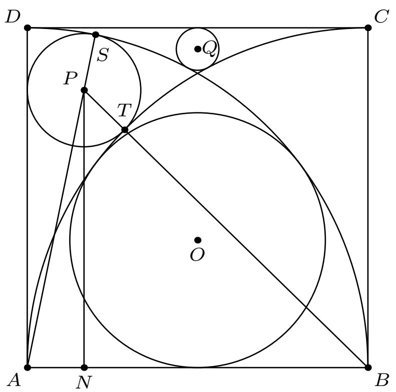
$$(b - r)^2 - r^2 = (b + r)^2 - (b - r)^2.$$

Upraszczając otrzymane równanie, otrzymujemy kolejno:

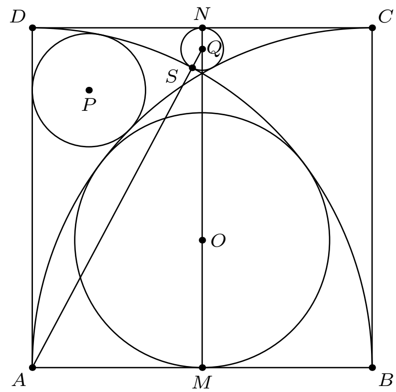
$$\begin{gathered}
b^2 - 2br + r^2 - r^2 = b^2 + 2br + r^2 - b^2 + 2br - r^2, \\
b^2 - 2br = 4br, \\
6br = b^2, \\
r = \frac{b}{6}.
\end{gathered}$$

Zatem $AN = \frac{b}{6}$. Wreszcie

$$NP = \sqrt{(b+r)^2 - (b-r)^2} = \sqrt{4br} = \sqrt{\frac{4b^2}{6}} = \frac{2b}{\sqrt{6}} = \frac{2b\sqrt{6}}{6} = \frac{b\sqrt{6}}{3}.$$



Rys. 14.89



Rys. 14.90

Skonstruowanie punktu P nie jest trudne. Wiemy, że $r = \frac{b}{6}$. Zatem $AP = \frac{5b}{6}$ oraz $BP = \frac{7b}{6}$. Punkt P jest punktem przecięcia dwóch okręgów: jednego o środku w punkcie A i promieniu $\frac{5b}{6}$ oraz drugiego o środku w punkcie B i promieniu $\frac{7b}{6}$. Skonstruowanie odcinków o długości $\frac{5b}{6}$ i $\frac{7b}{6}$ jest łatwe. Musimy umieć podzielić dany odcinek na 6 równych części. Zauważmy, że do tej konstrukcji nie jest potrzebne twierdzenie Talesa w całej ogólności, wystarczy wersja dla odcinków równych, którą omawiałem w rozdziale o geometrii trójkąta. Jeśli to zadanie rozwiązujemy w II klasie, to po prostu można tę wersję twierdzenia Talesa podać uczniom bez dowodu. Jest to bardzo prosty przypadek tzw. konstrukcji algebraicznej — konstrukcja geometryczna została poprzedzona algebraicznym obliczeniem długości odcinków potrzebnych do tej konstrukcji.

Zadanie możemy nieco przeformułować — tak, by twierdzenie Talesa nie było potrzebne. Przyjmijmy, że dany jest odcinak a oraz bok b kwadratu równy $b = 6a$. Teraz wszystkie odcinki łatwo konstruujemy z odcinka a:

$$r = a, \quad AP = 5a, \quad BP = 7a.$$

Pamiętajmy, że naszym celem jest sporządzenie rysunku. Możemy zatem tak dobrać dane, by sporządzenie rysunku było jak najłatwiejsze — za pomocą środków dostępnych w danym momencie.

Istnieje także konstrukcja bezpośrednia, motywowana wyłącznie argumentami geometrycznymi. Jednak jest to szczególny przypadek zadania Apoloniusza: tym razem mamy skonstruować okrąg styczny do dwóch danych okręgów i do jednej prostej. To zadanie wykracza — moim zdaniem — poza to, czego należy uczyć w gimnazjum, nawet w programie rozszerzonym. Oczywiście, jeśli to zadanie rozwiązuje uczeń bardzo zdolny, to można mu polecić odpowiednią lekturę i zasugerować, by nauczył się konstrukcji Apoloniusza. Może to też być interesującym tematem zajęć na kółku.

Przechodzimy do trzeciej części zadania. Niech S będzie punktem styczności okręgu o środku Q i okręgu o środku A. Punkty A, S i Q są współliniowe. Niech M będzie rzutem prostokątnym punktu Q na bok AB. Ze względu na symetrię całego rysunku, punkt M jest środkiem boku AB. Niech następnie punkt N będzie środkiem boku CD (rys. 14.90). Wreszcie niech r będzie szukanym promieniem, czyli promieniem okręgu o środku Q. Teraz:

$$AM = \frac{b}{2}, \quad QM = b - r, \quad AQ = b + r$$

i z twierdzenie Pitagorasa dla trójkąta AMQ otrzymujemy

$$AM^2 + QM^2 = AQ^2,$$

czyli

$$\left(\frac{b}{2}\right)^2 + (b-r)^2 = (b+r)^2.$$

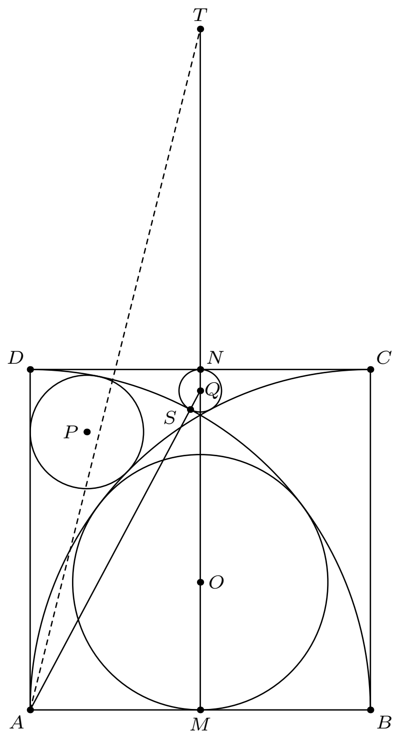
Znów upraszczamy to równanie, otrzymując kolejno:

$$\begin{aligned} \frac{b^2}{4} + b^2 - 2br + r^2 &= b^2 + 2br + r^2, \\ \frac{b^2}{4} &= 4br, \\ r &= \frac{b}{16}. \end{aligned}$$

Ostatecznie $AM = \frac{b}{2}$ oraz $QM = b - r = \frac{15b}{16}$.

Konstrukcja algebraiczna punktu Q jest oczywista. Najpierw dzielimy bok kwadratu na 16 równych części — do tego nie jest potrzebne twierdzenie Talesa, wystarczy umiejętność znajdowania środka odcinka. Punkt Q leży na odcinku MN w odległości $\frac{b}{16}$ od punktu N. Odcinek NQ jest oczywiście promieniem szukanego okręgu.

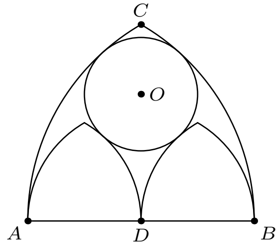
Ale tym razem także istnieje prosta konstrukcja bezpośrednia punktu Q. Mamy wówczas: $AQ = b + r$ oraz $NQ = r$. Niech T będzie takim punktem prostej MN, że $NT = b$. Wówczas $TQ = b + r$ i tak samo jak w części pierwszej naszego zadania zauważamy, że punkt Q leży w odległości $b + r$ od punktów A, B i T, a więc jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABT. Aby ten środek skonstruować, wystarczy znaleźć punkt przecięcia prostej MN z symetralną odcinka AT (rys. 14.91).



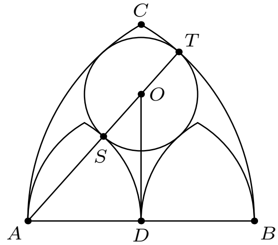
Rys. 14.91

W trzech następnych zadaniach przygotowawczych analizujemy często występujące okna gotyckie. Zaczynamy od klasycznego okna z dwoma wpisanymi ostrołukami klasycznymi.

Zadanie 2. Dany jest ostrołuk klasyczny ABC, którego podstawa AB ma długość b. Punkt D jest środkiem podstawy AB. W ten ostrołuk wpisano dwa ostrołuki klasyczne dwa razy mniejsze o podstawach AD i DB oraz okrąg styczny do czterech łuków tak jak na rysunku 14. 92. Oblicz promień r okręgu o środku O oraz długość odcinka OD. Zapisz szczegółowo konstrukcję punktu O.



Rys. 14.92

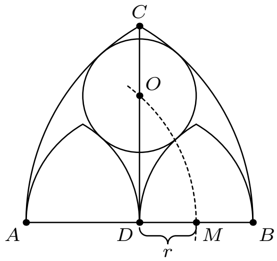


Rys. 14.93

Rozwiązanie. Niech S i T będą punktami styczności okręgu o środku O z łukami tworzącymi ostrołuki tak, jak na rysunku 14.93. Punkty A, S, O i T są współliniowe. Ponieważ $AT = b$ oraz $AS = \frac{b}{2}$, więc $ST = \frac{b}{2}$. Stąd wynika, że promień okręgu o środku O jest równy $r = \frac{b}{4}$. Długość odcinka OD obliczamy z twierdzenia Pitagorasa:

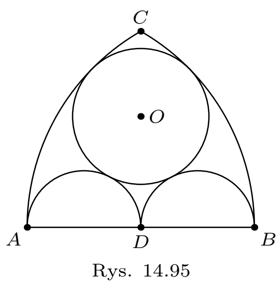
$$OD^2 = AO^2 - AD^2 = \left(\frac{3b}{4}\right)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \frac{9b^2}{16} - \frac{b^2}{4} = \frac{5b^2}{16}.$$

Stąd $OD = \frac{b\sqrt{5}}{4}$.
Konstrukcja punktu O jest bardzo prosta (rys. 14.94). Rysujemy odcinek CD. Następnie znajdujemy środek M odcinka DB i rysujemy łuk okręgu o środku A i promieniu AD aż do przecięcia z odcinkiem CD. Punkt przecięcia jest szukanym punktem O:

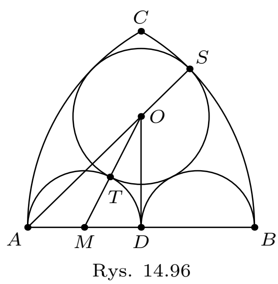


Rys. 14.94

Zadanie 3. Dany jest ostrołuk klasyczny ABC oparty na podstawie AB długości b. Punkt D jest środkiem odcinka AB. Rysujemy dwa półokręgi o średnicach AD i BD. Wreszcie rysujemy okrąg o środku O, styczny wewnętrznie do łuków AC i BC ostrołuku i styczny zewnętrznie do obu półokręgów (rys. 14.95). Oblicz promień r okręgu o środku O oraz długość odcinka OD. W jaki sposób można skonstruować punkt O?



Rys. 14.95



Rys. 14.96

Rozwiązanie. Niech S będzie punktem styczności okręgu o środku O z łukiem BC. Punkty A, O i S są współliniowe. Niech T będzie punktem styczności okręgu o środku O z półokręgiem o średnicy AD. Niech punkt M będzie środkiem odcinka AD (rys. 14.96). Punkty M, T i O są współliniowe. Mamy wówczas:

$$AD = \frac{b}{2}, \quad AO = b - r, \quad MD = \frac{b}{4}, \quad MO = \frac{b}{4} + r.$$

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkątów ADO i MDO otrzymujemy

$$AO^2 - AD^2 = MO^2 - MD^2,$$

czyli

$$(b-r)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{b}{4} + r\right)^2 - \left(\frac{b}{4}\right)^2.$$

Przekształcamy to równanie w sposób równoważny:

$$b^2 - 2br + r^2 - \frac{b^2}{4} = \frac{b^2}{16} + \frac{br}{2} + r^2 - \frac{b^2}{16},$$
$$\frac{3b^2}{4} - 2br = \frac{br}{2},$$
$$\frac{5br}{2} = \frac{3b^2}{4},$$
$$r = \frac{3b}{10}.$$

Tak więc okrąg o środku O ma promień równy $r = 0{,}3\,b$.

Następnie $AO = 0{,}7\,b$ oraz $AD = 0{,}5\,b$ i z twierdzenia Pitagorasa otrzymujemy:

$$DO = \sqrt{AO^2 - AD^2} = \sqrt{(0{,}7\,b)^2 - (0{,}5\,b)^2} = \sqrt{0{,}24\,b^2} = \sqrt{\frac{6}{25}} \cdot b = \frac{b\sqrt{6}}{5}.$$

Najprostsza konstrukcja punktu O wykorzystuje obliczoną długość promienia r (a więc jest to konstrukcja algebraiczna). Mamy wówczas $AO = 0{,}7\,b$ i bez trudu konstruujemy odcinek tej długości. Rysujemy odcinek CD. Następnie zataczamy łuk okręgu o środku A i promieniu $0{,}7\,b$ do przecięcia z odcinkiem CD. Punkt przecięcia jest szukanym punktem O.

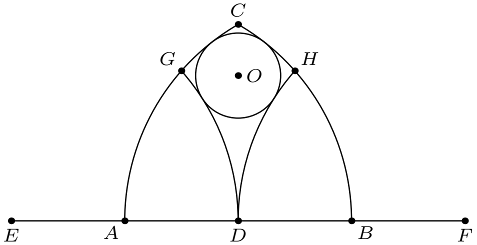
Inna konstrukcja algebraiczna polega na skonstruowaniu (za pomocą twierdzenia Pitagorasa) odcinka o długości $\frac{b\sqrt{6}}{5}$ i odłożeniu go na półprostej DC.

Wreszcie konstrukcja Apoloniusza pozwala skonstruować okrąg styczny zewnętrznie do dwóch półokręgów i wewnętrznie do okręgu o środku A. Ponieważ oba półokręgi mają jednakowe promienie, więc to zadanie Apoloniusza łatwo sprowadza się do zadania polegającego na skonstruowaniu okręgu przechodzącego przez dwa dane punkty i stycznego wewnętrznie do danego okręgu. Jednak nawet ten przypadek zadania Apoloniusza jest zbyt trudny dla gimnazjalisty.

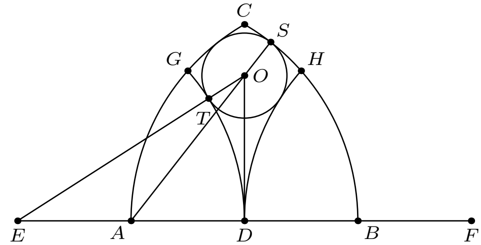
Zadanie 4. Dany jest klasyczny ostrołuk gotycki ABC, którego podstawa AB ma długość b. Punkt D jest środkiem odcinka AB. Punkty E i F leżą na prostej AB (punkt E na lewo od A, punkt F na prawo od B) tak, że

$$EA = AD = DB = BF.$$

Rysujemy łuki DG i DH tworząc dwa ostrołuki wysokie ADG i DBH. Te dwa łuki są łukami okręgów o środkach odpowiednio w punktach E i F i promieniach równych AB. Następnie rysujemy okrąg o środku w punkcie O, styczny wewnętrznie do łuków AC i BC i styczny zewnętrznie do łuków DG i DH (rys. 14.97). Oblicz promień r okręgu o środku O. Oblicz długość odcinka OD. Wyjaśnij, w jaki sposób można skonstruować okrąg o środku O.



Rys. 14.97



Rys. 14.98

Rozwiązanie. Niech S będzie punktem styczności okręgu o środku O i łuku BC. Punkty A, O i S są współliniowe. Niech T będzie punktem styczności okręgu o środku O i łuku DG. Punkty E, T i O są współliniowe (rys. 14.98). Mamy wówczas:

$$AD = \frac{b}{2}, \quad AO = b - r, \quad ED = b, \quad EO = b + r.$$

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkątów ADO i EDO otrzymujemy

$$AO^2 - AD^2 = EO^2 - ED^2,$$

czyli

$$(b-r)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2 = (b+r)^2 - b^2.$$

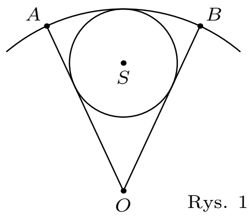
Rozwiązaniem tego równania jest $r = \frac{3b}{16}$. Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta ADO otrzymujemy łatwo $DO = \frac{b\sqrt{105}}{16}$.

Punkt O możemy skonstruować za pomocą konstrukcji algebraicznej. Zauważmy, że $AO = \frac{13b}{16}$. Punkt O jest punktem przecięcia odcinka CD z okręgiem o środku A i promieniu $\frac{13b}{16}$. Tak jak w poprzednim zadaniu, możemy także skonstruować odcinek długości $\frac{b\sqrt{105}}{16}$ lub zastosować konstrukcję Apoloniusza.

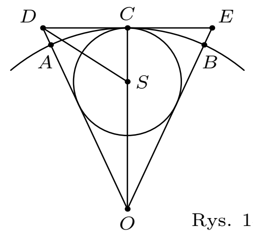
Po tych czterech zadaniach czas na komentarz. Po pierwsze, ostatnie trzy zadania są bardzo podobne. Rozwiązując je, uczniowie nabierają wprawy oraz przekonują się, że analiza prostych okien gotyckich zazwyczaj jest podobna i nie jest trudna. Widzieliśmy, że właściwie nie wymagała innych wiadomości z geometrii poza twierdzeniem Pitagorasa i twierdzeniem o współliniowości środków okręgów stycznych i punktu styczności. Oczywiście w przypadku okien bardziej skomplikowanych analogiczne obliczenia mogą być trudniejsze, mogą prowadzić nawet do równań czwartego stopnia (zob. np. [Guzicki-2] czy [Guzicki-Δ]).

Po drugie, na ogół te obliczenia pokazują proste konstrukcje algebraiczne. Tak też będzie w wielu pracach projektowych. W zadaniu pierwszym widzieliśmy natomiast, że czasem szukany punkt jest środkiem okręgu opisanego na pewnym trójkącie. Pokażę teraz prostą sytuację, w której konstrukcja będzie polegała na znalezieniu środka okręgu wpisanego w trójkąt. Będzie to konstrukcja wieloliścia. Jak pamiętamy, pierwszy rodzaj wieloliści polegał na skonstruowaniu serii okręgów kolejno stycznych do siebie zewnętrznie i stycznych wewnętrznie do okręgu ograniczającego wieloliść. Tę konstrukcję rozpoczynamy od podziału okręgu na kilka równych części. Nie ma przy tym znaczenia, w jaki sposób taki podział konstruujemy. W przypadku trójliścia i sześcioliścia możemy wykorzystać znaną metodę konstruowania sześciokąta foremnego wpisanego w okrąg. W przypadku czteroliścia rysujemy dwie prostopadłe średnice. Niektórzy uczniowie w swojej pracy projektowej muszą skonstruować pięcioliście. Jest to dobra okazja do nauczenia się jednej z wielu konstrukcji pięciokąta foremnego (zob. np. [Szurek]). W przypadku siedmioliścia lub dziewięcioliścia stosuje się konstrukcje przybliżone (program *C.a.R.* pozwala na rysowanie kątów o danej mierze). Po znalezieniu punktów podziału rysujemy promienie o końcach w tych punktach. Dzielą one koło na wycinki. Naszym celem jest wpisanie okręgu w każdy wycinek. To będą te poszukiwane okręgi.

Popatrzmy zatem na konstrukcję okręgu wpisanego w wycinek koła. Mamy dane dwa promienie OA i OB, szukamy okręgu o środku S wpisanego w wycinek AOB (rys. 14.99).



Rys. 14.99

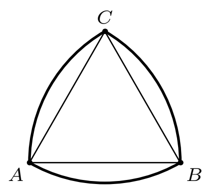


Rys. 14.100

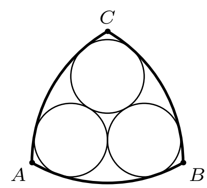
Niech C będzie punktem styczności obu okręgów (rys.14.100). Z symetrii wynika, że punkt C jest środkiem łuku AB. Poprowadźmy styczną do obu okręgów w punkcie C. Niech ta styczna przecina półproste OA i OB odpowiednio w punktach D i E. Wtedy punkt S jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt DEO. Konstruujemy go przecinając dwusieczną kąta ODC z promieniem OC:

Po trzecie, wszystkie zadania prowadziły ostatecznie do równania liniowego: wyrażenie r^2 w każdym przypadku redukowało się. Nie zawsze tak jest. Czasami otrzymujemy równanie kwadratowe. Na ogół pokazuję uczniom, jak można takie równania rozwiązać metodą uzupełniania do kwadratu. Tak też rozwiążemy takie równanie w następującym zadaniu.

Zadanie. Mamy dany trójkąt równoboczny ABC o boku długości b. Rysujemy trzy łuki okręgów o środkach w wierzchołkach trójkąta i promieniu b. Otrzymujemy „trójkąt krzywoliniowy" ABC, zwany **trójkątem Reuleaux** (rys. 14.101). W ten trójkąt Reuleaux wpisujemy trzy jednakowe okręgi parami styczne zewnętrznie (rys. 14.102).



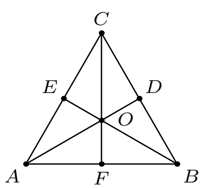
Rys. 14.101



Rys. 14.102

Oblicz promień r tych okręgów wpisanych.

Do rozwiązania tego zadania potrzebne nam będą pewne informacje o trójkącie równobocznym. Mianowicie musimy wiedzieć, że punkt O przecięcia wysokości (a tym samym dwusiecznych kątów czy środkowych) AD, BE i CF trójkąta równobocznego dzieli każdą z tych wysokości w stosunku $2:1$ (rys. 14.103).



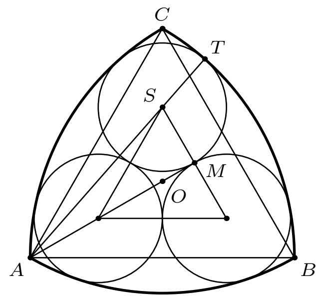
Rys. 14.103

$$AO = 2 \cdot OD, \quad BO = 2 \cdot OE, \quad CO = 2 \cdot OF.$$

Dowód wynika oczywiście z tego, że środkowe w dowolnym trójkącie dzielą się w stosunku $2:1$. Można też udowodnić to inaczej. Wiemy, że suma odległości punktu O od boków trójkąta równobocznego jest równa wysokości tego trójkąta. Ponieważ odcinki OD, OE i OF są równe, więc każdy z nich jest równy jednej trzeciej wysokości. Stąd już wynika to, czego mieliśmy dowieść.

Przechodzimy do rozwiązania zadania. Przyjmijmy oznaczenia takie jak na rys. 14.104. Punkt T jest punktem styczności okręgu o środku S i łuku BC. Punkt M jest punktem styczności dwóch okręgów wpisanych. Punkty A, B i C są wierzchołkami trójkąta równobocznego o boku b, środki okręgów wpisanych są wierzchołkami trójkąta równobocznego o boku $2r$. Punkt O jest środkiem obu trójkątów (przez środek trójkąta równobocznego rozumiemy np. punkt przecięcia wysokości). Mamy zatem:

$$AS = AT - ST = b - r,$$
$$SM = r,$$
$$AO = \frac{2}{3} \cdot \frac{b\sqrt{3}}{2} = \frac{b\sqrt{3}}{3} = \frac{b}{\sqrt{3}},$$
$$OM = \frac{1}{3} \cdot \frac{(2r)\sqrt{3}}{2} = \frac{r\sqrt{3}}{3} = \frac{r}{\sqrt{3}},$$
$$AM = \frac{b+r}{\sqrt{3}}.$$



Rys. 14.104

Teraz z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta AMS wynika, że

$$AM^2 + SM^2 = AS^2,$$

czyli

$$\frac{(b+r)^2}{3} + r^2 = (b-r)^2.$$

Przekształcamy to równanie w sposób równoważny:

$$(b+r)^2 + 3r^2 = 3(b-r)^2,$$
$$b^2 + 2br + r^2 + 3r^2 = 3b^2 - 6br + 3r^2,$$
$$r^2 + 8br = 2b^2.$$

Teraz stosujemy metodę uzupełniania do kwadratu. Zauważamy, że

$$(r+4b)^2 = r^2 + 8br + 16b^2$$

i do obu stron równania dodajemy $16b^2$:

$$r^2 + 8br + 16b^2 = 2b^2 + 16b^2,$$
$$(r+4b)^2 = 18b^2.$$

Ponieważ $r + 4b$ jest liczbą dodatnią, więc

$$r + 4b = \sqrt{18} \cdot b,$$

czyli

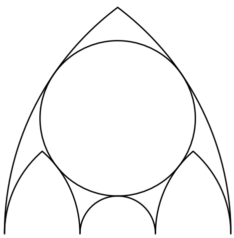
$$r + 4b = 3\sqrt{2} \cdot b.$$

Ostatecznie $r = (3\sqrt{2} - 4) \cdot b$.

Konstrukcja algebraiczna tych okręgów wpisanych jest oczywiście trudniejsza, ale wielu zdolnych uczniów III klasy gimnazjum jest w stanie ją wymyślić. Są też konstrukcje czysto geometryczne, ale wymagają one wiadomości, których uczniowie gimnazjum mogą nie mieć.

Ten przykład pokazuje, że temat do analizy, czyli wybór okna, musi być starannie przemyślany. Jeśli chcemy, by uczniowie nauczyli się rozwiązywać równania kwadratowe i zobaczyli rzeczywistą potrzebę ich stosowania, to dajemy im temat wymagający tych równań. Jeśli chcemy ograniczyć się do prostszych środków, to dajemy temat łatwiejszy. To też pokazuje, że tematy w ramach tego samego projektu można w klasie zróżnicować. Odpowiedni dobór uczniów w zespoły też ma znaczenie. Uczniowie najwięcej uczą się od siebie, o czym warto pamiętać przy formowaniu zespołów.

Popatrzmy teraz na przykładowy sposób wykonania pracy projektowej. Naszkicuję go tutaj bardzo skrótowo, od uczniów (zwłaszcza tych lepszych) wymagam nieco więcej dokładności. Popatrzmy na okno gotyckie przedstawione na rysunku 14.105. To okno przedstawia podstawowy zarys kilku maswerków z krużganka Górnego Zamku w Malborku. Zostały pominięte wypełnienia okręgu (czteroliściem lub pięciolściem) i wypełnienia dwóch ostrołuków i półkola w dolnej części maswerku. W oryginalnych pracach uczniów te wszystkie wypełnienia też były uwzględnione. Tutaj mam zamiar wyłącznie zarysować formę pracy projektowej i dlatego ograniczam się tylko do podstawowych części maswerku.



Rys. 14.105

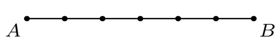
Praca projektowa zaczynałaby się od opisu maswerku — tak, by wyjaśnić jego konstrukcję. Zaczynamy więc od opisu ostrołuku.

Ten maswerk jest oparty na ostrołuku wysokim, którego wysokość jest równa podstawie. Dlatego konstrukcję zaczynamy od narysowania kwadratu o boku równym podstawie maswerku. Podstawę maswerku dzielimy następnie na trzy równe części. Na środkowej z nich budujemy półokrąg. Następnie rysujemy okrąg styczny wewnętrznie do obu łuków ograniczających całe okno i zewnętrznie do narysowanego półokręgu. Wreszcie konstrukcję kończymy dwoma ostrołukami wysokimi stycznymi do narysowanego okręgu.

Konstrukcję całego maswerku opiszę teraz dokładnie w ośmiu krokach.

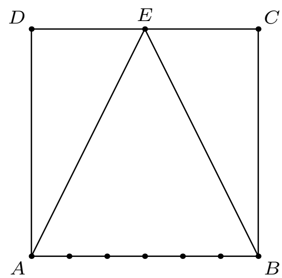
Krok 1.
Rysujemy poziomy odcinek AB o długości b i dzielimy go na 6 równych części (rys. 14.106). Punkty podziału będą wykorzystane w dalszym ciągu.

Uwaga. Uczniowie, którzy jeszcze nie uczyli się dzielenia odcinka na równe części, mogą wybrać mały odcinek i odłożyć go na prostej 6 razy. Efekt końcowy będzie taki sam: odcinek AB podzielony na 6 równych części. Istnieje też konstrukcja podziału odcinka na trzy części, niekorzystająca z twierdzenia Talesa. Pokażę ją po opisaniu pracy projektowej.



Rys. 14.106

Krok 2.
Rysujemy kwadrat $ABCD$ o boku równym b (rys. 14.107). Punkt E jest środkiem boku CD. Łączymy go z punktami A i B.



Rys. 14.107

Trójkąt równoramienny ABE jest trójkątem, na którym oparty jest nasz ostrołuk.

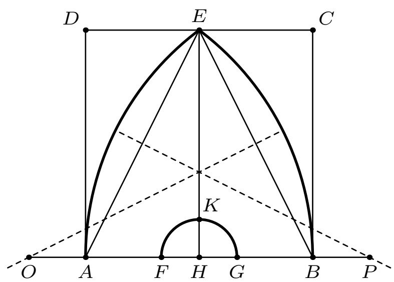
Uwaga. Podpowiadam uczniom sposób rysowania, zwiększający czytelność konstrukcji. Linie ostateczne rysujemy grubiej, wszystkie linie pomocnicze cieniej. Innym kolorem (na przykład czerwonym) rysujemy wszystkie linie nowe w danym kroku. W następnym albo zostaną usunięte jako pomocnicze, albo staną się czarne.

Krok 3.

Znajdujemy środki okręgów, których łukami będą łuki AE i BE tworzące główny ostrołuk naszego maswerku. W tym celu rysujemy symetralną odcinka BE i niech O będzie punktem przecięcia tej symetralnej z prostą AB. Podobnie punkt P jest punktem przecięcia symetralnej odcinka AE z prostą AB. Następnie rysujemy oba łuki (rys. 14.108).

- łuk AE jest łukiem okręgu o środku P i promieniu równym $d = OB = AP$;
- łuk BE jest łukiem okręgu o środku O i promieniu d.

W tym samym kroku zaznaczamy punkty F i G dzielące bok AB na trzy części oraz punkt H będący środkiem odcinka AB. Rysujemy półokrąg o środku H i promieniu $\frac{b}{6}$. Punkt K jest punktem przecięcia tego półokręgu z odcinkiem HE dzielącym kwadrat $ABCD$ na połowy.

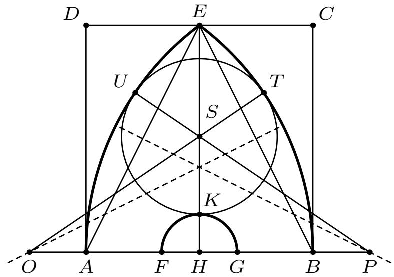


Rys. 14.108

Krok 4.

Teraz chcemy narysować okrąg o środku S. Przypuśćmy, że ten okrąg jest już narysowany. Zaznaczmy punkty styczności T i U (rys. 14.109).

- punkt T jest punktem styczności okręgu o środku S i łuku BE;
- punkt U jest punktem styczności okręgu o środku S i łuku AE.



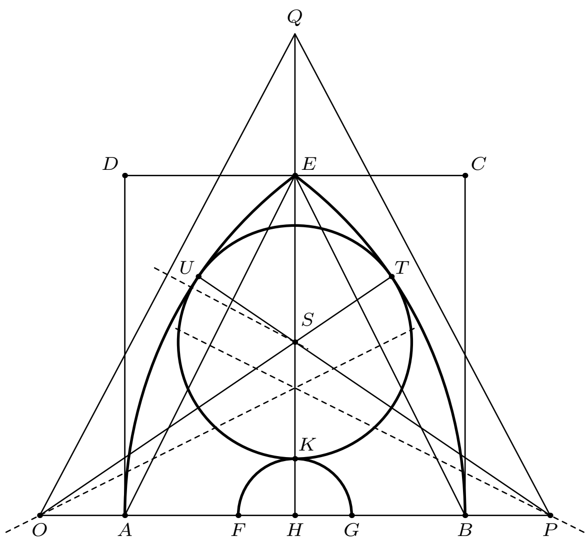
Rys. 14.109

Punkty O S i T są współliniowe. Podobnie punkty P, S i U są współliniowe. Niech R będzie promieniem szukanego okręgu. Wówczas $OS = OT - ST = d - R$ i podobnie $PS = d - R$. Natomiast $KS = R$. Jeśli na półprostej KE wybierzemy punkt Q tak, by $KQ = d$, to będziemy mieli $QS = d - R$. Wówczas będziemy mieli

$$OS = PS = QS = d - R,$$

czyli punkt S będzie środkiem okręgu opisanego na trójkącie OPQ.

Krok 5.
Na półprostej KE zaznaczamy punkt Q tak, by $KQ = d = OB = AP$. Rysujemy symetralną odcinka OQ. Punkt przecięcia tej symetralnej z odcinkiem HE jest szukanym punktem S. Promieniem szukanego okręgu jest oczywiście odcinek $R = SK$. Rysujemy okrąg o środku S i promieniu R (rys. 14.110). Ze względu na zwiększoną liczbę linii pomocniczych, pokazuję ten rysunek w powiększeniu w stosunku do rysunków poprzednich.



Rys. 14.110

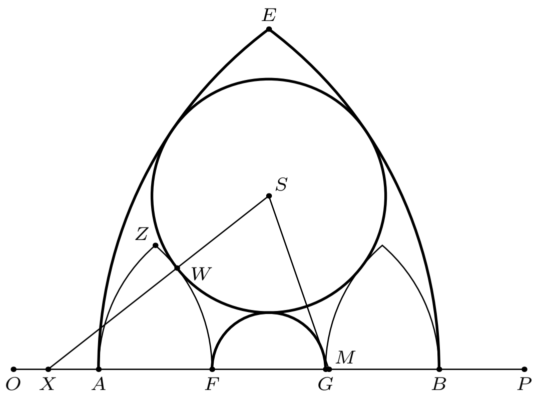
W następnym kroku chcemy dorysować ostatnie dwa ostrołuki. Znów będziemy musieli wyobrazić sobie, że one zostały już narysowane.

Krok 6.
Najpierw usuwamy wszystkie — niepotrzebne już — linie i punkty pomocnicze. Następnie zakładamy, że zostały już narysowane oba ostrołuki wysokie (rys. 14.111). Interesuje nas

lewy, tzn. ostrołuk AZF. Niech punkt X będzie środkiem okręgu, którego łukiem jest łuk FZ. Promień tego okręgu jest równy $r = XF$. Niech następnie W będzie punktem styczności okręgu o środku S i łuku FZ. Punkty X, W i S są współliniowe. Narysujmy odcinek XS. Mamy wówczas

$$XS = SW + WS = r + R \quad \text{oraz} \quad XF = r.$$

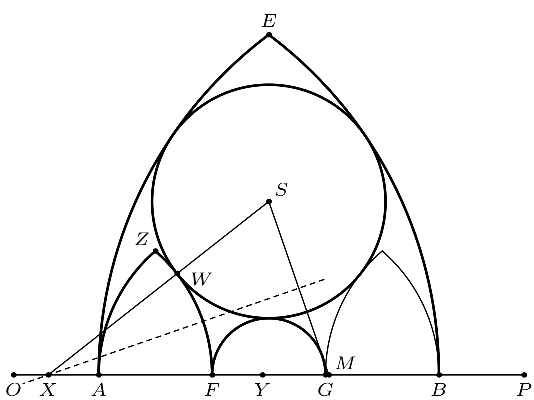
Wybierzmy na prostej AB taki punkt M (leżący na prawo od punktu F), by $FM = R$. Na poniższym rysunku punkt M leży tuż na prawo od punktu G. Wówczas $XM = r+R$, a więc $XS = XM$. Punkt X leży więc na symetralnej odcinka SM.



Rys. 14.111

Krok 7.

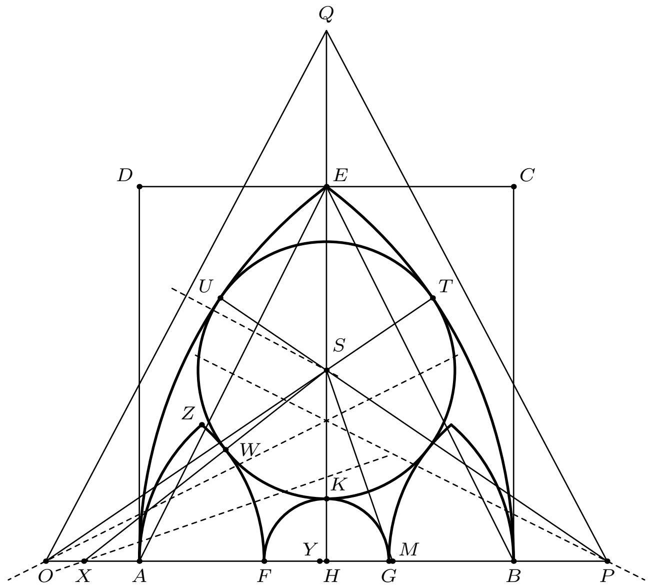
Rysujemy punkt M tak, jak to zostało opisane w kroku 6. Znajdujemy punkt X jako punkt przecięcia prostej AB z symetralną odcinka SM. Niech $r = XF$. Znajdujemy następnie taki punkt Y, by $AY = r$ (rys. 14.112).



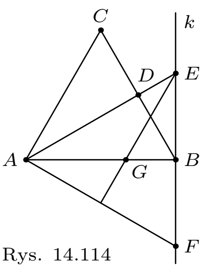
Rys. 14.112

Ostrołuk AFZ powstaje z łuków dwóch okręgów o środkach X i Y i promieniach równych r.

Krok 8.
W taki sam sposób konstruujemy prawy ostrołuk. Na rysunku 14.113 mamy cały maswerk razem ze wszystkimi dotychczasowymi liniami pomocniczymi:



Rys. 14.113



Rys. 14.114

Pokażę teraz obiecaną konstrukcję podziału odcinka na trzy równe części (rys. 14.114). Mamy dany odcinek AB. Konstruujemy trójkąt równoboczny ABC i przez punkt B prowadzimy prostą k prostopadłą do AB. Niech punkt D będzie środkiem odcinka BC. Następnie punkt E jest punktem przecięcia prostej AD z prostą k, a punkt F jest punktem leżącym na prostej k po drugiej stronie prostej AB tak, że $EB = FB$. Prosta przechodząca przez punkt E i prostopadła do prostej AF przecina odcinek AB w takim punkcie G, że $AG = 2 \cdot GB$. Uzasadnienie poprawności pozostawię jako nietrudne ćwiczenie.

Na zakończenie chciałbym zamieścić jeszcze parę uwag dotyczących wykonania projektu. Po pierwsze, praca nad projektem jest najlepszym sposobem nauczenia się konstrukcji geometrycznych. Rozwiązywanie zadań konstrukcyjnych zawsze wydawało mi się niezwykle nudne. Praca z komputerem polegająca na rysowaniu okna gotyckiego ma zupełnie inny charakter. Inne jest narzędzie, znacznie bardziej przyjazne użytkownikowi. Rysowanie za pomocą cyrkla i linijki wymaga powtarzania wielokrotnie tych samych bardzo prostych czynności (rysowanie prostych prostopadłych czy równoległych, znajdowanie środka odcinka czy konstruowanie dwusiecznej kąta). Program komputerowy włącza takie konstrukcje do zestawu konstrukcji podstawowych. Oczywiście należy uczniowi kiedyś pokazać, że te podstawowe czynności są możliwe do wykonania zgodnie z regułami sztuki, ale powtarzanie tych konstrukcji za każdym razem jest całkowicie zbyteczne. Konstrukcje robione ręcznie są niedokładne, ponieważ my rysujemy niedokładnie. Komputer robi to znacznie bardziej precyzyjnie. Wreszcie mamy starannie określony cel, do którego dążenie dość szybko uczniów „wciąga". W efekcie uczą się szybciej i więcej. Wielu z nich chce również dowiedzieć się więcej o samych konstrukcjach, na przykład o zadaniu Apoloniusza.

Po drugie, jak wspomniałem na początku, czasem uczniowie wykonywali taki projekt wyłącznie na podstawie zdjęć, a innym razem po obejrzeniu okien w rzeczywistości. Oczywiście taki projekt powinien nauczyć uczniów patrzenia na sztukę oczami matematyka. Związki sztuki z matematyką są bardzo głębokie. Widzimy je tam, gdzie artysta w wyrafinowany sposób korzystał z symetrii oraz gdzie, zafascynowany geometrią euklidesową (być może po prostu na skutek lektury *Elementów*), bawił się cyrklem przy projektowaniu okna gotyckiego. Chcę, by uczeń nauczył się takiego sposobu patrzenia na dzieło sztuki, by móc dostrzec matematykę wszędzie tam, gdzie się ona naprawdę znajduje. Oczywiście można próbować zastąpić dzieło sztuki jego reprodukcją czy zdjęciem, ale nic nie zastąpi osobistego kontaktu z arcydziełem. Nic nie zastąpi przeżycia, jakim jest kontemplowanie w ciszy i skupieniu ogromu i powagi wielkiej katedry gotyckiej czy kameralności małego kościółka.

W Polsce jest wiele pięknych budowli gotyckich, w których możemy znaleźć maswerki. Wymieniłem dwie — zamek w Malborku i katedrę w Pelplinie. Wybrałem akurat te, ponieważ obie obejrzałem w czasie tej samej wycieczki krajoznawczej z moimi wnukami. Ale są też piękne kościoły gotyckie w innych miastach (Gdańsk, Wrocław, Kraków, Chełmno). Styl gotycki był stylem niezwykle żywotnym i znajdujemy jego ślady również w stylach późniejszych. Szczególnie należy tu wymienić popularny w wieku XIX styl neogotycki. W tym stylu zbudowano w Polsce wiele kościołów i w nich też można znaleźć interesujące maswerki. Elementy stylu gotyckiego możemy także zobaczyć w dekoracjach wewnątrz kościoła. W moim kościele parafialnym (zbudowanym w stylu neogotyckim) są ostrołukowe dekoracje drewniane. Elementy stylu gotyckiego widzimy na rzeźbionych kościelnych ławkach, stallach, rzeźbionych konfesjonałach, drzwiczkach tabernakulum czy naczyniach liturgicznych. Jest takich dekoracji bardzo wiele, trzeba tylko umieć się im przyglądać. Każdy Czytelnik tego poradnika znajdzie wiele przykładów w swojej najbliższej okolicy. Ale można też wykorzystać wycieczkę szkolną na to, by uczniowie obejrzeli kościół gotycki i zrobili zdjęcia okien. Wykorzystają je za jakiś czas w swoich projektach.

15. Wskazówki heurystyczne

W tym rozdziale omówię kilka różnych wskazówek heurystycznych pomocnych w rozwiązywaniu zadań matematycznych. Kwestia, jaki wpływ na proces rozwiązywania zadania ma przekazanie uczniom ogólnych wytycznych rozwiązywania zadań (tzw. wskazówek heurystycznych), jest przez S. Turnaua uznana za jeden z ważniejszych tematów badawczych dydaktyki matematyki (zob. [Turnau], str. 10). Nie będę tutaj omawiał tego zagadnienia od strony teoretycznej, nie będę także omawiał wyników badań naukowych. Ograniczę się do podania kilku wybranych wskazówek heurystycznych i wskazania, w jaki sposób można stosować je w rozwiązywaniu zadań. Czytelnikowi, który chciałby szerzej zapoznać się z kwestią stosowania wskazówek heurystycznych, polecam książki [Polya-1] i [Polya-2].

Przez wskazówkę heurystyczną rozumiem tutaj wskazówkę natury ogólnej, ale jednak dotyczącą matematyki, pokazującą pewien kierunek myślenia ucznia prowadzący do rozwiązania zadania. Przykłady takich wskazówek można znaleźć już po otwarciu książki [Polya-1], na wyklejce. Są tam pytania w rodzaju:

1. Czy nie spotkałeś się już kiedyś z tym zadaniem?
2. Czy znasz jakieś pokrewne zadanie?
3. Czy nie mógłbyś postawić zadania na nowo, w inny sposób?
4. Czy nie mógłbyś wymyślić jakiegoś bardziej dostępnego zadania pokrewnego? Bardziej ogólnego zadania? Bardziej specjalnego?

W tym rozdziale omówię osiem rodzajów wskazówek heurystycznych. Wskazówki heurystyczne mogą mieć charakter bardzo ogólny (jak te, które wymienia Polya) oraz mogą mieć charakter bardzo szczegółowy, odnoszący się do konkretnych zagadnień matematycznych. Pokażę oba rodzaje wskazówek.

Najpierw wskazówki bardzo ogólne:

(1) Uprość zadanie. Rozwiąż najpierw zadanie uproszczone, a potem wykorzystaj rozwiązanie w zadaniu ogólnym.
(2) Zbadaj swoje zadanie w kilku lub kilkunastu przypadkach szczególnych i spróbuj dostrzec regułę ogólną. Udowodnij ją.
(3) Czy znasz jakieś zadanie podobne? Czy możesz zastosować podobną metodę rozwiązania?

Następnie wskazówki szczegółowe, dotyczące konkretnych sytuacji matematycznych:

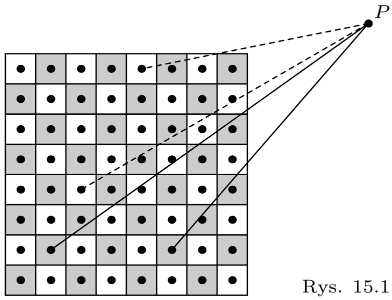
(4) W jaki sposób możemy udowodnić równość odcinków, kątów?
(5) Jakie znasz twierdzenia o współpękowości prostych?
(6) Masz udowodnić jakąś własność pewnego punktu. Zrób staranny rysunek, zmierz różne odcinki i kąty. Czy możesz zdefiniować ten punkt inaczej i wtedy udowodnić tezę?
(7) Wpisz czworościan foremny w sześcian.
(8) Przedłuż środkową.

Pokażę teraz po kilka zadań, których rozwiązania ilustrują powyższe wskazówki heurystyczne. Zacznijmy od wskazówki (1). Przypomnijmy samą wskazówkę i popatrzmy na dwa zadania.

(1) Uprość zadanie. Rozwiąż najpierw zadanie uproszczone, a potem wykorzystaj rozwiązanie w zadaniu ogólnym.

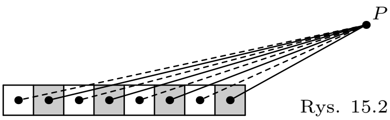
Zadanie 1.1. Dana jest szachownica i punkt P w przestrzeni. Udowodnij, że suma kwadratów odległości punktu P od środków pól białych szachownicy jest równa sumie kwadratów odległości punktu P od środków pól czarnych.

W rozwiązaniu spróbujmy zastosować najpierw wskazówkę (1) — uprośćmy zadanie. Widzimy dwa rodzaje uproszczeń. Pierwsze polega na zmniejszeniu wymiaru — zamiast zadania przestrzennego, rozważmy analogiczne zadanie płaskie. Umieśćmy zatem punkt P na tej płaszczyźnie, na której leży szachownica. Teraz przynajmniej można spróbować naszkicować sytuację.

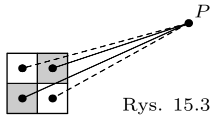


Rys. 15.1

Na rysunku 15.1 widzimy szachownicę, punkt P i cztery odcinki łączące punkt P ze środkami pól: dwa odcinki narysowane linią ciągłą, prowadzące do środków pól czarnych, i dwa odcinki narysowane linią przerywaną, prowadzące do środków pól białych. Możemy sobie wyobrazić wszystkie takie odcinki (narysowanie ich kompletnie zaciemniłoby rysunek). Trzeba udowodnić, że suma kwadratów odcinków ciągłych jest równa sumie kwadratów odcinków przerywanych. Narzuca się konieczność następnego uproszczenia — zmniejszenia szachownicy. Na ogół pierwszy pomysł uczniów polega na ograniczeniu szachownicy do jednego wiersza (rys. 15.2). Nietrudno jednak zauważyć, że to uproszczenie jest niewłaściwe — po prostu twierdzenie przestało być prawdziwe. Zauważmy, że każdy odcinek ciągły jest krótszy od sąsiadującego z nim (z lewej strony) odcinka przerywanego. Zatem suma kwadratów odcinków ciągłych jest mniejsza od sumy kwadratów odcinków przerywanych. Teraz przychodzi kolej na inne uproszczenie. Ograniczmy szachownicę do czterech pól (rys. 15.3).



Rys. 15.2



Rys. 15.3

Teraz zadanie okazało się po prostu zadaniem 67 z zestawu VII (zob. rozdział o geometrii trójkąta). Twierdzenie w najprostszym przypadku zostało udowodnione. Teraz należy powrócić do zadania oryginalnego. W tym celu wystarczy najpierw zauważyć, że szachownicę o wymiarach 8×8 można podzielić na 16 szachownic o wymiarach 2×2. To dowodzi twierdzenia w przypadku płaskim. Wreszcie, jeśli punkt P leży w przestrzeni, to rzutujemy go na płaszczyznę szachownicy. Niech Q będzie tym rzutem. Jeśli punkt A jest środkiem któregokolwiek pola szachownicy, to z twierdzenia Pitagorasa otrzymujemy równość

$$PA^2 = PQ^2 + QA^2.$$

Wiemy już, że sumy kwadratów odległości punktu Q od środków pól białych i czarnych są równe. Po napisaniu tej równości wystarczy do każdej strony dodać 32 razy PQ^2 i skorzystać z powyższej równości, by otrzymać tezę twierdzenia. Kluczowe w rozwiązaniu zadania okazało się odpowiednie uproszczenie. Droga powrotna, od zadania uproszczonego do oryginalnego, okazała się bardzo łatwa. Wystarczyło dwukrotnie skorzystać z udowodnionych wcześniej uproszczonych wersji zadania.

Zadanie 1.2. Na polach szachownicy stoją pionki. Na każdym polu może stać dowolna liczba pionków. Ruch pionka polega na przesunięciu go z pola, na którym stoi, na jedno z pól sąsiednich. Pola są sąsiednie, jeśli mają wspólny bok. Naszym zadaniem jest przesunąć wszystkie pionki na jedno pole w najmniejszej możliwej liczbie ruchów. Należy wskazać, na które pole będziemy przesuwać pionki i jaką minimalną liczbę ruchów trzeba wykonać.

To zadanie także będziemy upraszczać. Najpierw jednak musimy dokładnie wytłumaczyć, o co w nim chodzi. Dając to zadanie uczniom, pokazuję najpierw przykład wyjaśniający polecenie.

Weźmy małą szachownicę, o wymiarach 3×3. To oczywiście będzie jedno z uproszczeń, którym zajmiemy się później — łatwiej rozwiązać zadanie dla małej szachownicy niż dla dużej. Jednak metoda rozwiązania, którą teraz zobaczymy dla szachownicy 3×3, nie uogólnia się na większe szachownice. Uogólnieniami, które pozwalają wyciągnąć istotne wnioski, zajmiemy się później. Teraz mamy do czynienia wyłącznie z ilustracją wyjaśniającą treść zadania. Liczby na poszczególnych polach oznaczają liczbę pionków stojących na tym polu. Niech początkowe liczby pionków będą takie jak na rysunku 15.4.

3	1	2	3
2	2	1	2
1	2	1	5
	a	b	c

Rys. 15.4

Wpiszmy teraz w każde pole liczbę ruchów potrzebną do przeniesienia wszystkich pionków na to pole. Zacznijmy od pola a1 (oznaczenia pól będą takie jak w szachach). Policzmy ruchy, które muszą być wykonane, by z innych pól przenieść pionki na pole a1:

- do przeniesienia 1 pionka z pola b1 na pole a1 potrzeba 1 ruchu;
- do przeniesienia 5 pionków z pola c1 na pole a1 potrzeba 10 ruchów;
- do przeniesienia 2 pionków z pola a2 na pole a1 potrzeba 2 ruchów;
- do przeniesienia 1 pionka z pola b2 na pole a1 potrzeba 2 ruchów;
- do przeniesienia 2 pionków z pola c2 na pole a1 potrzeba 6 ruchów;
- do przeniesienia 1 pionka z pola a3 na pole a1 potrzeba 2 ruchów;
- do przeniesienia 2 pionków z pola b3 na pole a1 potrzeba 6 ruchów;
- do przeniesienia 3 pionków z pola c3 na pole a1 potrzeba 12 ruchów.

Razem potrzebujemy 41 ruchów. W pole a1 wpisujemy liczbę 41 (rys. 15.5). W podobny sposób obliczamy liczbę ruchów potrzebnych do przeniesienia pionków na pole b1:

- do przeniesienia 2 pionków z pola a1 na pole b1 potrzeba 2 ruchów;
- do przeniesienia 5 pionków z pola c1 na pole b1 potrzeba 5 ruchów;
- do przeniesienia 2 pionków z pola a2 na pole b1 potrzeba 4 ruchów;
- do przeniesienia 1 pionka z pola b2 na pole b1 potrzeba 1 ruchu;
- do przeniesienia 2 pionków z pola c2 na pole b1 potrzeba 4 ruchów;
- do przeniesienia 1 pionka z pola a3 na pole b1 potrzeba 3 ruchów;
- do przeniesienia 2 pionków z pola b3 na pole b1 potrzeba 4 ruchów;
- do przeniesienia 3 pionków z pola c3 na pole b1 potrzeba 9 ruchów.

Tym razem potrzebujemy 32 ruchów. W pole b1 wpisujemy liczbę 32 (rys. 15.6). W podobny sposób obliczamy liczbę ruchów potrzebnych do przeniesienia pionków na pozostałe pola szachownicy (rys. 15.7).

	a	b	c
3			
2			
1	41		

Rys. 15.5

	a	b	c
3			
2			
1	41	32	

Rys. 15.6

	a	b	c
3	45	36	35
2	38	29	28
1	41	32	32

Rys. 15.7

Zatem polem, na które należy przenosić pionki, jest pole c2. Minimalna liczba ruchów jest równa 28. Po tej ilustracji przejdziemy do rozwiązania zadania. Już ten przykład pokazał, że pewne naturalne hipotezy są nieprawdziwe. Uczniowie często zgadują, że właściwym polem jest pole z największą liczbą pionków. Nie zwracają przy tym uwagi na to, że taka odpowiedź nie jest jednoznaczna. Jeśli na przykład na wszystkich polach jest tyle samo pionków, to właściwym polem będzie pole b2.

Strategia upraszczania zadania nie jest tym razem oczywista. Nie chodzi wyłącznie o zmniejszenie rozmiaru szachownicy. Nadal nie będziemy widzieli reguły ogólnej. Istotą problemu jest zmniejszenie wymiaru. Należy bowiem dostrzec, że ruchy pionków można podzielić na dwa kierunki: ruchy w poziomie i ruchy w pionie. Możemy najpierw wykonać wszystkie ruchy poziome, gromadząc pionki w jednej kolumnie, a potem wszystkie ruchy pionowe, gromadząc pionki na jednym polu. Możemy także wykonać te czynności odwrotnie: najpierw wykonać wszystkie ruchy pionowe, gromadząc pionki w jednym wierszu, a potem wykonać ruchy pionowe, zbierając pionki na jednym polu. Chwila zastanowienia pokazuje, że ruchy poziome i pionowe są od siebie niezależne. To znaczy, że możemy zająć się szachownicą jednowymiarową. W naszym przypadku możemy rozważyć szachownicę poziomą (rys. 15.8). Na poszczególnych polach tej szachownicy stoi tyle pionków, ile było w poszczególnych kolumnach. Chcemy dowiedzieć się, w której kolumnie powinniśmy zebrać wszystkie pionki. Tu odpowiedź wydaje się oczywista — w tej, w której jest najwięcej pionków. Ale gdybyśmy wzięli szachownicę pionową, to przekonalibyśmy się, że ta reguła nie jest słuszna (rys. 15.9). Właściwym polem jest tym razem pole a2, na którym znajduje się najmniej pionków. Jak zatem znaleźć regułę ogólną? Znów uprośćmy szachownicę najbardziej, jak się da. Niech szachownica ma dwa pola (rys. 15.10).

	a	b	c
1	5	4	10

Rys. 15.8

	a
3	6
2	5
1	8

Rys. 15.9

	a	b
1	x	y

Rys. 15.10

Na polu a1 stoi x pionków, na polu b1 stoi y pionków. Na które pole należy przenosić pionki? Oczywiście na to, na którym znajduje się więcej pionków. Do przeniesienia pionków na pole a1 potrzeba y ruchów; do przeniesienia pionków na pole b1 potrzeba x ruchów. Jeśli $x > y$, to należy przenosić pionki na pole a1 (a więc na to, na którym jest więcej pionków). Jeśli $x < y$, to przenosimy pionki na pole b1 — a więc znów na to pole, na którym znajduje się więcej pionków. Jeśli natomiast $x = y$, to oba pola są tak samo dobre.

Dla szachownicy złożonej z dwóch pól najprostsza reguła okazała się właściwa. Co w takim razie dzieje się w przypadku dłuższych, ale wciąż jednowymiarowych szachownic?

Zastanówmy się, które z dwóch sąsiadujących pól jest lepsze. Weźmy szachownicę o wymiarach 8×1 i popatrzmy na przykład na pola c1 i d1 (rys. 15.11):

1	x_3	x_2	x_1	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
	a	b	c	d	e	f	g	h

Rys. 15.11

Zauważmy, że zanim przeniesiemy wszystkie pionki na jedno pole: c1 lub d1, możemy zgromadzić pionki na tych dwóch polach. Przenosimy pionki z pól a1 i b1 na pole c1 oraz z pól e1, f1, g1 i h1 na pole d1. Najważniejsze, by zauważyć, że te ruchy musimy wykonać niezależnie od tego, na które z wybranych dwóch pól zdecydujemy się w końcu przenosić pionki. Teraz reguła staje się jasna. Jeśli

$$x_1 + x_2 + x_3 > y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5,$$

to bardziej opłaca się przenosić pionki na pole c1; jeśli

$$x_1 + x_2 + x_3 < y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5,$$

to bardziej opłaca się przenosić pionki na pole d1. Jeśli

$$x_1 + x_2 + x_3 = y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5,$$

to nie ma różnicy — oba pola są tak samo dobre.

W przypadku ogólnym przypuśćmy, że mamy następującą szachownicę o wymiarach 8×1 (rys. 15.12):

1	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
	a	b	c	d	e	f	g	h

Rys. 15.12

Załóżmy następnie, że $x_1, \ldots, x_9$ są dowolnymi liczbami naturalnymi. Wówczas:

- jeśli $x_1 > x_2 + \ldots + x_8$, to właściwym polem jest pole a1;
- jeśli $x_1 = x_2 + \ldots + x_8$, to właściwymi polami są pola a1 i b1 (w przypadku obu pól liczba ruchów jest taka sama);
- jeśli $x_1 < x_2 + \ldots + x_8$ oraz $x_1 + x_2 > x_3 + \ldots + x_8$, to właściwym polem jest pole b1;
- jeśli $x_1 < x_2 + \ldots + x_8$ oraz $x_1 + x_2 = x_3 + \ldots + x_8$, to właściwymi polami są pola b1 i c1;
- jeśli $x_1 + x_2 < x_3 + \ldots + x_8$ oraz $x_1 + x_2 + x_3 > x_4 + \ldots + x_8$, to właściwym polem jest pole c1;
- jeśli $x_1 + x_2 < x_3 + \ldots + x_8$ oraz $x_1 + x_2 + x_3 = x_4 + \ldots + x_8$, to właściwymi polami są pola c1 i d1;
- jeśli $x_1 + x_2 + x_3 < x_4 + \ldots + x_8$ oraz $x_1 + \ldots + x_4 > x_5 + \ldots + x_8$, to właściwym polem jest pole d1;
- jeśli $x_1 + x_2 + x_3 < x_4 + \ldots + x_8$ oraz $x_1 + \ldots + x_4 = x_5 + \ldots + x_8$, to właściwymi polami są pola d1 i e1;
- jeśli $x_1 + \ldots + x_4 < x_5 + \ldots + x_8$ oraz $x_1 + \ldots + x_5 > x_6 + x_7 + x_8$, to właściwym polem jest pole e1;
- jeśli $x_1 + \ldots + x_4 < x_5 + \ldots + x_8$ oraz $x_1 + \ldots + x_5 = x_6 + x_7 + x_8$, to właściwymi polami są pola e1 i f1;

- jeśli $x_1 + \ldots + x_5 < x_6 + x_7 + x_8$ oraz $x_1 + \ldots + x_6 > x_7 + \ldots + x_8$, to właściwym polem jest pole f1;
- jeśli $x_1 + \ldots + x_5 < x_6 + x_7 + x_8$ oraz $x_1 + \ldots + x_6 = x_7 + x_8$, to właściwymi polami są pola f1 i g1;
- jeśli $x_1 + \ldots + x_6 < x_7 + x_8$ oraz $x_1 + \ldots + x_7 > x_8$, to właściwym polem jest pole g1;
- jeśli $x_1 + \ldots + x_6 < x_7 + x_8$ oraz $x_1 + \ldots + x_7 = x_8$, to właściwymi polami są pola g1 i h1;
- wreszcie jeśli $x_1 + \ldots + x_7 < x_8$, to właściwym polem jest pole h1.

Popatrzmy teraz, jak otrzymane rozwiązanie pozwala znaleźć poszukiwane pole na konkretnej szachownicy. Weźmy dowolną szachownicę o wymiarach 8×8 i rozmieśćmy na niej pionki. Nad każdą kolumną i z prawej strony każdego wiersza napiszmy, ile w tej kolumnie czy w tym wierszu znajduje się pionków (rys. 15.13):

	31	29	32	16	16	17	22	19	
8	5	5	4	1	2	3	5	4	29
7	5	3	5	1	4	2	4	1	25
6	3	4	5	2	1	1	4	2	22
5	5	3	4	3	1	2	1	4	23
4	3	4	4	2	3	1	1	2	20
3	5	2	4	2	3	1	3	3	23
2	3	4	5	2	1	2	1	2	20
1	2	4	1	3	1	5	3	1	20
	a	b	c	d	e	f	g	h	

Rys. 15.13

Zauważmy teraz, że

$$31 + 29 = 60 < 122 = 32 + 16 + 16 + 17 + 22 + 19$$

oraz

$$31 + 29 + 32 = 92 > 90 = 16 + 16 + 17 + 22 + 19.$$

Stąd wynika, że poszukiwane pole znajduje się w kolumnie c. Następnie

$$20 + 20 + 23 + 20 = 83 < 99 = 23 + 22 + 25 + 29$$

oraz

$$20 + 20 + 23 + 20 + 23 = 106 > 76 = 22 + 25 + 29.$$

Poszukiwane pole znajduje się więc w wierszu 5. Jest nim zatem pole c5.

Przejdźmy do drugiej wskazówki heurystycznej. Znów zaczniemy od przypomnienia wskazówki. Ta wskazówka może być zastosowana w bardzo wielu zadaniach. Zilustruję ją siedmioma zadaniami.

(2) Zbadaj swoje zadanie w kilku lub kilkunastu przypadkach szczególnych i spróbuj dostrzec regułę ogólną. Udowodnij ją.

Strategia rozwiązania zadania polega teraz na tym, by w odpowiedniej liczbie przykładów dopatrzeć się pewnej reguły, pozwalającej na postawienie hipotezy ogólnej. Wykazanie, że postawiona hipoteza jest prawdziwa, nie może odwoływać się już do tych przykładów, ale musi być uzyskane ogólnie, za pomocą tradycyjnych metod dowodzenia. Przypomnę zadanie, które omawiałem w rozdziale o algebrze, pochodzące z zawodów II stopnia XVI Olimpiady Matematycznej.

Zadanie 2.1. Znajdź wszystkie takie liczby pierwsze p, że $4p^2+1$ i $6p^2+1$ są również liczbami pierwszymi.

Zgodnie z omawianą strategią rozwiązanie rozpoczniemy od obliczenia $4p^2+1$ i $6p^2+1$ dla kolejnych liczb pierwszych p. Takie postępowanie w pierwszej chwili może wydawać się nierozsądne — przecież badanie poszczególnych przypadków nie może prowadzić do rozwiązania ogólnego. Istnieje bowiem nieskończenie wiele liczb pierwszych p i na pewno nie zbadamy wszystkich. Naszym celem jest jednak nie tyle zbadanie wszystkich przypadków, ile zbadanie wystarczająco wielu, by dostrzec prawidłowość, która okaże się kluczowa dla całego rozwiązania. Wypiszmy więc obliczone wartości:

p	$4p^2+1$	$6p^2+1$	p	$4p^2+1$	$6p^2+1$
2	17	25	11	485	727
3	37	55	13	677	1015
5	101	151	17	1157	1735
7	197	295	19	1445	2167

Zauważmy, że w każdym wierszu jedna z liczb ma na końcu cyfrę 5, a więc jest podzielna przez 5. To prowadzi do następującej hipotezy:

Hipoteza. Dla każdej liczby naturalnej n co najmniej jedna z liczb n, $4n^2+1$ i $6n^2+1$ jest podzielna przez 5.

Tak sformułowaną hipotezę można udowodnić kilkoma sposobami. Te rozwiązania omówiłem w rozdziale o algebrze i nie będę ich tu powtarzał.

Dostrzeżenie liczby podzielnej przez 5 w każdym wierszu nie było trudne; rzucała się w oczy ostatnia cyfra 5 w drugiej i trzeciej kolumnie. Trudniej dostrzec regułę w następującym zadaniu:

Zadanie 2.2. Znajdź wszystkie takie liczby pierwsze p, że $8p^2+1$ jest również liczbą pierwszą.

Powtórzmy tę strategię rozwiązania, która okazała się skuteczna w poprzednim zadaniu. Obliczmy $8p^2+1$ dla kolejnych liczb pierwszych p:

p	$8p^2+1$	p	$8p^2+1$
2	33	11	969
3	73	13	1353
5	201	17	2313
7	393	19	2889

Jeżeli dostrzeżemy, że w drugiej kolumnie wszystkie liczby, oprócz 73, są podzielne przez 3, to możemy sformułować hipotezę ogólną:

Hipoteza. Dla każdej liczby naturalnej n jedna z liczb n i $8n^2+1$ jest podzielna przez 3.

Następujące obliczenia potwierdzają tę regułę:

n	$8n^2+1$	n	$8n^2+1$	n	$8n^2+1$
1	9	8	513	15	1801
2	33	9	649	16	2049
3	73	10	801	17	2313
4	129	11	969	18	2593
5	201	12	1153	19	2889
6	289	13	1353	20	3201
7	393	14	1569	21	3529

Liczby 9, 33, 3, 129, 201, 6, 393, 513, 9, 801, 969, 12, 1353, 1569, 15, 2049, 2313, 18, 2889 i 3201 są podzielne przez 3. Po sformułowaniu tej reguły możemy dokończyć rozwiązanie zadania, tak jak w sposobie II lub III poprzedniego zadania. Jedyną liczbą pierwszą p spełniającą warunki zadania jest $p = 3$.

Dostrzeżenie podzielności przez 3 jest wprawdzie trudniejsze niż dostrzeżenie cyfry 5 na końcu każdej z rozważanych liczb, ale mimo wszystko nie jest bardzo trudne — dysponujemy przecież bardzo prostą cechą podzielności przez 3. Podzielność przez 3 liczb 33, 201, 393 i 969 też rzuca się w oczy. Podobne zadanie pochodzi z V Olimpiadzie Matematycznej Gimnazjalistów.

Zadanie 2.3. Wyznacz wszystkie takie dodatnie liczby całkowite n, dla których obie liczby

$$n^2 + n + 1 \quad \text{oraz} \quad n^2 + n + 3$$

są pierwsze.

Znów wypiszemy wartości wyrażeń $n^2 + n + 1$ i $n^2 + n + 3$ dla kilku początkowych liczb naturalnych n:

n	n^2	n^2+n+1	n^2+n+3	n	n^2	n^2+n+1	n^2+n+3
1	1	3	5	6	36	43	45
2	4	7	9	7	49	57	59
3	9	13	15	8	64	73	75
4	16	21	23	9	81	91	93
5	25	31	33	10	100	111	113

Dostrzeżenie, że liczby 3, 9, 15, 21, 33, 45, 57, 75, 93 i 111 są podzielne przez 3, nie jest trudne. Teraz dowodzimy, że dla każdej liczby naturalnej n jedna z liczb $n^2 + n + 1$ oraz $n^2 + n + 3$ jest podzielna przez 3 (jeśli n daje resztę 1 z dzielenia przez 3, to pierwsza z tych liczb, w przeciwnym przypadku druga). To już daje rozwiązanie — jedyną liczbą spełniającą warunki zadania jest $n = 1$.

Tu znów mieliśmy do czynienia z podzielnością przez 3, którą dość łatwo można zauważyć. Znacznie trudniej dostrzec podobną regułę wtedy, gdy nie mamy odpowiedniej cechy podzielności. W II Olimpiadzie Matematycznej Gimnazjalistów mieliśmy podobne zadanie, w którym dostrzeżenie reguły było bardzo łatwe (choć obliczenia były bardziej pracochłonne).

Zadanie 2.4. Wyznacz wszystkie trójki liczb pierwszych p, q, r spełniające układ równań

$$\begin{cases} q &= p^2 + 6 \\ r &= q^2 + 6 \end{cases}$$

Tym razem pominę szczegóły rozwiązania. Po wypisaniu dla kolejnych liczb naturalnych n liczb $n^2 + 6$ i $(n^2 + 6)^2 + 6$, będziemy mogli sformułować hipotezę:

Hipoteza. Dla każdej liczby naturalnej n jedna z liczb n, $n^2 + 6$ i $(n^2 + 6)^2 + 6$ jest podzielna przez 5.

Tę hipotezę można było łatwo udowodnić za pomocą metod opisanych w zadaniu 2.1. Zatem jedyną liczbą pierwszą p taką, że liczby $q = p^2 + 6$ i $r = q^2 + 6$ też są pierwsze, jest 5. Tymi trzema liczbami pierwszymi są: 5, 31, 967.

Następne zadanie pochodzi z XLVI Olimpiady Matematycznej.

Zadanie 2.5. Ciąg (x_n) jest określony następująco:

$$x_1 = \frac{1}{2}, \quad x_n = \frac{2n-3}{2n} \cdot x_{n-1} \quad \text{dla } n = 2, 3, 4, \dots .$$

Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$ zachodzi nierówność

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n < 1.$$

Rozwiązanie. W tym zadaniu główny pomysł polega na tym, by odgadnąć, o ile mniejsza od jedności jest suma $x_1+x_2+\ldots+x_n$. Wówczas zamiast nierówności będziemy dowodzić równości. To okaże się łatwiejsze. Obliczamy zatem najpierw kilka początkowych wyrazów ciągu (x_n):

$$\begin{gathered} x_1 = \frac{1}{2}, \quad x_2 = \frac{1}{8}, \quad x_3 = \frac{1}{16}, \quad x_4 = \frac{5}{128}, \\ x_5 = \frac{7}{256}, \quad x_6 = \frac{21}{1024}, \quad x_7 = \frac{33}{2048}, \quad x_8 = \frac{429}{32768}. \end{gathered}$$

Następnie dla kolejnych n obliczamy różnicę $1 - (x_1 + x_2 + \ldots + x_n)$ i obok obliczonej różnicy zapisujemy wartość x_n:

$$\begin{array}{lclccc}
1 - x_1 & = & \frac{1}{2}, & x_1 & = & \frac{1}{2}, \\
1 - (x_1 + x_2) & = & \frac{3}{8}, & x_2 & = & \frac{1}{8}, \\
1 - (x_1 + x_2 + x_3) & = & \frac{5}{16}, & x_3 & = & \frac{1}{16}, \\
1 - (x_1 + \ldots + x_4) & = & \frac{35}{128}, & x_4 & = & \frac{8}{128}, \\
1 - (x_1 + \ldots + x_5) & = & \frac{63}{256}, & x_5 & = & \frac{7}{256}, \\
1 - (x_1 + \ldots + x_6) & = & \frac{231}{1024}, & x_6 & = & \frac{21}{1024}, \\
1 - (x_1 + \ldots + x_7) & = & \frac{429}{2048}, & x_7 & = & \frac{33}{2048}, \\
1 - (x_1 + \ldots + x_8) & = & \frac{6435}{32768}, & x_8 & = & \frac{429}{32768}.
\end{array}$$

Można teraz zauważyć, że

$$1-x_1 = x_1, \ 1-(x_1+x_2) = 3x_2, \ 1-(x_1+x_2+x_3) = 5x_3, \ \ldots, \ 1-(x_1+\ldots+x_8) = 15x_8.$$

Spróbujmy zatem postawić hipotezę ogólną:

Hipoteza. $1 - (x_1 + x_2 + \ldots + x_n) = (2n-1) \cdot x_n$, czyli

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 1 - (2n-1) \cdot x_n.$$

Ponieważ $x_n > 0$, więc teza twierdzenia wynika natychmiast z naszej hipotezy. Udowodnienie tej hipotezy przez indukcję zostawię już jako ćwiczenie.

Następne zadanie pochodzi z LVIII Olimpiady Matematycznej.

Zadanie 2.6. Udowodnij, że jeśli a, b, c, d są liczbami całkowitymi dodatnimi oraz jeśli $ad = b^2 + bc + c^2$, to liczba $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ jest złożona.

Rozwiązanie. Dla różnych par liczb b i c obliczmy wartość wyrażenia $b^2 + bc + c^2$, a następnie wypiszmy wszystkie możliwe rozkłady otrzymanej liczby na iloczyn liczb a i d. Dla każdej otrzymanej w ten sposób czwórki liczb a, b, c i d obliczymy $a^2+b^2+c^2+d^2$ i wypiszemy wszystkie dzielniki tej liczby. A oto zebrane wyniki dla $b, c \leq 3$:

b, c	$b^2 + bc + c^2$	a, d	$a^2 + b^2 + c^2 + d^2$	dzielniki
$1, 1$	3	$1, 3$	12	$1, 2, 3, 4, 6, 12$
$1, 2$	7	$1, 7$	55	$1, 5, 11, 55$
$2, 2$	12	$1, 12$	153	$1, 3, 9, 17, 51, 153$
		$2, 6$	48	$1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 48$
		$3, 4$	33	$1, 3, 11, 33$
$1, 3$	13	$1, 13$	180	$1, 2, 3, 4, 5, 6, 9, 10, 18, 20, 30, 36, 45, 60, 90, 180$
$2, 3$	19	$1, 19$	375	$1, 3, 5, 15, 25, 75, 125, 375$
$3, 3$	27	$1, 27$	748	$1, 2, 4, 11, 17, 22, 34, 44, 68, 187, 374, 748$
		$3, 9$	108	$1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 27, 36, 54, 108$

Można teraz zaobserwować, że wśród dzielników liczby $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ zawsze znajduje się liczba $a + b + c + d$. Teraz nietrudno już domyślić się, że drugim składnikiem jest $a - b - c + d$ (lub dostrzec go wśród dzielników liczby $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$) i znaleźć rozkład

$$\begin{aligned}(a+b+c+d)(a-b-c+d) &= (a+d)^2 - (b+c)^2 = a^2 + 2ad + d^2 - b^2 - 2bc - c^2 = \\ &= a^2 + 2(b^2 + bc + c^2) + d^2 - b^2 - 2bc - c^2 = \\ &= a^2 + b^2 + c^2 + d^2.\end{aligned}$$

co kończy rozwiązanie zadania.

Kolejne zadanie pochodzi z I Olimpiady Matematycznej Gimnazjalistów.

Zadanie 2.7. Wyznacz wszystkie dodatnie liczby całkowite n, dla których liczba $14^n - 9$ jest pierwsza.

Rozwiązanie. Przyjrzyjmy się liczbom postaci $14^n - 9$ dla kolejnych liczb naturalnych n:

n	14^n	$14^n - 9$	n	14^n	$14^n - 9$
1	14	5	5	537824	537815
2	196	187	6	7529536	7529527
3	2744	2735	7	105413504	105413495
4	38416	38407	8	1475789056	1475789047

Dostrzegamy, że ostatnimi cyframi liczb 14^n-9 są na przemian 5 i 7. Mamy więc pierwszą hipotezę:

Hipoteza 1. Jeśli n jest liczbą nieparzystą, to liczba $14^n - 9$ jest podzielna przez 5.

Nietrudno sprawdzić, że ta hipoteza jest prawdziwa. Niech $n = 2k + 1$. Wówczas

$$14^n = 14^{2k+1} = 14 \cdot 196^k.$$

Popatrzmy teraz na cyfry jedności takiej liczby. Cyfrą jedności liczby 196^k jest 6. Po pomnożeniu przez 14 otrzymamy cyfrę jedności 4. Wreszcie po odjęciu 9 dostaniemy cyfrę jedności 5. Zatem liczba $14^n - 9$ dzieli się przez 5.

Popatrzmy teraz, co się dzieje dla parzystych n. Zauważamy, że

$$14^2 - 9 = 196 - 9 = 187 = 11 \cdot 17.$$

Trochę więcej wysiłku wymaga znalezienie rozkładu

$$14^4 - 9 = 38416 - 9 = 38407 = 193 \cdot 199.$$

Jeśli teraz dostrzeżemy prawidłowość

$$\begin{aligned} &14^2 - 9 = 11 \cdot 17 = (14 - 3)(14 + 3),\\ &14^4 - 9 = 193 \cdot 199 = (196 - 3)(196 + 3) = (14^2 - 3)(14^2 + 3) \end{aligned}$$

i potwierdzimy ją następnymi dwoma przykładami

$$\begin{aligned} &14^6 - 9 = 7529527 = 2741 \cdot 2747 = (2744 - 3)(2744 + 3) = (14^3 - 3)(14^3 + 3),\\ &14^8 - 9 = 1475789047 = 38413 \cdot 38419 = (38416 - 3)(38416 + 3) = (14^4 - 3)(14^4 + 3), \end{aligned}$$

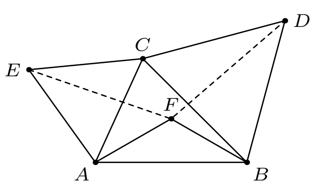
to będziemy mogli sformułować następną hipotezę:

Hipoteza 2. Jeśli $n = 2k$, to $14^n - 9 = (14^k - 3)(14^k + 3)$.

Jest to szczególny przypadek wzoru skróconego mnożenia $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$. Wielu uczniów oczywiście dostrzeże ten wzór od razu, innym może pomóc postępowanie opisane powyżej.

Tej wskazówce heurystycznej poświęciłem bardzo dużo miejsca. Uważam, że jest ona wyjątkowo przydatna — rozwija bowiem u uczniów spostrzegawczość i umiejętność stawiania hipotez. Są to umiejętności szczególnie potrzebne w pracy twórczej, a wielu naszych zdolnych uczniów będzie w przyszłości pracować twórczo. Przejdźmy teraz do następnych wskazówek heurystycznych.

(3) Czy znasz jakieś zadanie podobne? Czy możesz zastosować podobną metodę rozwiązania?



Rys. 15.14

Zadanie 3.1. Na bokach BC, CA i AB trójkąta ABC zbudowano po jego zewnętrznej stronie trójkąty równoboczne BCD i CAE. Na boku AB zbudowano po wewnętrznej stronie trójkąta ABC taki trójkąt ABF, że

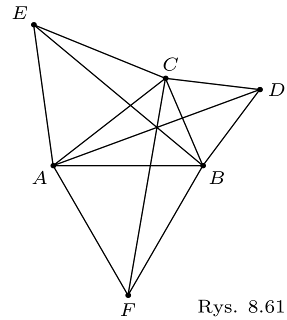
$$\measuredangle BAF = \measuredangle ABF = 30^\circ.$$

Udowodnij, że $DF = EF$ (rys. 15.14).

Widzieliśmy podobne zadanie. Oto ono:

Zadanie 28. (Zestaw III) Na bokach AB, BC i CA trójkąta ABC zbudowano (na zewnątrz tego trójkąta) trzy trójkąty równoboczne: AFB, BDC i CEA. Udowodnij, że (rys. 8.61)

$$AD = BE = CF.$$

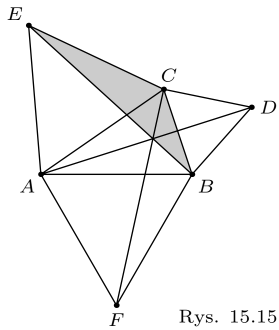


Rys. 8.61

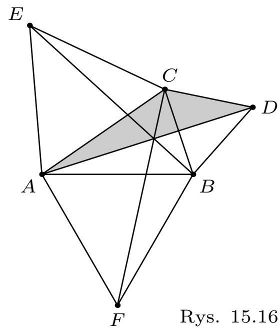
Tym razem pokażę nieco inne rozwiązanie. Udowodnię, że $AD = BE$. W tym celu wystarczy zauważyć, że trójkąty CEB i CAD są przystające. Jest tak, bowiem

$$CE = CA, \quad CB = CD, \quad \measuredangle BCE = \measuredangle BCA + 60^\circ = \measuredangle DCA.$$

Można też zauważyć, że trójkąt CAD (zacieniowany na rysunku 15.16) powstał z trójkąta CEB (zacieniowanego na rysunku 15.15) przez obrót o kąt 60°, przeciwnie do ruchu wskazówek zegara, wokół punktu C.



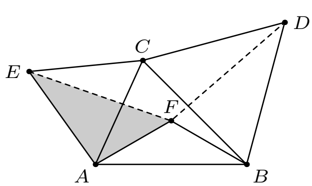
Rys. 15.15



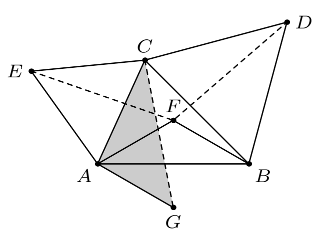
Rys. 15.16

Widzimy, że przy tym obrocie punkt C pozostał na swoim miejscu, punkt E przeszedł na punkt A oraz punkt B przeszedł na punkt D.

Mamy zadanie podobne do naszego. Spróbujmy zastosować podobną metodę rozwiązania. Dorysowane do trójkąta ABC trójkąty równoboczne znów sugerują nam obrót o kąt 60°. Ale jakie trójkąty obrócić i wokół którego wierzchołka? Nie mamy wielu możliwości, możemy narysować nawet wszystkie. Prawdopodobnie zauważymy wtedy, że jeśli obrócimy trójkąt AFE (zacieniowany na rysunku 15.17) wokół punktu A o kąt 60° zgodnie z ruchem wskazówek zegara, to punkt E przejdzie na punkt C, a punkt F przejdzie na punkt G, a więc trójkąt AFE przejdzie na trójkąt AGC (zacieniowany na rysunku 15.18):

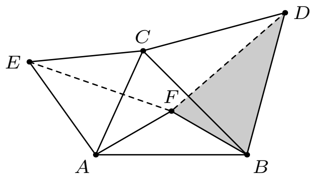


Rys. 15.17

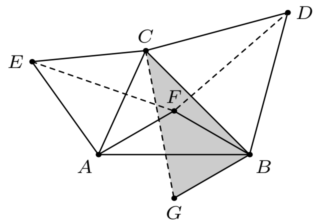


Rys. 15.18

Podobnie, jeśli obrócimy trójkąt BDF (zacieniowany na rysunku 15.19) wokół punktu o kąt 60°, tym razem przeciwnie do ruchu wskazówek zegara, to przejdzie on na trójkąt BCG (zacieniowany na rysunku 15.20):



Rys. 15.19



Rys. 15.20

Oczywiście tego, że jest to rzeczywiście ten sam punkt G, trzeba dowieść. Pozostawię szczegóły dowodu jako ćwiczenie, wspomnę tylko, że punkt G jest punktem symetrycznym do punktu F względem osi symetrii AB.

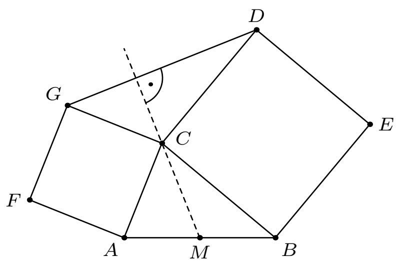
Inne przykłady podobnych zadań zobaczymy przy okazji wskazówki (6). W trakcie uczenia matematyki rozwiązujemy wiele zadań podobnych do tych, które rozwiązywaliśmy z uczniami wcześniej. To, że nauczanie matematyki jest w gruncie rzeczy bezustannym korzystaniem z tej zasady, powinno być oczywiste dla każdego nauczyciela matematyki. Wyczuwają to intuicyjnie także uczniowie. Rzecz w tym, by tę strategię heurystyczną uczniom uświadomić i by w wielu podobnych sytuacjach ją przypominać. Jest to bowiem bardzo silne uzasadnienie dla zachęcania uczniów do uczenia się zadań, które rozwiązują. Zapamiętane pomysły przydadzą się później w podobnych sytuacjach.

Trzy pierwsze wskazówki heurystyczne miały charakter ogólny. Nadawały się one do zastosowania w rozwiązaniach bardzo różnych zadań, niekoniecznie nawet matematycznych. Następne wskazówki mają charakter coraz bardziej szczegółowy.

(4) W jaki sposób możemy udowodnić równości różnych wielkości geometrycznych: odcinków, kątów, pól trójkątów?

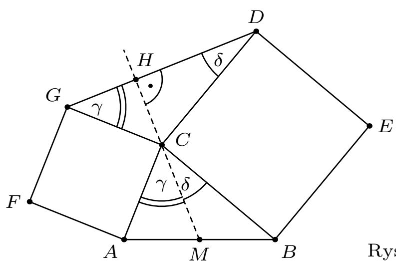
W tej wskazówce chodzi o to, by ucząc matematyki nie tylko pokazywać, co wynika z kolejnych wprowadzanych twierdzeń czy metod, ale także by pokazywać, skąd mogą się brać wnioski, do których dążymy. Na przykład, równość dwóch odcinków może wynikać z tego, że są to boki trójkąta równoramiennego (a więc jeśli wiemy, że w pewnym trójkącie dwa kąty są równe, to możemy wywnioskować stąd, że odpowiednie boki są równe). Inna metoda dowodzenia polega na znalezieniu trójkątów przystających. Jeszcze inna polega na zastosowaniu twierdzenia Pitagorasa czy twierdzenia Talesa. I tak dalej, można wyliczyć co najmniej kilkanaście różnych sposobów udowodnienia, że jakieś dwa odcinki są równe. Podobnie jest z kątami. Kąty przy podstawie trójkąta równoramiennego są równe. Możemy szukać trójkątów przystających lub podobnych (zwracam tu jednak uwagę na to, że z podobieństwem trójkątów uczniowie gimnazjum mają znacznie mniej do czynienia niż z przystawaniem). Możemy obliczyć miary kątów, korzystając z twierdzeń o sumie kątów trójkąta, czworokąta itp. Możemy dostrzec okrąg, w którym są to kąty wpisane oparte na równych łukach. Mogą to być kąty wierzchołkowe, odpowiadające czy naprzemianległe. Znów mamy ogromną paletę metod do wyboru. Warto przyzwyczajać uczniów do zadawania sobie pytań o to, w jaki sposób mogą oni udowodnić tego typu równości. Popatrzmy na przykład zadania, w którym warto sobie najpierw uświadomić, czego szukamy.

Zadanie 4.1. Na bokach BC i CA trójkąta ABC zbudowano po jego zewnętrznej stronie kwadraty $BCDE$ oraz $CAFG$. Prosta przechodząca przez punkt C i prostopadła do prostej DG przecina odcinek AB w punkcie M. Udowodnij, że $AM = MB$ (rys. 15.21).

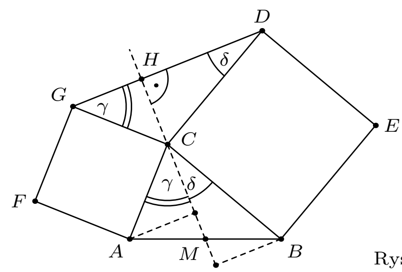


Rys. 15.21

Odcinki AM i BM nie są bokami trójkąta równoramiennego. Spróbujmy zatem szukać trójkątów przystających. Do tego bardzo przydaje się obliczenie kątów na rysunku. Na pewno dostrzeżemy dwie pary kątów równych (rys. 15.22).



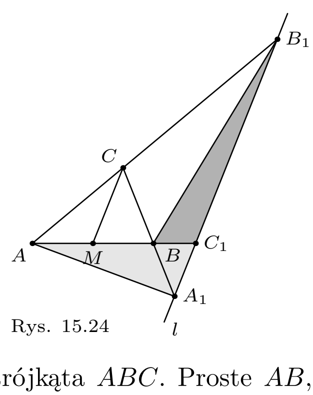
Rys. 15.22



Rys. 15.23

Teraz naturalne wydaje się szukanie trójkątów przystających do trójkątów DHC i GDC. Potrzebne są kąty proste oraz jeszcze jakiś bok. Kwadraty $BCDE$ i $ACGF$ sugerują, że trzeba szukać trójkątów, których boki będą bokami tych kwadratów. Ponieważ boki kwadratów są przeciwprostokątnymi trójkątów DHC i GDC, więc naturalne jest wybranie boków BC i AC. Poprowadźmy zatem z punktów A i B prostopadłe do prostej CM. Dokończenie dowodu pozostawię już jako ćwiczenie. Trzeba tylko wykazać przystawanie trzech par trójkątów (rys. 15.23). Inne zakończenie dowodu wykorzystuje następującą własność kątów: kąty o ramionach parami prostopadłych są równe lub dają w sumie 180°. W szczególności stąd wynika, że jeśli jeden kąt jest prosty, a drugi ma ramiona odpowiednio prostopadłe do ramion pierwszego kąta, to też jest prosty.

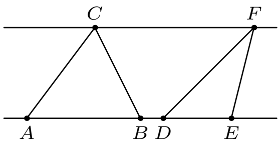
Następne zadanie pochodzi z tzw. Małej Olimpiady Matematycznej. Były to zawody matematyczne organizowane w latach 1991 – 2001 przez dwóch nauczycieli — Henryka Pawłowskiego z Torunia i Wojciecha Tomalczyka z Gdyni. Mała OM miała dwie wersje — dla uczniów klas I liceum (od 1995 roku dla klas I i II) oraz dla uczniów starszych klas liceum. Wybrane zadania pochodzą z zestawów dla klas I (lub I i II). Zadania z Małych Olimpiad Matematycznych można znaleźć w Internecie. Na stronie Olimpiady Matematycznej istnieje przekierowanie do strony, na której znajdują się te zadania.



Rys. 15.24

Zadanie 4.2. Prosta l jest równoległa do środkowej CM trójkąta ABC. Proste AB, BC i CA przecinają prostą l odpowiednio w punktach C_1, A_1 i B_1. Udowodnij, że pole trójkąta AA_1C_1 jest równe polu trójkąta BB_1C_1 (rys. 15.24).

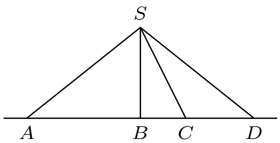
W tym zadaniu musimy sobie przypomnieć, co wiemy o polach trójkątów. Mamy oczywiście podstawowy wzór na pole trójkąta: $P = \frac{1}{2} \cdot ah$. Mamy też kilka twierdzeń, które warto znać. Oto one.



Rys. 15.25

Twierdzenie 1. Przypuśćmy, że mamy dane dwa trójkąty ABC i DEF, których podstawy AB i DE leżą na jednej prostej, a wierzchołki C i F na prostej do niej równoległej (rys. 15.25). Wówczas

$$\frac{P_{ABC}}{P_{DEF}} = \frac{AB}{DE}.$$



Rys. 15.26

Twierdzenie 2. Załóżmy, że podstawy AB i CD trójkątów ABS i CDS leżą na jednej prostej (rys. 15.26). Wtedy

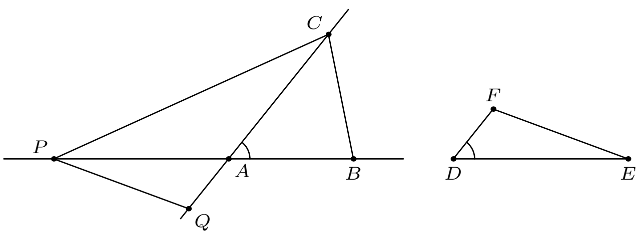
$$\frac{P_{ABS}}{P_{CDS}} = \frac{AB}{CD}.$$

Dowody tych dwóch twierdzeń pominę. Udowodnię natomiast następne twierdzenie, które w tej postaci jest mało znane.

Twierdzenie 3. Załóżmy, że dane są trójkąty ABC i DEF takie, że $\measuredangle BAC = \measuredangle EDF$. Wtedy

$$\frac{P_{ABC}}{P_{DEF}} = \frac{AB \cdot AC}{DE \cdot DF}.$$

Dowód. Na prostej AB, poza półprostą AB, wybieramy punkt P tak, by $AP = DE$. Podobnie na prostej AC, poza półprostą AC, wybieramy punkt Q tak, by $AQ = DF$. Poprowadzimy również odcinki CP i PQ (rys. 15.27).



Rys. 15.27

Wtedy oczywiście $\triangle APQ \equiv \triangle DEF$, skąd wynika, że $P_{APQ} = P_{DEF}$. Następnie, korzystając dwukrotnie z twierdzenia 2, otrzymujemy:

$$\frac{P_{ABC}}{P_{DEF}} = \frac{P_{ABC}}{P_{APQ}} = \frac{P_{ABC}}{P_{APC}} \cdot \frac{P_{APC}}{P_{APQ}} = \frac{AB}{AP} \cdot \frac{AC}{AQ} = \frac{AB \cdot AC}{AP \cdot AQ} = \frac{AB \cdot AC}{DE \cdot DF}.$$

Twierdzenie 4. Załóżmy, że dane są trójkąty ABC i DEF takie, że

$$\measuredangle BAC = 180^\circ - \measuredangle EDF.$$

Wtedy

$$\frac{P_{ABC}}{P_{DEF}} = \frac{AB \cdot AC}{DE \cdot DF}.$$

Twierdzenie 4 można łatwo wyprowadzić z twierdzenia 3. Szczegóły dowodu pozostawię jako ćwiczenie. Twierdzenia 3 i 4 są w istocie geometrycznymi postaciami wzoru trygonometrycznego na pole trójkąta: $P = \frac{1}{2} \cdot ab \sin\gamma$, gdzie γ jest kątem między bokami a i b. Tego wzoru oczywiście nie podaję gimnazjalistom, ale twierdzenia 3 i 4 ten wzór zastępują.

Powróćmy do zadania 4.2. Możemy zauważyć, że zacieniowane trójkąty spełniają założenia twierdzenie 4:

$$\measuredangle AC_1A_1 = 180^\circ - \measuredangle BC_1B_1.$$

Mamy zatem

$$\frac{P_{AA_1C_1}}{P_{BB_1C_1}} = \frac{AC_1 \cdot A_1C_1}{BC_1 \cdot B_1C_1}.$$

Teraz wystarczy skorzystać z podobieństwa trójkątów:

$$\triangle\, AMC \sim \triangle\, AC_1B_1 \quad \text{oraz} \quad \triangle\, BCM \sim \triangle\, BA_1C_1.$$

Mamy wówczas

$$\frac{B_1C_1}{AC_1} = \frac{CM}{AM} = \frac{CM}{BM} = \frac{A_1C_1}{BC_1},$$

skąd wynika, że $AC_1 \cdot A_1C_1 = BC_1 \cdot B_1C_1$. Zatem $P_{AA_1C_1} = P_{BB_1C_1}$.

Zauważmy, że w rozwiązaniu zadania 4.2 najważniejsze było skojarzenie tezy z twierdzeniem 4. Taki jest właśnie sens tej wskazówki heurystycznej. Powtórzę — ma ona uświadomić uczniom, że w rozwiązywaniu zadań matematycznych ważne jest nie tylko to, co wynika z danych, ale także to, co będzie na samym końcu. Bardzo często rozwiązanie zadania polega na przeanalizowaniu tego, co wiemy i wyciągnięciu pierwszych wniosków z założeń czy danych oraz na zastanowieniu się, skąd ostatecznie wyniknie teza twierdzenia czy skąd otrzymamy ostateczny wynik. To zbliża nas do rozwiązania z obu stron. Można powiedzieć, że skraca odległość między założeniem i tezą czy danymi i wynikiem. To skrócenie odległości może być na tyle duże, że brakujący fragment rozwiązania dostrzeżemy od razu. Tak jest w zadaniu 4.2. Z jednej strony równoległość prostych CM i l pozwala dostrzec dwie naturalne pary trójkątów podobnych (choć w tej chwili może jeszcze nie być widoczne, do czego one mogą się przydać). Z drugiej strony, twierdzenie 4 pokazuje, że mamy udowodnić równość $AC_1 \cdot A_1C_1 = BC_1 \cdot B_1C_1$. Skojarzenie trójkątów podobnych z tą równością jest już chyba dość łatwe.

(5) Jakie znasz twierdzenia o tym, że pewne proste lub okręgi mają punkt wspólny?

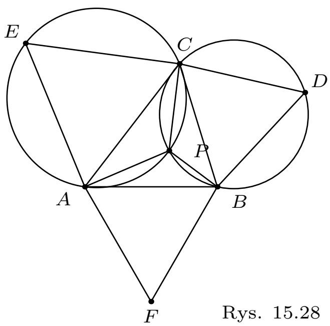
Wiele zadań geometrycznych polega na udowodnieniu, że pewne trzy proste przecinają się w jednym punkcie. W jaki sposób możemy rozwiązać takie zadanie? Po pierwsze, istnieje kilka twierdzeń mówiących o tym, że pewne trzy proste w trójkącie przecinają się w jednym punkcie, jednym z tzw. punktów szczególnych trójkąta:

Twierdzenie 5.1. Symetralne boków trójkąta przecinają się w jednym punkcie.
Twierdzenie 5.2. Dwusieczne kątów trójkąta przecinają się w jednym punkcie.
Twierdzenie 5.3. Wysokości trójkąta (a dokładniej: proste zawierające wysokości trójkąta) przecinają się w jednym punkcie.
Twierdzenie 5.4. Środkowe trójkąta przecinają się w jednym punkcie.

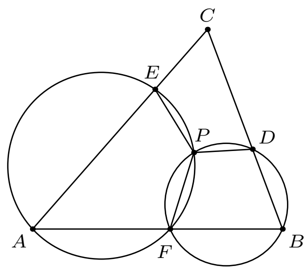
Innym twierdzeniem tego typu jest twierdzenie Carnota, omówione wraz z zastosowaniami w artykule [Guzicki-Pompe-1]. Jeszcze inne to twierdzenie Cevy oraz twierdzenie mówiące, że osie potęgowe trzech okręgów o niewspółliniowych środkach przecinają się w jednym punkcie. Tymi twierdzeniami nie będziemy się tu jednak zajmować, odłożymy to do liceum. Warto natomiast uświadomić uczniom, jakich metod używa się do dowodu tych twierdzeń. Jedną z takich metod jest przecięcie dwóch z rozważanych prostych i wykazanie, że punkt przecięcia leży na trzeciej (tak na przykład dowodzi się twierdzeń 5.1 i 5.2).

Podobny problem i podobna metoda rozwiązania może dotyczyć trzech okręgów. Udowodnimy na przykład twierdzenie mówiące, że jeśli na bokach trójkąta ABC zbudujemy (na zewnątrz tego trójkąta) trzy trójkąty równoboczne, to okręgi opisane na tych trójkątach równobocznych mają punkt wspólny.

Niech P będzie punktem przecięcia okręgów opisanych na trójkątach ACE i BDC. Połączmy punkt P z punktami A, B i C (rys. 15.28). Zauważmy, że czworokąt $APCE$ jest wpisany w okrąg. Stąd wynika, że $\measuredangle APC = 120°$. Czworokąt $BDCP$ też jest wpisany w okrąg, więc $\measuredangle BPC = 120°$. Zatem $\measuredangle APB = 120°$, czyli $\measuredangle APB + \measuredangle AFB = 180°$. Punkty A, P, B i F leżą więc na jednym okręgu.



Rys. 15.28



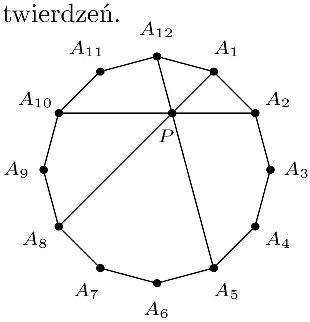
Rys. 15.29

Inne twierdzenie mówi, że jeśli na bokach BC, AC i AB trójkąta ABC wybierzemy odpowiednio punkty D, E i F, to okręgi opisane na trójkątach AEF, BDF i CDE mają punkt wspólny. Dowód znów polega na wykazaniu, że punkt przecięcia dwóch z tych okręgów leży na trzecim. Niech P będzie punktem przecięcia okręgów opisanych na trójkątach AFE i BDF (rys. 15.29). Wtedy

$$\measuredangle EPF = 180° - \measuredangle A \quad \text{oraz} \quad \measuredangle DPF = 180° - \measuredangle B.$$

Stąd wynika, że $\measuredangle DPE = 180° - \measuredangle C$, czyli że punkty C, E, P i D leżą na jednym okręgu.

Jako ilustrację omawianej wskazówki heurystycznej pokażę jeszcze jedno zadanie. Rozwiązanie polega na znalezieniu odpowiedniego trójkąta i skorzystaniu z jednego z powyższych twierdzeń.



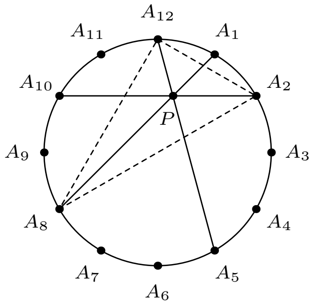
Rys. 15.30

Zadanie 5.1. Udowodnij, że przekątne A_1A_8, A_2A_{10} oraz A_5A_{12} dwunastokąta foremnego $A_1A_2 \ldots A_{12}$ przecinają się w jednym punkcie (rys. 15.30).

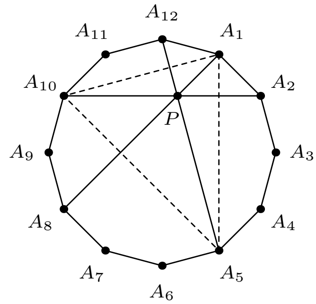
Rozważmy okrąg opisany na rozważanym dwunastokącie foremnym (rys. 15.31). Popatrzmy na trójkąt $A_{12}A_2A_8$. Nietrudno zauważyć, że

$$\begin{aligned} \measuredangle A_{12}A_8A_1 &= \measuredangle A_2A_8A_1 = 15°, \\ \measuredangle A_{12}A_2A_{10} &= \measuredangle A_8A_2A_{10} = 30°, \\ \measuredangle A_2A_{12}A_5 &= \measuredangle A_8A_{12}A_5 = 45°. \end{aligned}$$

Zatem przekątna A_8A_1 jest dwusieczną kąta A_8 trójkąta $A_{12}A_2A_8$, przekątna A_2A_{10} jest dwusieczną kąta A_2 oraz przekątna $A_{12}A_5$ jest dwusieczną kąta A_{12}. Trzy dwusieczne kątów trójkąta przecinają się w jednym punkcie, więc punkt P na rysunku jest rzeczywiście punktem przecięcia tych trzech przekątnych. Można również wykazać, że te trzy przekątne zawierają wysokości trójkąta $A_1A_{10}A_5$ (rys. 15.32).



Rys. 15.31

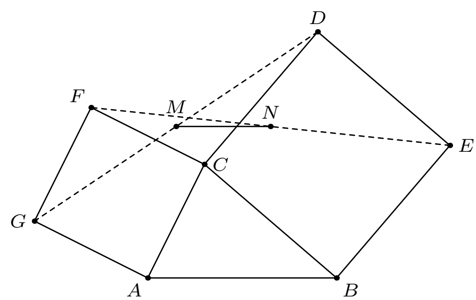


Rys. 15.32

Nietrudny dowód pozostawię jako ćwiczenie.

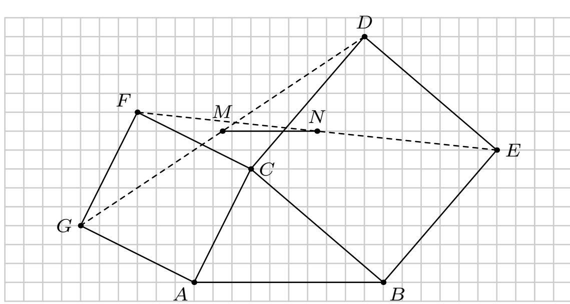
(6) Masz udowodnić jakąś własność pewnego punktu. Zrób staranny rysunek, zmierz różne odcinki i kąty. Czy możesz zdefiniować ten punkt inaczej i wtedy udowodnić tezę?

Zadanie 6.1. Dany jest trójkąt ABC o bokach długości $BC = a$, $AC = b$ i $AB = c$. Na bokach BC i AC trójkąta ABC zbudowano (na zewnątrz trójkąta) kwadraty $BCDE$ i $ACFG$. Punkty M i N są odpowiednio środkami odcinków DG i EF (rys. 15.33). Oblicz długość odcinka MN.



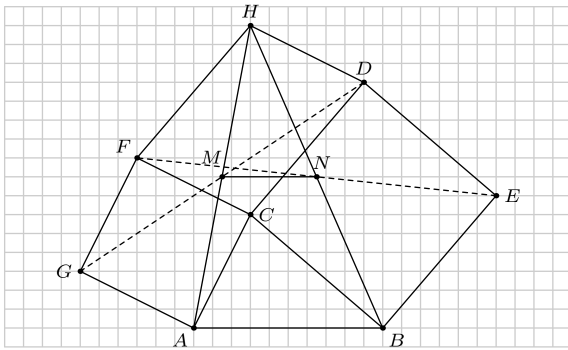
Rys. 15.33

Rozwiązywanie zadania zacznijmy od bardzo starannego rysunku. Szczególnie dobrze wygląda on na papierze w kratkę (rys. 15.34):



Rys. 15.34

Zauważamy, że odcinek MN jest równoległy do podstawy AB trójkąta i ma długość równą połowie AB. Sugeruje to, że mamy do czynienia z linią środkową pewnego trójkąta. Poprowadźmy zatem proste AM i BN, zaznaczmy punkt ich przecięcia, H i połączmy go z punktami D i F (rys. 15.35):



Rys. 15.35

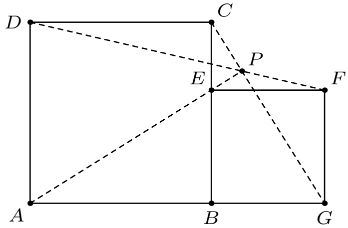
Bez trudu dostrzeżemy, że czworokąt $CDHF$ jest równoległobokiem.

To jest najważniejszy moment w rozwiązaniu zadania. Teraz odwracamy rozumowanie. Zaczynamy od narysowania punktu H jako czwartego wierzchołka równoległoboku $CDHF$. Odcinki CF i DH są równe i równoległe. Podobnie, odcinki AG i CF są równe i równoległe. Zatem odcinki AG i DH są równe i równoległe. Stąd wynika, że czworokąt $ADHG$ jest równoległobokiem. Punkt M jest środkiem przekątnej GD tego równoległoboku, a więc jest punktem przecięcia obu przekątnych. Zatem jest on też środkiem drugiej przekątnej, czyli środkiem odcinka AH. Podobnie dowodzimy, że czworokąt $BEHF$ jest równoległobokiem, a więc punkt N jest środkiem odcinka BH. Zatem odcinek MN jest rzeczywiście linią środkową w trójkącie ABH i stąd wynika, że $MN = \frac{1}{2} \cdot AB = \frac{c}{2}$.

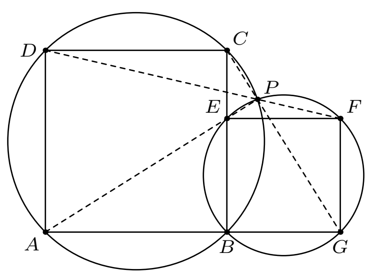
Właściwy wybór punktu H jest kluczem do rozwiązania zadania. Widzimy, że staranny rysunek pozwala dostrzec właśnie ten punkt, a to na pierwszy rzut oka może nie być przez ucznia dostrzeżone.

W następnych zadaniach pokażę, w jaki sposób inne określenie punktów istotnych w zadaniu ułatwia rozwiązanie tego zadania. Pierwsze z tych zadań znamy z rozdziału o funkcjach.

Zadanie 6.2. Dany jest kwadrat $ABCD$ i punkt E leżący na boku BC. Na zewnątrz kwadratu $ABCD$ budujemy kwadrat $BEFG$ (rys. 15.36). Udowodnij, że proste AE, CG i DF przecinają się w jednym punkcie.



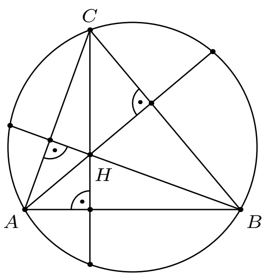
Rys. 15.36



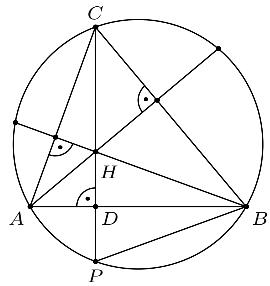
Rys. 15.37

Rozwiązanie, które pokazałem, polegało na innym zdefiniowaniu szukanego punktu. Mianowicie, okręgi opisane na obu kwadratach mają dwa punkty wspólne — punkt B i jeszcze jeden punkt P, o którym dość łatwo dowodzi się, że leży na trzech rozważanych prostych (rys. 15.37).

Zadanie 6.3. Punkt H jest punktem przecięcia wysokości trójkąta ostrokątnego ABC. Wykaż, że punkty symetryczne do punktu H względem prostych AB, BC i CA leżą na okręgu opisanym na trójkącie ABC (rys. 15.38).



Rys. 15.38



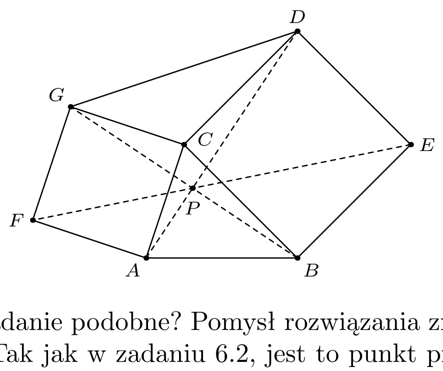
Rys. 15.39

Rozwiązanie tego zadania polega na tym, by przedłużyć wysokości trójkąta ABC do przecięcia z okręgiem opisanym na trójkącie i udowodnić, że otrzymane punkty są symetryczne do ortocentrum względem boków. Niech na przykład punkt P będzie punktem przecięcia półprostej CH z okręgiem opisanym na trójkącie ABC (rys. 15.39). Wówczas nietrudno zauważyć, że

$$\measuredangle DBP = \measuredangle ABP = \measuredangle ACP = 90^\circ - \measuredangle CAB = \measuredangle DBH.$$

Stąd łatwo wynika, że trójkąty DBP i DBH są przystające, a więc $DP = DH$. Punkty P i H są więc symetryczne względem prostej AB. To znaczy, że punkt symetryczny do punktu H względem tej prostej leży na okręgu opisanym na trójkącie ABC.

Zadanie 6.4. Na bokach BC i AC trójkąta ostrokątnego ABC zbudowano, po zewnętrznej stronie, kwadraty $BCDE$ i $ACGF$ (rys. 15.40). Udowodnij, że proste AD, BG i EF przecinają się w jednym punkcie.



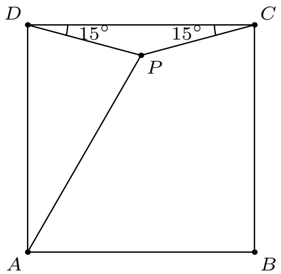
Rys. 15.40

Czy widzieliśmy zadanie podobne? Pomysł rozwiązania znów polega na nowym zdefiniowaniu punktu P. Tak jak w zadaniu 6.2, jest to punkt przecięcia okręgów opisanych na kwadratach. Szczegóły dowodu pozostawię jako ćwiczenie.

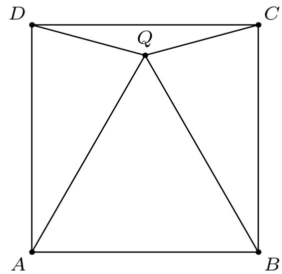
Zadanie 6.5. Wewnątrz kwadratu $ABCD$ wybrano taki punkt P, że

$$\measuredangle PCD = \measuredangle PDC = 15^\circ$$

(rys. 15.41). Oblicz miarę kąta APD.



Rys. 15.41



Rys. 15.42

Jeśli zmierzymy kąty na rysunku 15.41, to przekonamy się, że

$$\measuredangle ADP = \measuredangle APD = 75^\circ, \quad \measuredangle DAP = 30^\circ \quad \text{oraz} \quad \measuredangle BAP = 60^\circ.$$

To sugeruje następującą konstrukcję. Narysujmy wewnątrz kwadratu trójkąt równoboczny ABQ i połączmy punkt Q z wierzchołkami C i D (rys. 15.42). Teraz oczywiście

$$\measuredangle BAQ = \measuredangle ABQ = 60^\circ \quad \text{oraz} \quad \measuredangle DAQ = \measuredangle CBQ = 30^\circ.$$

Wiemy także, że $AD = AQ = BQ = BC$. Trójkąty AQD i BQC są zatem równoramienne i stąd dostajemy

$$\measuredangle ADQ = \measuredangle AQD = \measuredangle BQC = \measuredangle BCQ = 75^\circ.$$

Zatem

$$\measuredangle QCD = \measuredangle QDC = 15^\circ.$$

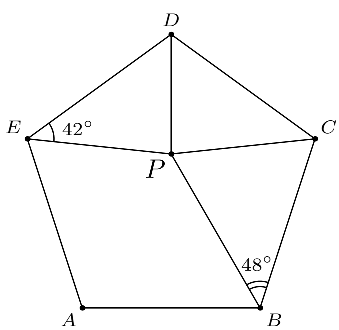
Skonstruowany punkt Q jest zatem punktem P z naszego zadania. Warunek

$$\measuredangle PCD = \measuredangle PDC = 15^\circ$$

wyznacza bowiem jednoznacznie punkt P wewnątrz kwadratu. Mamy zatem odpowiedź:

$$\measuredangle APD = \measuredangle AQD = 75^\circ.$$

Zadanie 6.6. Wewnątrz pięciokąta foremnego $ABCDE$ wybrano taki punkt P, że $\measuredangle PBC = 48^\circ$ oraz $\measuredangle PED = 42^\circ$ (rys. 15.43). Oblicz miarę kąta CPD.



Rys. 15.43

To zadanie rozwiązujemy w podobny sposób. Najpierw inaczej definiujemy punkt P. Staranny rysunek znów sugeruje, że punkt P jest wierzchołkiem trójkąta równobocznego ABP. Skorzystamy ponadto z symetrii pięciokąta foremnego. Symetralna boku AB jest osią symetrii pięciokąta, punkty D i P leżą na tej osi. Teraz obliczamy wszystkie możliwe kąty utworzone na rysunku. Ponieważ kąt wewnętrzny pięciokąta foremnego jest równy 108° oraz $AE = BC = AB = AP = BP$, więc

$$\measuredangle EAP = \measuredangle CBP = 48^\circ \quad \text{oraz} \quad \measuredangle AEP = \measuredangle APE = \measuredangle BCP = \measuredangle BPC = 66^\circ.$$

Stąd wynika, że $\measuredangle PED = \measuredangle PCD = 42^\circ$. Wreszcie półprosta DP jest dwusieczną kąta CDE, skąd wynika, że $\measuredangle CDP = \measuredangle EDP = 54^\circ$. Teraz obliczamy, że

$$\measuredangle EPD = \measuredangle CPD = 84^\circ.$$

Należy zauważyć, że warunek

$$\measuredangle PBC = 48^\circ \quad \text{oraz} \quad \measuredangle PED = 42^\circ$$

definiuje jednoznacznie punkt P wewnątrz pięciokąta foremnego $ABCDE$, a więc zdefiniowany przez nas na nowo punkt P jest dokładnie tym samym punktem P, który został zdefiniowany w zadaniu.

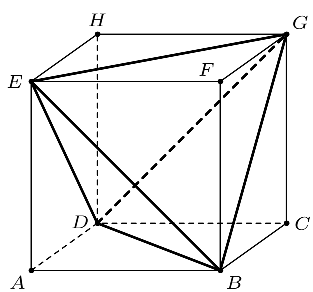
To kończy rozwiązanie zadania, a odpowiedź brzmi: $\measuredangle CPD = 84^\circ$.

(7) Wpisz czworościan foremny w sześcian.

Wiele zadań dotyczących czworościanu foremnego można rozwiązać łatwiej, jeśli popatrzymy na ten czworościan jak na fragment sześcianu. Ogólnie, w przypadku dowolnego czworościanu, możemy utworzyć równoległościan, którego częścią jest ten czworościan. Nie będę tu omawiał dokładniej tej sytuacji ogólnej, ograniczę się do czworościanu foremnego.

Zadanie 7.1. Oblicz objętość czworościanu foremnego o krawędzi równej a.

Popatrzmy na sześcian $ABCDEFGH$. Czworościan foremny jest to czworościan o wierzchołkach B, D, E i G (rys. 15.44):



Rys. 15.44

Krawędzie czworościanu są przekątnymi ścian sześcianu. Ponieważ krawędź czworościanu jest równa a, więc krawędź sześcianu jest równa $b = \frac{a}{\sqrt{2}}$. Czworościan powstaje z sześcianu przez odcięcie czterech ostrosłupów. Popatrzmy na jeden z nich. Jego podstawą jest trójkąt ABD, a wysokością odcinek AE. Objętość tego ostrosłupa jest zatem równa

$$V_{ABDE} = \frac{1}{3} \cdot \frac{b^2}{2} \cdot b = \frac{b^3}{6}.$$

Po odcięciu czterech takich ostrosłupów zostanie czworościan foremny o objętości

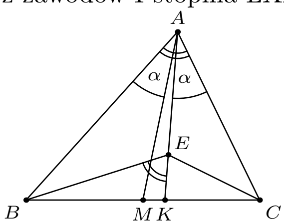
$$V_{BDEG} = \frac{1}{3} \cdot b^3 = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^3}{2\sqrt{2}} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}.$$

Inne zadanie polega na obliczeniu promienia kuli stycznej do wszystkich krawędzi czworościanu. Bez trudu zauważamy, że jest to kula wpisana w sześcian, a więc ma promień równy

$$r = \frac{b}{2} = \frac{a}{2\sqrt{2}} = \frac{a\sqrt{2}}{4}.$$

(8) Przedłuż środkową.

Jednym z często stosowanych pomysłów w geometrii jest przedłużenie środkowej. Widzieliśmy już ten pomysł w kilku zadaniach: 20 (zestaw II), 21 punkt e) (zestaw III), 35 (zestaw IV), 38 (zestaw IV). Ten sam pomysł można było wykorzystać w zadaniu 8 z zawodów I stopnia LXII Olimpiady Matematycznej.

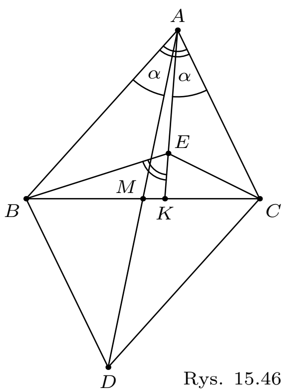


Rys. 15.45

Zadanie 8.1. Punkt M jest środkiem boku BC trójkąta ostrokątnego ABC. Punkt K leży na boku BC i spełnia warunek $\measuredangle BAM = \measuredangle KAC$. Na odcinku AK wybrano taki punkt E, że $\measuredangle BEK = \measuredangle BAC$. Udowodnij, że

$$\measuredangle KEC = \measuredangle BAC.$$

Rozwiązanie. Przyjmijmy oznaczenia: $\measuredangle BAM = \measuredangle KAC = \alpha$ (rys. 15.45). Zróbmy to, co się narzuca — przedłużmy środkową (rys. 15.46). Punkt D leży na półprostej AM oraz $AM = MD$. Jak wiemy, czworokąt $ABDC$ jest równoległobokiem. Stąd wynika, że $\measuredangle ABD = 180^\circ - \measuredangle BAC$. Ponadto



Rys. 15.46

$$\measuredangle BEA = 180^\circ - \measuredangle BEK = 180^\circ - \measuredangle BAC = \measuredangle ABD.$$

Następnie

$$\measuredangle EBA = \measuredangle BEK - \measuredangle BAE = \measuredangle BAC - \measuredangle BAE = \measuredangle EAC = \alpha.$$

Mamy zatem

$$\measuredangle ABD = \measuredangle BEA \quad \text{oraz} \quad \measuredangle BAD = \measuredangle EBA.$$

Stąd wynika, że $\triangle ABD \sim \triangle BEA$. Mamy zatem proporcję

$$\frac{AD}{BD} = \frac{AB}{AE},$$

z której wynika, że

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AE}{BD} = \frac{AE}{AC}.$$

Ale $\measuredangle BAD = \alpha = \measuredangle EAC$, więc $\triangle BAD \sim \triangle EAC$. Zatem $\measuredangle ABD = \measuredangle AEC$. Stąd dostajemy

$$\measuredangle KEC = 180^\circ - \measuredangle AEC = 180^\circ - \measuredangle ABD = \measuredangle BAC,$$

co kończy dowód.

Przedłużenie środkowej i dostrzeżenie dwóch par trójkątów podobnych — aż dziwne, jak proste okazało się rozwiązanie tego zadania. Wielu zawodników rozwiązywało je zupełnie inaczej.

Zauważmy, że półprosta AK jest symetryczna do półprostej AM względem dwusiecznej kąta BAC. Środkowa bywa nazywana medianą — ta nazwa wywodzi się z łaciny. Półprosta AK jest więc symetryczna do mediany — dlatego nazywamy ją symedianą. Zadanie 8.1 można wyprowadzić z podstawowych własności symedian w trójkącie i wielu zawodników tak właśnie rozwiązywało to zadanie. Takie rozwiązanie wymagało oczywiście nauczenia się tych własności symedian. Natomiast jedna z uczestniczek mojego kółka matematycznego, gdy omawialiśmy zadania z Olimpiady, zgłosiła się do pokazania swojego rozwiązania i powiedziała: „Słyszałam od kolegów, że to zadanie można łatwo rozwiązać, korzystając z symedian, ale ja nie wiem, co to są symediany, więc zrobiłam to, co jest najprostsze — przedłużyłam środkową”. Proste pomysły często prowadzą do krótkich i eleganckich rozwiązań.

16. Kółka, zajęcia seminaryjne, warsztaty

Trzy rodzaje zajęć, które teraz omówię, to zajęcia rozszerzające omawiany program. Kółka i warsztaty są to zajęcia w dodatkowym czasie, przeznaczone dla uczniów, którzy chcą poświęcić więcej czasu przygotowaniom do zawodów matematycznych. Na tych zajęciach uczniowie przede wszystkim rozwiązują dodatkowe zadania. Dodatkowy materiał teoretyczny, który na wielu zajęciach musi być przedstawiony uczniom, służy przede wszystkim wprowadzeniu nowych metod rozwiązywania zadań konkursowych. Inaczej jest na zajęciach seminaryjnych, których celem jest rozszerzenie wiedzy teoretycznej uczniów. Omówię teraz krótko te trzy rodzaje zajęć.

1. Kółka matematyczne

Kółka odbywają się regularnie po lekcjach, zazwyczaj po jednej godzinie tygodniowo. Uczniowie dostają zestawy zadań, które wspólnie rozwiązują w czasie zajęć. Zestaw zadań może być „monotematyczny" (tzn. wszystkie zadania są poświęcone jednemu zagadnieniu lub jednej metodzie rozwiązania) lub wielotematyczny (na przykład zestaw zadań z konkretnych zawodów matematycznych). Czasami zestaw zadań jest poprzedzony krótkim wprowadzeniem teoretycznym — takie wprowadzenie często jest przedstawiane ustnie przez nauczyciela na początku zajęć. Dzieje się tak na ogół wtedy, gdy całe kółko jest poświęcone jednemu tematowi. Początkowe zadania są wówczas rozwiązywane przez nauczyciela i stają się w ten sposób wzorcem dla pozostałych zadań. W przypadku, gdy kółko jest poświęcone konkretnym zawodom matematycznym (na przykład zadaniom z zawodów II stopnia OMG z jednego z ubiegłych lat), każde zadanie jest traktowane odrębnie i zdarza się, że przy okazji takiego zadania wprowadzam uczniom nowy materiał teoretyczny i pokazuję nowe metody rozwiązania.

Skąd czerpać zadania na kółka? Uważam, że przede wszystkim z poprzednich zawodów matematycznych. Staram się omówić na kółkach zadania z poprzednich OMG, wybieram zadania z poprzednich Konkursów Wojewódzkich, a także łatwiejsze zadania z Olimpiady Matematycznej. Szczególnie przydatne są tu zadania z pierwszych Olimpiad Matematycznych (zwłaszcza pierwsze dwa tomy zadań olimpijskich S. Straszewicza [Straszewicz]). Takie kółko można zacząć już w drugim semestrze I klasy. Zazwyczaj nie zaczynam kółka dla I klasy od początku roku szkolnego, dając uczniom czas na przyzwyczajenie się do nowych wymagań i nie przeciążając ich zanadto na początku roku szkolnego. Kółko prowadzę następnie co najmniej przez całą II klasę i pierwszy semestr III klasy — dopóki uczniowie startują w OMG. W niektórych latach zdarzało się, że kontynuowałem kółko do końca gimnazjum, a nawet dla licealistów, którzy, będąc już w innych szkołach, ciągle przychodzili na moje kółka, by na nich przygotywywać się do startu w Olimpiadzie Matematycznej. Podstawą w gimnazjum są jednak dwa lata kółka „gimnazjalnego", trwającego od II semestru I klasy do końca I semestru III klasy.

2. Warsztaty matematyczne

Jedną z najważniejszych form przygotowań do Olimpiady Matematycznej Gimnazjalistów są tzw. warsztaty matematyczne. Wyjaśnię teraz, co to są warsztaty matematyczne, a w następnym rozdziale pokażę kilka przykładowych zestawów zadań, które na takich warsztatach można wykorzystać.

Warsztaty matematyczne są to zajęcia podobne do kółka matematycznego. Na warsztatach pokazuję uczniom nowe sposoby rozwiązywania zadań, uczniowie też rozwiązują zadania. Różnica polega na tym, że nie są to zajęcia krótkie (np. jednogodzinne), odbywające się dość rzadko (np. raz w tygodniu), ale są one długie, wielogodzinne, skoncentrowane w krótkim czasie (np. od piątku do poniedziałku). Organizowałem dla moich uczniów dwa rodzaje warsztatów: wyjazdowe i stacjonarne. Moje doświadczenie podpowiada mi, że warsztaty wyjazdowe są znacznie bardziej efektywne, jednak ich zorganizowanie jest bardziej kłopotliwe, są one kosztowne i lepsze efekty osiąga się raczej z licealistami niż z gimnazjalistami. Warsztaty stacjonarne są łatwiejsze do zorganizowania i są chyba bardziej odpowiednie dla gimnazjalistów.

Organizowałem warsztaty wyjazdowe długie (trwały cały tydzień, nawet z obydwoma weekendami włącznie) oraz krótsze (trwające zazwyczaj ok. 5 dni, np. od czwartku do poniedziałku lub od piątku do wtorku). Plan pracy na warsztatach wyjazdowych był następujący: po śniadaniu uczestnicy samodzielnie rozwiązywali zadania — tak jak na Olimpiadzie. Zazwyczaj dawałem 5 zadań na 3 godziny. Po krótkiej przerwie omawialiśmy rozwiązania tych zadań, podobnie do omówień stosowanych zazwyczaj po zawodach obu Olimpiad. Zdarzało się, że nie zdążaliśmy omówić wszystkich zadań, wtedy kończyliśmy omawianie w czasie zajęć popołudniowych. Po obiedzie zawsze był zaplanowany czas na zajęcia rekreacyjne, np. grę w piłkę. Około godziny 16 rozpoczynaliśmy zajęcia popołudniowe. W czasie tych zajęć omawialiśmy rozwiązania innych zadań. Były to zadania, które uczestnicy otrzymywali do rozwiązania jeszcze przed warsztatami (tzw. zadania przygotowawcze) oraz „zadania nocne". Były to zadania, które uczestnicy rozwiązywali w czasie warsztatów, wieczorami po zajęciach. Zasadą było to, że w czasie zajęć porannych uczestnicy pracują całkowicie samodzielnie. W czasie wieczornego rozwiązywania zadań uczestnicy warsztatów pracują samodzielnie lub w grupach. Szczególnie polecałem im pracę zbiorową. Wspólna praca nad zadaniami dawała z reguły znacznie lepsze rezultaty. Po pierwsze, łatwiej wpaść na pomysł rozwiązania — różne pomysły uczniów uzupełniają się. Po drugie, uczniowie uczą się od siebie nawzajem. Jest to niezwykle efektywna metoda uczenia się. Rozwiązania zadań nocnych są omawiane na ogół już następnego dnia.

Wielokrotnie widziałem, że uczestnicy warsztatów siedzieli nad zadaniami do późnej nocy, tak bardzo ta praca ich wciągała. Mam wrażenie, że właśnie ta wspólna praca nocna dawała na warsztatach największe efekty i uczestnicy w tym właśnie czasie uczyli się najwięcej.

W czasie długich warsztatów wyjazdowych zawsze planowałem czas na jakąś wycieczkę. Przez wiele lat organizowałem warsztaty w Bieszczadach, wspólnie z moim przyjacielem — nauczycielem w Liceum Ogólnokształcącym im. KEN w Stalowej Woli, Waldemarem Rożkiem. W czasie takich warsztatów zawsze organizowaliśmy dwie wycieczki w góry: jedną całodniową i drugą na pół dnia. Jak też wspomniałem, dbaliśmy zawsze o to, by uczestnicy mieli codzienną dawkę ruchu — sportu lub dłuższego spaceru. W czasie warsztatów krótkich ograniczałem się do jednej wycieczki, zazwyczaj przedpołudniowej.

Warsztaty stacjonarne, a takie najczęściej organizowałem dla gimnazjalistów, są nieco inne. Nie ma przede wszystkim zadań nocnych. Uczestnicy mieszkają w swoich domach i wieczorem oczywiście nie będą się spotykać, by razem rozwiązywać zadania. Gimnazjaliści są poza tym zbyt młodzi, by sugerować im pracę późno wieczorem. Tak więc, praca na warsztatach stacjonarnych ogranicza się do rozwiązywania zadań samodzielnie, omawiania tych zadań oraz do krótkiej pracy wspólnej w czasie dłuższej przerwy. Takie warsztaty organizowałem zawsze w budynku szkolnym; uczestnicy mieli więc do dyspozycji boisko. W czasie dłuższej przerwy zazwyczaj grali w piłkę. Robiłem też często drugą przerwę na pracę w grupach nad zadaniami.

Na niektórych warsztatach prowadziłem również krótkie wykłady dla uczestników. Uczyłem „teorii" potrzebnej w rozwiązywaniu nowych typów zadań. Starałem się jednak, by wykład nie był zbyt długi i by główną część wykładu stanowiły zadania. Nie chodziło przecież o uczenie nowych działów matematyki, ale o pokazanie kilku nowych pomysłów potrzebnych przy rozwiązywaniu zadań olimpijskich.

Trzeba wreszcie przejść do zadań. Jak wspomniałem, uczestnicy dostają przed warsztatami kilka zestawów zadań do rozwiązania w domu lub w czasie warsztatów. Ponadto dostają do rozwiązania (w czasie pracy samodzielnej) po jednym zestawie zadań na każdy dzień. Wreszcie dostają zadania na warsztatach do rozwiązania w grupach lub samodzielnie wieczorem w domu. Na czterodniowe warsztaty stacjonarne dla gimnazjalistów przygotowuję zazwyczaj około 80 zadań. Uczniowie dostają 4 zestawy po 5 zadań do pracy samodzielnej, 3 lub 4 zestawy po 4 – 5 zadań do pracy w grupach lub wieczorem w domu i około 45 zadań przygotowawczych. Zadania przygotowawcze dostają mniej więcej na tydzień lub dwa tygodnie przed warsztatami. Na dłuższe warsztaty wyjazdowe przygotowywałem oczywiście znacznie więcej zadań. Każdego dnia uczniowie rozwiązywali samodzielnie 5 zadań, dostawali około 10 zadań nocnych i omawialiśmy około 10 zadań przygotowawczych. Na 7 dni pracy należało więc przygotować ponad 150 zadań.

Skąd brać tyle zadań na warsztaty? Na warsztatach dla licealistów były to przede wszystkim zadania z poprzednich Olimpiad, zadania z zawodów międzynarodowych lub z Olimpiad innych krajów. Ogromną liczbę takich zadań można znaleźć w Internecie. Przede wszystkim polecam stronę internetową OMG. Można tam znaleźć zadania z poprzednich Olimpiad, bardzo interesujące zadania ze wskazówkami i rozwiązaniami z Kółka Internetowego (70 zadań), zadania z obozów OMG oraz zadania z Ligi Zadaniowej. Polecam też stronę Olimpiady Matematycznej. Oprócz dosłownie tysięcy zadań z Olimpiad i zawodów międzynarodowych znajdują się tam linki do stron innych Olimpiad. Bardzo pomocne były zadania publikowane w czasopiśmie „Crux Mathematicorum". Na stronie internetowej tego pisma znajduje się kilka roczników powszechnie dostępnych. Korzystałem z zadań z tzw. Małej Olimpiady Matematycznej, zawodów organizowanych przez dwóch nauczycieli (w późniejszym czasie dołączyli do nich jeszcze inni): Henryka Pawłowskiego z Torunia i Wojciecha Tomalczyka z Gdyni. Zadania z kilku Małych Olimpiad (organizowanych w dwóch grupach wiekowych) są na stronie internetowej, do której link znajduje się także na stronie Olimpiady Matematycznej. Wreszcie należy polecić zbiory zadań. W Polsce wydano wiele zbiorów zadań zawierających zadania olimpijskie lub zadania przygotowawcze do zawodów matematycznych. Polecam zbiory zadań wspomnianych wyżej nauczycieli: Pawłowskiego i Tomalczyka. Wielokrotnie korzystałem ze zbioru zadań [Kubica-Szymczyk] oraz z bardzo popularnej wśród olimpijczyków książki [Kourliandtchik]. Na zakończenie chciałbym polecić doskonały zbiór zadań [Engel]. Jest to zbiór zadań napisany po angielsku (można go kupić np. zamawiając przez Internet), zawierający ponad 1000 zadań i przygotowany specjalnie z myślą o przygotowaniu do zawodów matematycznych. Bardzo wiele z tych zadań można z powodzeniem dawać już uczniom gimnazjum.

W Internecie można znaleźć także bardzo wiele innych zadań, np. z różnych kółek matematycznych z całego świata. Jest też wiele opracowań napisanych specjalnie dla przygotowań olimpijskich. Takich materiałów jest tak dużo, że niemożliwością jest nawet pobieżne przejrzenie wszystkich. Gdy porównuję tę sytuację z czasami, w których sam startowałem w Olimpiadzie Matematycznej, zazdroszczę dzisiejszym olimpijczykom. Ja korzystałem z dwóch tomów zadań Stefana Straszewicza i z jednego rosyjskiego zbioru zadań z algebry. Dzisiaj olimpijczyk może znaleźć w Internecie dosłownie tysiące interesujących zadań, setki ciekawych artykułów i ogromną liczbę uwag i komentarzy. Może też uczestniczyć w interesujących dyskusjach i wymieniać spostrzeżenia i doświadczenia z kolegami z całego świata.

Należy powiedzieć parę słów o tematyce warsztatów. Organizowałem warsztaty „monotematyczne” oraz warsztaty o różnorodnej tematyce. Warsztaty poświęcone jednemu tematowi organizowałem zazwyczaj pod koniec roku szkolnego. Ich celem było nauczenie jakiegoś działu matematyki potrzebnego do Olimpiady. Szczególnie udane były przed wielu laty warsztaty z kombinatoryki (dla licealistów). Omówiliśmy wtedy z uczestnikami wszystkie zadania kombinatoryczne z poprzednich Olimpiad. Niedawno przeprowadziłem dla uczniów gimnazjum warsztaty z teorii grafów. Jednak zdecydowanie ciekawsze wydają mi się warsztaty różnorodne, na których pokazuję uczniom zadania z kilku działów matematyki. Najczęściej wybieram do tego cztery działy matematyki:

- teorię liczb,
- kombinatorykę,
- nierówności,
- geometrię.

W jednym z następnych rozdziałów pokażę po kilka zestawów zadań z tych czterech działów matematyki.

3. Zajęcia seminaryjne

Zajęcia seminaryjne polegają na tym, że wybrany uczeń wygłasza referat na zadany temat. Celem takich zajęć jest oczywiście zapoznanie ogółu uczniów z nowym zagadnieniem teoretycznym. Ponadto — tak jak na seminarium na Uniwersytecie — chyba ważniejszym celem jest nauczenie ucznia prezentowania przed całą klasą nauczonej partii materiału. Uczeń dostaje odpowiednie materiały (na przykład odbite na kserografie) lub znajduje je samodzielnie (na przykład w Internecie), musi się nauczyć danego zagadnienia i następnie opowiedzieć o nim pozostałym uczniom (w klasie na lekcji lub na kółku). Podstawowym błędem ucznia referującego po raz pierwszy jest oczywiście mówienie do nauczyciela, a nie do kolegów.

Referat nie może być zbyt długi. Najczęściej jest to około pół lekcji, rzadziej cała godzina lekcyjna. Czego mogą dotyczyć takie referaty? Są to czasem krótkie informacje uzupełniające temat lekcji. Przykłady pokazuję dalej, gdy omawiam sposoby korzystania z Internetu. Przekonywałem się wielokrotnie, że interesującym tematem dla uczniów jest teoria liczb. W II klasie, gdy omawiam twierdzenie Pitagorasa, doskonałym tematem referatu jest rozwiązywanie równania Pitagorasa w liczbach całkowitych. Przy okazji można dać kilka referatów na podobne tematy — rozwiązywanie innych równań w liczbach całkowitych. Znakomitym źródłem takich referatów z teorii liczb są dwie popularne książki Wacława Sierpińskiego ([Sierpiński-1] oraz [Sierpiński-2]). Przy okazji uczniowie mogą dowiedzieć się, kim był Sierpiński, a także usłyszeć o innych wielkich polskich matematykach.

Innymi dobrymi źródłami referatów są:

- artykuły dodatkowe w sprawozdaniach z kolejnych OMG,
- broszurki wydawane przez SEM,
- liczne książki popularne o matematyce,
- artykuły znajdujące się w Internecie,
- materiały przygotowane specjalnie przez nauczyciela.

Do poradnika dołączam trzy pliki (w formacie pdf) zawierające trzy takie opracowania przygotowane przeze mnie specjalnie dla uczniów. Niektóre z nich wykorzystywałem wielokrotnie jako materiały do referatu na prowadzonych przeze mnie kółkach matematycznych. Te opracowania dotyczą liczb Fibonacciego i kombinatorycznych metod dowodzenia ich własności, przekształcenia przez inwersję oraz przekątnych wielokątów foremnych. W tym ostatnim opracowaniu rozwijam uwagi dotyczące przekątnych wielokątów foremnych, które zawarłem w rozdziale o geometrii okręgu.

4. Warsztaty tematyczne (projektowe)

Na zakończenie chciałbym powiedzieć parę słów o warsztatowej metodzie przygotowywania projektów. Dwukrotnie (oprócz projektów przygotowywanych w ramach wymian zagranicznych) z uczniami Gimnazjum Przymierza Rodzin im. Jana Pawła II przygotowywaliśmy projekty dotyczące architektury gotyckiej. Warsztaty polegały na tym, że uczniowie przez kilka dni przygotowywali w szkole swoje projekty. Dobrym czasem do takiej pracy jest okres po egzaminie gimnazjalnym w III klasie. Organizowaliśmy wtedy w szkole tzw. tydzień projektowy, w czasie którego uczniowie przygotowywali różne projekty. Uczniowie klasy matematycznej dwukrotnie przygotowywali taki projekt dotyczący okien gotyckich na podstawie zdjęć dwóch zabytków: zamku w Malborku i katedry w Kolonii. Wszystkie prace dotyczące projektu zostały wykonane wspólnie w szkole, głównie w pracowni komputerowej. Efektem pracy było wspólne opracowanie zawierające analizę ok. 10 okien gotyckich. Sposób pracy nad takim projektem omówiłem w rozdziale o projektach.

17. Zastosowania komputerów

W tym rozdziale opiszę, w jaki sposób w rozszerzonym programie matematyki w gimnazjum można wykorzystać komputery. Przede wszystkim należy wyjaśnić, że nie chodzi o naukę programowania. Programowanie jest oczywiście bardzo ważną umiejętnością, niezwykle przydatną w nauczaniu matematyki. Jednak nie o tym chciałbym tu napisać. Związki z informatyką to przede wszystkim wykorzystanie komputerów do rozwiązywania naturalnych zadań pojawiających się w programie nauczania (lub w omawianym jego rozszerzeniu).

Omówię tutaj następujące zastosowania komputerów:

- wykorzystanie arkusza kalkulacyjnego,
- wykorzystanie programów do konstrukcji geometrycznych,
- wykorzystanie programów do rysowania wykresów funkcji,
- wykorzystanie Internetu,
- wykorzystanie edytorów tekstu.

Zakładam, że z programami wykorzystywanymi na użytek zajęć matematycznych moi uczniowie zapoznają się w czasie zajęć z informatyki. To oczywiście wymaga uzgodnienia z nauczycielami prowadzącymi te zajęcia. W mojej dotychczasowej pracy nie zetknąłem się z istotnymi problemami w tej kwestii. Teraz omówię powyższe zastosowania.

1. Arkusz kalkulacyjny

Z zastosowaniami arkusza kalkulacyjnego spotykamy się przede wszystkim w dwóch sytuacjach. Po pierwsze, gdy uczę procentów, po drugie, gdy uczę statystyki opisowej. W obu przypadkach proszę uczniów o przygotowanie pewnych wykresów. Wymagam przygotowania niektórych wykresów ręcznie — po to, by uczniowie zrozumieli, jak się je wykonuje. Następnie pozostałe wykresy uczniowie przygotowują za pomocą komputera. Jednym z zadań, które zawsze wykonuję z uczniami pierwszej klasy, jest zadanie o wynikach egzaminu gimnazjalnego. Proszę uczniów o sprawdzenie w Internecie, co to jest skala staninowa (jest to preferowany przez Centralną Komisję Egzaminacyjną sposób prezentowania wyników egzaminu). Tę skalę krótko omawiam z uczniami; skala ta polega na tym, by wyniki uzyskane przez uczniów danej populacji przydzielić do jednej z 9 grup: w najwyższej znajduje się najlepsze 4% wyników, w drugiej następne 7% wyników i tak dalej (po szczegóły odsyłam do strony CKE). Następnie daję uczniom wyniki egzaminu gimnazjalnego szkoły, w której pracuję. Zwracam tu uwagę na to, by wyniki były anonimowe. W tym celu specjalnie je przygotowuję. Podaję uczniom wyłącznie wyniki liczbowe, bez danych osobowych, mieszając je tak, by nie mogli dojść do tego, który wynik odpowiada konkretnemu uczniowi. Następnie proszę o przygotowanie wykresu pokazującego, ile procent uczniów szkoły znalazło się w kolejnych staninach. Proszę też, by na ten wykres (zazwyczaj słupkowy) nałożyć wykres (zazwyczaj liniowy) pokazujący rzeczywiste wielkości poszczególnych staninów (wspomniane wyżej 4%, 7% itd). To zadanie wykonywałem w szkołach, w których wyniki egzaminu były bardzo dobre, znacznie odbiegające od wyników krajowych. Znacznie więcej niż 4% uczniów szkoły uzyskiwało wyniki mieszczące się w najwyższym staninie. Uczniowie, po przygotowaniu wykresu, mogli zobaczyć, w jak dobrej szkole się uczą, czym są motywowane wysokie wymagania, które im stawiamy i które — przede wszystkim — ja im stawiam. Zazwyczaj proszę o wykonanie wykresu już za pomocą komputera.

Innym zadaniem, w którym wykorzystanie arkusza kalkulacyjnego jest bardzo naturalne, jest zadanie o rzucaniu kostką dwudziestościenną, omawiane w rozdziale o rachunku prawdopodobieństwa. W tym zadaniu proszę uczniów o zapisanie wyników rzutów w arkuszu, zebranie wyników uzyskanych przez wszystkich uczniów, scalenie tych wyników i podanie wyniku ostatecznego. Tych czynności końcowych zazwyczaj podejmuje się jeden uczeń klasy (koordynator), najlepiej obeznany z użyciem komputerów. Jednak wszyscy inni muszą przygotować te dane w taki sam sposób, narzucony przez koordynatora.

Jeszcze inne zadanie, w którym proszę o wykorzystanie arkusza kalkulacyjnego, jest związane z funkcjami liniowymi. Proszę uczniów, by wybrali po kilka przykładów funkcji liniowych (postaci $y = ax+b$ dla różnych a i b), obliczyli wartości tych funkcji w kilkunastu punktach (na przykład od $x = -5$ do $x = 5$, co pół jednostki) i zaznaczyli te punkty w układzie współrzędnych. Oczywiście te obliczenia najłatwiej wykonać nie ręcznie za pomocą kalkulatora, ale w arkuszu kalkulacyjnym. Podobnie, zaznaczenie odpowiednich punktów lepiej zrobić za pomocą komputera: arkusze kalkulacyjne mogą przedstawiać uzyskane dane w postaci graficznej. Podobne ćwiczenie uczniowie wykonują dla równań liniowych postaci $ax+by = c$. Dla kilkunastu wartości x obliczają odpowiednie wartości y i zaznaczają w układzie współrzędnych punkty, których współrzędne spełniają odpowiednie równanie. Zauważają, że we wszystkich przypadkach uzyskane punkty leżą na jednej prostej. Nie dowodzę uczniom, że wykresem funkcji liniowej jest prosta; podobnie nie dowodzę, że równanie liniowe $ax + by = c$ opisuje linię prostą. Potwierdzam tylko, że wynik obserwacji dokonanych przez uczniów, nie jest przypadkiem. Jest to reguła, której jednak na lekcji w gimnazjum nie będziemy dowodzić.

Chcę tu zaznaczyć, że w podobny sposób można tworzyć wykresy dowolnych funkcji, chociaż do tego lepiej nadają się programy specjalistyczne.

2. Konstrukcje geometryczne

Konstrukcji geometrycznych uczę zazwyczaj przy okazji wykonywania z uczniami projektu dotyczącego geometrii okien gotyckich. Uczniowie zapoznają się na lekcji informatyki z programem do konstrukcji. Do tego celu używałem programu *Compass and Ruler* dostępnego bezpłatnie w Internecie (jest to angielska nazwa niemieckiego programu *Zirkel und Lineal*; istnieje jego polska wersja). Nauczyciele informatyki umieli zainstalować ten program na szkolnych komputerach, informowali też uczniów, w jaki sposób można go zainstalować na komputerach domowych. Nie jest to jedyny taki program. Innym programem, w swoim czasie zakupionym przez wiele szkół w Polsce, jest *Cabri*. Jest to jednak program dość drogi i nie mogę wymagać, by uczniowie zakupili go do domu. Jeszcze innym programem jest *GeoGebra*. Z tego programu jednak sam nie korzystałem.

Program do konstrukcji geometrycznych powinien mieć następujące możliwości. Powinien umożliwiać narysowanie na płaszczyźnie punktów, prowadzenie przez narysowane punkty prostych i okręgów, rysowanie prostych równoległych i prostopadłych, znajdowanie środka odcinka itp. Innymi słowy, nie jest to tylko powtórzenie podstawowych czynności (rysowanie prostych i okręgów), ale także przyjęcie za podstawowe pewnych bardziej złożonych konstrukcji. Uczymy, jak te podstawowe konstrukcje wykonuje się za pomocą cyrkla i linijki, ale w konkretnych zadaniach wielokrotne powtarzanie tych podstawowych czynności stałoby się nudne. Jeszcze jedna cecha programu okazuje się ważna — można myszką „złapać” jeden z podstawowych punktów, od których zaczynaliśmy konstrukcję i przesunąć go w inne miejsce. Cała konstrukcja zmienia się wraz z położeniem tego punktu. To pozwala dostrzec ciekawe własności rysowanych figur geometrycznych. Na przykład, możemy wybrać na początku trzy punkty, narysować trójkąt o tych wierzchołkach i znaleźć w tym trójkącie trzy szczególne punkty: środek okręgu opisanego, środek ciężkości i ortocentrum. Wreszcie prowadzimy przez te punkty prostą:

okazuje się, że są one współliniowe. Następnie „łapiemy" jeden wierzchołek i poruszamy nim po całej płaszczyźnie. Zauważamy, że niezależnie od kształtu trójkąta wybrane trzy punkty szczególne zawsze są współliniowe. Taka prezentacja twierdzenia Eulera bardzo zapada uczniom w pamięć, znacznie lepiej niż dowód. Oczywiście warto także pokazać dowód, ale dla samej demonstracji twierdzenia nie jest to konieczne. W ten sposób można nauczyć uczniów wielu twierdzeń geometrycznych w sposób doświadczalny. Uczniowie kiedyś poznają te dowody. Na razie w bardzo przekonujący sposób dowiadują się o tych twierdzeniach. Można powiedzieć, że odkrywają matematykę w sposób doświadczalny.

Moje doświadczenia pokazują, że uczniowie bardzo szybko uczą się możliwości programu i bez trudu sami uczą się odpowiednich konstrukcji. Wtedy można już przystąpić do projektu. Opisałem go w rozdziale o projektach. W tym miejscu chcę tylko wspomnieć o jednej ważnej rzeczy. Wielokrotnie narysowanie skomplikowanego okna gotyckiego wymaga zastosowania trudnej konstrukcji geometrycznej, nieznanej uczniom. Na przykład taką konstrukcją jest narysowanie okręgu stycznego do trzech danych okręgów (tzw. zadanie Apoloniusza). Taką konstrukcję można łatwo przeprowadzić w sposób przybliżony za pomocą omawianego programu. Przypuśćmy bowiem, że mamy dane trzy okręgi. Wybieram dowolnie środek szukanego okręgu i konstruuję okrąg o tym środku, styczny do pierwszego z danych trzech okręgów. To jest naprawdę łatwa konstrukcja, którą uczniowie bez trudu odkrywają sami — wystarczy narysować prostą przez środek danego okręgu i wybrany środek, wziąć punkt przecięcia tej prostej z danym okręgiem i narysować okrąg o wybranym środku i przechodzący przez znaleziony punkt przecięcia. Następnie „łapiemy" wybrany środek i przesuwamy po płaszczyźnie. Wraz z nim zmienia się narysowany okrąg. Jest on jednak cały czas styczny do pierwszego okręgu. Teraz znajdujemy metodą prób i błędów takie położenie tego wybranego środka, by skonstruowany okrąg był styczny także do dwóch pozostałych danych okręgów. To oczywiście nie jest rozwiązanie geometryczne, ale czy architekci średniowieczni umieli ściśle rozwiązać zadanie Apoloniusza?

Prawdopodobnie stosowali oni metody przybliżone, w tym także metodę prób i błędów. W wielu przypadkach wiemy na pewno, że tak postępowali. Znane są niektóre konstrukcje przybliżone stosowane w średniowieczu (na przykład przybliżona konstrukcja siedmiokąta foremnego). Znane są też okna gotyckie, w których narysowane elementy okna nie są konstruowalne cyrklem i linijką. Tam na pewno stosowano metodę prób i błędów. Ale czy na pewno zawsze chodzi nam o rozwiązanie w jakimś sensie idealne? Matematyka powinna uczyć nas także metod przybliżonych, za to skutecznych. Opisany program geometryczny daje dość łatwo takie możliwości. Oczywiście są to możliwości, których nie miał dawniej architekt. To nie ma znaczenia. Uczę rozwiązywać zadania matematyczne takimi środkami, jakie dzisiaj są dla moich uczniów dostępne. Rozwiązanie przybliżone jest w jakimś stopniu rozwiązaniem zadania oryginalnego. Chodziło przecież o skonstruowanie dostępnymi środkami rysunku o określonych cechach i to właśnie zostało osiągnięte.

3. Wykresy funkcji

W rozdziale o funkcjach opisałem, w jaki sposób analizuję z uczniami wykresy funkcji. Tutaj wspomnę tylko, że w Internecie znajdują się programy do tworzenia *on line* wykresów funkcji (na przykład *WolframAlpha*). Możliwości rysowania wykresów funkcji ma także program *GeoGebra*. Wiele takich programów, także bezpłatnych, można znaleźć i zainstalować na swoich komputerach. Wreszcie można, jak wspomniałem wcześniej, użyć do tego celu arkusza kalkulacyjnego. Można także napisać taki program samodzielnie na lekcji informatyki. Sam program nie ma tutaj wielkiego znaczenia. Chodzi po prostu o to, by uczniowie mogli obejrzeć kilkanaście różnych wykresów. Jeśli nie mogą tych wykresów utworzyć sami, to oczywiście może je wcześniej przygotować nauczyciel i rozdać uczniom kopie kserograficzne.

4. Internet

Podobno, jeśli czegoś nie ma w Internecie, to coś takiego nie istnieje. Kłopot w tym, że nie zawsze informacje znalezione w Internecie są wiarygodne. W przypadku matematyki okazuje się, że większość znalezionych informacji odpowiada prawdzie. Polecam na przykład znakomitą encyklopedię matematyczną Wolframa czy stronę *Cut-the-Knot*. Wielokrotnie proszę uczniów o wyszukanie różnych informacji w Internecie z nadzieją, że w ten sposób część z tych informacji pozostanie dłużej w pamięci uczniów. Gdy uczę o liczbach pierwszych, proszę o wyszukanie informacji o największych znalezionych liczbach pierwszych (na przykład strona *GIMPS*). W podręczniku znalazłem zadanie o kwadracie magicznym. Prosiłem uczniów o wyszukanie w Internecie przykładów takich kwadratów. Znaleźli ich wiele, łącznie ze słynnym kwadratem narysowanym na grafice Dürera *Melancholia* z 1514 roku. Prosiłem wielokrotnie o wyszukanie danych biograficznych, informacji o interesujących twierdzeniach matematycznych, o zastosowaniach i związkach ze sztuką (na przykład pojęcie symetrii w architekturze, czy przykłady szlaczków i tapet potrzebne do projektu opisanego w rozdziale o projektach). Za każdym razem jednak powtarzałem uczniom, że znalezione informacje należy zweryfikować, trzeba się bowiem liczyć z błędami i nieścisłościami. Przypominam także to, o czym już pisałem: uczniowie mają obowiązek podawania źródel, z których zaczerpnęli informacje. Oczywiście dotyczy to nie tylko Internetu.

5. Edytory tekstu

Wykorzystujemy je do ostatecznej prezentacji wykonanych projektów. Proszę uczniów, by cały stworzony projekt zapisali w postaci jednego pliku, na przykład w programie *Word*. W przypadku, gdy pewne prace wykonują ręcznie, proszę ich o zeskanowanie rysunków i umieszczenie w pliku tekstowym. W ten sposób praca projektowa staje się jedną całością, którą na przykład można komuś łatwo wysłać.

18. Język matematyki

W tym rozdziale chcę podzielić się z Czytelnikami moimi refleksjami na temat języka, którego używamy przy uczeniu matematyki. Tematami, które zwłaszcza wydają mi się istotne, są: używanie nadmiernego formalizmu matematycznego oraz — z drugiej strony — żargonu matematycznego, używania lub raczej nadużywania logiki matematycznej — wielokrotnie przy niezrozumieniu różnic między zwrotami logicznymi (na przykład użyciem spójników) w języku naturalnym i w logice matematycznej, wreszcie nadużywania pojęć teorii mnogości w matematyce szkolnej. Niektóre moje spostrzeżenia będę ilustrował autentycznymi zadaniami wybranymi z przykładowego zestawu zadań opublikowanego przez Centralną Komisję Egzaminacyjną w październiku 2011 roku pod tytułem:

EGZAMIN GIMNAZJALNY
w roku szkolnym 2011/2012
część matematyczno-przyrodnicza
matematyka
przykładowy zestaw zadań

Ten zestaw zadań znajduje się na stronie internetowej CKE. Nie chciałbym, by moje uwagi dotyczące omawianych zadań zostały potraktowane jako krytyka cytowanego przykładowego zestawu zadań. Są to jedynie obserwacje pewnego istniejącego i — być może — popularnego zjawiska w polskiej dydaktyce matematyki (jeśli nie tej teoretycznej, to w każdym razie praktycznej).

Nauczanie matematyki skłania wielu nauczycieli — z jednej strony — do nadmiernej precyzji, do formalizmu, z drugiej strony do nadużywania żargonu matematycznego. Co to jest formalizm, każdy chyba wie. Jego skrajna postać polega na zapisywaniu formuł matematycznych w postaci logicznej. Widziałem wielokrotnie nauczycieli matematyki, którzy uczyli indukcji matematycznej podając uczniom jej formalną postać:

$$\Big(F(0) \wedge \forall n \in \mathbb{N}\ \big(F(n) \Rightarrow F(n+1)\big)\Big) \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}\ F(n),$$

gdzie $F(n)$ jest pewną formułą matematyczną z jedną zmienną wolną n. Wątpię, by ten formalny napis cokolwiek uczniom wyjaśniał. Skąd bierze się takie zamiłowanie do formalizmu? Wydaje mi się przy tym, że jest ono dość częste. Formalizm jako ucieleśnienie precyzji, zwięzłości myśli itp. jest dość pociągający i w czasie studiów matematycznych wielu studentów ulega zafascynowaniu nim. Podobnie jest z formalizmem teoriomnogościowym: wielu studentów matematyki fascynuje to, że w jednej teorii można opisać całą matematykę. Wszystkie obiekty matematyczne są zbiorami — to z pozoru bardzo upraszcza mówienie o matematyce. Funkcja jest zbiorem par, prosta jest zbiorem punktów; spotykałem nauczycieli, którzy naprawdę uważali, że ścisłość matematyczna wymaga precyzyjnego stosowania pojęć: skoro prosta jest zbiorem, to punkt **należy** do tego zbioru i nie ma sensu — a nawet błędem jest — mówić, że **leży** na niej. Uważali też, że przy dowodzeniu twierdzeń geometrycznych powinienem mówić na przykład o kątach przystających, a nie o kątach równych. Równość w matematyce oznacza identyczność. Kąty równe to znaczy kąty identyczne, a więc tak naprawdę ma to być **ten sam** kąt. W cechach przystawania powinno się zatem mówić precyzyjnie o kątach przystających lub o kątach mających równe miary. Stąd wzięło się przekonanie, że długość odcinka czy miarę kąta musimy oznaczać odrębnym symbolem. Jeśli piszemy $AB = CD$, to znaczy, że odcinki AB i CD są identyczne; równość miar oznaczamy symbolem $|AB| = |CD|$.

Sądzę, że nauczyciele dążący do takiej właśnie ścisłości nie rozumieją czegoś jeszcze bardziej podstawowego. Używany przez nich formalizm teoriomnogościowy to tylko jeden z wielu możliwych sposobów formalizacji matematyki. Zresztą nie ma potrzeby formalizowania całej matematyki jednolicie. Każda teoria może mieć swój odrębny język; na przykład geometrię jako odrębną teorię matematyczną można formalizować tak, jak ja to czynię, i jest to tak samo poprawny sposób formalizacji, jak potraktowanie geometrii jako części teorii mnogości. Trzeba też pamiętać, że formalizm ogólniejszy nie musi być bardziej naturalny. W teorii mnogości przyjmuje się często aksjomat mówiący, że każdy obiekt tej teorii jest zbiorem (tak jest na przykład w najbardziej popularnej aksjomatyce Zermelo-Fraenkla). Pamiętam, jak promotor mojej pracy magisterskiej i doktorskiej, profesor Andrzej Mostowski, jeden z najwybitniejszych logików XX wieku, na pierwszym wykładzie teorii mnogości zawsze mówił, że przez ten aksjomat teoria Zermelo-Fraenkla ma służyć tylko temu, by pokazać, iż całą matematykę **można** w niej sformalizować i nie rości sobie żadnych pretensji, by w jakikolwiek sposób opisywać świat, w którym żyjemy. Dodawał przy tym: „Daję Państwu słowo — ja nie jestem zbiorem, a więc ta teoria mnie nie dotyczy".

Powstaje naturalne pytanie, chyba natury bardziej filozoficznej, czy matematyka jest nauką mającą opisywać rzeczywistość. Nie będę tu próbował odpowiedzieć na to pytanie ogólnie; chcę tylko powiedzieć, że w matematyce szkolnej dla ucznia jest oczywiste, że matematyka — tak samo jak fizyka, biologia czy geografia — nie uczy nas rozumienia jakiejś wymyślonej abstrakcji, ale uczy nas rozumienia otaczającego nas świata. Układamy równania, by dowiedzieć się czegoś, co w naszym świecie rzeczywiście istnieje, a o czym mamy tylko informację niebezpośrednią, jakoś zawoalowaną. Twierdzenie Pitagorasa naprawdę uczy nas, o ile krótsza jest droga na przełaj, przez trawnik, od drogi chodnikiem naokoło trawnika, a podawany przez CKE wykres wyników egzaminu gimnazjalnego dotyczy prawdziwego egzaminu, który CKE rzeczywiście przeprowadziła — a wykres ma tylko w matematyczny sposób uwypuklić pewne charakterystyczne cechy tych wyników. Matematyka szkolna, zwłaszcza na poziomie gimnazjalnym, **dotyczy** rzeczywistości i — wobec tego — jej nadmierna formalizacja tylko szkodzi dobremu jej rozumieniu. Formalizacja naturalna sprzyja rozumieniu, formalizacja nienaturalna, dla ucznia sztuczna, stwarza zupełnie nowe, dodatkowe trudności w zrozumieniu. Trudniej zrozumieć nie tyle samą matematykę, ale to, w jaki sposób została ona uczniom zaprezentowana.

Kwestia formalizacji to sprawa języka i symboliki. To kwestia tego, czy mówimy, że punkt należy do prostej, czy leży na niej. To kwestia tego, czy piszemy pionowe kreski, czy ich nie piszemy. To kwestia tego, czy piszemy słowami spójniki logiczne, czy wprowadzamy nowe symbole. To kwestia tego, czy mówimy, że „n jest liczbą naturalną", czy też, że „n należy do zbioru liczb naturalnych" (lub, jak wielokrotnie mówili skrótowo moi uczniowie, którzy wynieśli takie nawyki z innych szkół: „n należy do naturalnych" — sami tego nie wymyślili, ktoś, niestety, musiał ich tego nauczyć). Rozwinięciem tego tematu jest kwestia uczenia logiki, a więc kwestia rozumienia zdań złożonych zbudowanych za pomocą spójników logicznych i kwantyfikatorów. Tym zagadnieniem zajmę się później, po omówieniu przeciwności formalizmu — żargonu matematycznego.

Nauczyciele świadomi tego, że formalizacja na ogół utrudnia (przynajmniej na początku) zrozumienie matematyki, często popadają w drugą skrajność. Nadużywają żargonu matematycznego. Co to jest takiego, ten żargon matematyczny? To, najkrócej mówiąc, zbyt potoczny, popularny sposób mówienia o matematyce, często używający zwrotów, które nabierają w matematyce nowego znaczenia. Pokażę kilka przykładów, zilustruję je zadaniami ze wspomnianego zestawu zadań.

Oto zadanie 10: dana jest funkcja określona wzorem $y = \sqrt{x}$, gdzie x jest liczbą dodatnią. Teraz następują dwa stwierdzenia i zdający musi stwierdzić, czy są one prawdziwe czy fałszywe. Przytoczę pierwsze stwierdzenie — „wartości tej funkcji są zawsze dodatnie". W tym zadaniu zwrot „są zawsze dodatnie" jest zwrotem żargonowym. Słowo „zawsze" dotyczy czasu, a nie tego, że chodzi o **wszystkie** rozważane obiekty. Uczeń uczony matematyki przez nauczyciela, który stara się nie używać żargonu, może nie domyślić się sensu tego zdania. Czy bowiem wielkość wartości funkcji może zmieniać się w czasie? Wczoraj jeszcze była dodatnia, a jutro będzie ujemna? Chcę tu zwrócić uwagę na to, że dla bardzo wielu nauczycieli ten zwrot jest oczywisty. Tu poruszam bardzo ważną kwestię: wiele zwrotów, pojęć, my rozumiemy doskonale, bo nas tego nauczono i do nich się przyzwyczailiśmy tak bardzo, że nawet nie zauważamy problemu. Inaczej jest z uczniami. Dla nas, na przykład, oczywiste są — czasami paradoksalne — własności zbiorów nieskończonych; dla uczniów są one właśnie paradoksalne.

Jest jeszcze wiele innych zwrotów żargonowych. Mówiąc o osi liczbowej mówimy często, że jakaś liczba leży „na prawo" od drugiej (7 na osi liczbowej leży na prawo od 5). Ale zapominamy o tym, że oś może być ustawiona pionowo. „Na prawo" znaczy teraz „wyżej". A przecież, jak wiemy, układ współrzędnych można zmieniać, na przykład obracać. I wtedy może się okazać, że tak naprawdę „na prawo" oznacza „na lewo"... Mówimy, że wartości funkcji „rosną", mając na myśli to, że jedne są większe od drugich (te dla argumentów leżących bardziej na prawo są większe od tych dla argumentów leżących bardziej na lewo). Jeśli mamy urnę z losami wygrywającymi i „pustymi", to po dosypaniu losów wygrywających prawdopodobieństwo wygrania wzrośnie. Tu oczywiście mamy na myśli to, że prawdopodobieństwo wygrania po dosypaniu losów jest większe od prawdopodobieństwa wygrania przed dosypaniem losów. Myli nas zwrot „prawdopodobieństwo wygrania". Mimo tej samej nazwy mamy dwa różne zdarzenia w dwóch różnych przestrzeniach zdarzeń elementarnych. Musi więc chodzić o porównanie dwóch prawdopodobieństw, dwóch liczb (przecież prawdopodobieństwo zdarzenia jest liczbą). Żadna z tych liczb nie wzrosła, liczby same z siebie nie rosną. Po prostu jedna jest większa od drugiej. Ten zwrot wystąpił w zadaniu 8 z omawianego zestawu.

Pewne zwroty mają w matematyce nieco odmienne znaczenie niż w języku potocznym. Możemy na przykład sformułować zadanie w następujący sposób: udowodnij, że dla dowolnej liczby dodatniej x zachodzi nierówność $x + \frac{1}{x} \geq 2$. I teraz uczeń mówi: biorę dowolną liczbę rzeczywistą x, na przykład $x = 3$. Wtedy oczywiście $3 + \frac{1}{3} > 2$, co kończy dowód. Nie o to przecież chodziło! Uczeń inaczej zrozumiał słowo „dowolna". Dla nas to znaczy „każda", dla niego znaczyło, że to on może ją wybrać „dowolnie". Różnice w rozumieniu tych samych słów w języku potocznym i w jezyku matematyki omówię jeszcze dokładniej, gdy przejdę do spójników logicznych.

Spróbujmy podsumować i wyciągnąć jakieś wnioski. Po pierwsze, w gimnazjum staram się nie używać formalizmu matematycznego. Twierdzenia zapisuję słowami. Na przykład piszę słowami „dla każdej liczby naturalnej n" i nie używam symboli takich jak $\forall n \in \mathbb{N}$. Nie wprowadzam oznaczeń na spójniki logiczne, piszę je słowami. Nie używam terminologii teoriomnogościowej. Mówię o różnych rodzajach liczb, a nie o różnych zbiorach liczb; w szczególności nie wprowadzam oznaczeń na te zbiory. Mówię na przykład, że „przedział (a, b) składa się z liczb większych od a i jednocześnie mniejszych od b" i nie mówię, że jest to zbiór takich liczb. Na osi liczbowej zaznaczam tak określony przedział, a nie zbiór liczb. Niby różnica niewielka, ale w ten sposób unikam różnych niepotrzebnych pytań, na przykład pytań o charakterze podstawowym: co to w ogóle jest ten zbiór? Czy możemy zobaczyć definicję zbioru? Koncentruję uwagę ucznia na matematyce, a nie na jej formalizacji. Prosta nie jest częścią płaszczyzny. Ona się na płaszczyźnie pojawi dopiero wtedy, gdy ją tam narysuję (a mówiąc dokładniej, gdy narysuję potrzebny jej fragment). Tak jest łatwiej (przynajmniej na początku) myśleć o geometrii. Uczeń ma wystarczająco dużo problemów związanych z samą geometrią, by jeszcze dodatkowo absorbować jego uwagę niepotrzebnym formalizmem i wymagać nadmiernej precyzji.

Czy w takim razie w ogóle nie używam zbiorów? To zależy od klasy. Jeśli widzę, że przyswajanie nowych pojęć przychodzi moim uczniom łatwo, to przy okazji uczenia kombinatoryki (pod koniec II klasy, a jeśli nie zdążę, to na początku III klasy) zbiory się pojawiają. Na przykład w postaci wzoru włączeń i wyłączeń. Wtedy pojawiają się także sumy i iloczyny (przecięcia) zbiorów. Ale zdarza mi się nawet rysować diagramy Venna, nie nazywając rysowanych kółek zbiorami. Mówię, że jedno kółko oznacza wszystkie obiekty jednego rodzaju zebrane razem, drugie kółko oznacza wszystkie obiekty drugiego rodzaju (oba rodzaje są opisane w zadaniu) zebrane razem, a w części wspólnej obu kółek znajdują się te obiekty, które mają obie wyszczególnione w zadaniu cechy. Unikam słowa zbiór i oczywiście pozostaję tylko przy takiej interpretacji graficznej, nie zapisując wzoru

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

Gdy uczę rachunku prawdopodobieństwa, to mogę użyć zbiorów i zapisuję

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}.$$

Mogę także napisać wzór słowami

$$\text{Prawdopodobieństwo} = \frac{\text{liczba przypadków, które nas interesują}}{\text{liczba wszystkich możliwych przypadków}}.$$

I tak, prawdopodobieństwo wyrzucenia sumy 5 przy rzucie dwa razy zwykłą kostką do gry obliczam bez zapisywania jakichkolwiek zbiorów. Najpierw obliczamy, ile jest wszystkich przypadków. W pierwszym rzucie mamy 6 możliwych wyników, w drugim też 6; z reguły mnożenia wynika, że

$$\text{liczba wszystkich możliwych przypadków} = 36.$$

Teraz wypisuję wszystkie interesujące nas przypadki:

I rzut	II rzut
1	4
2	3
3	2
4	1

A więc

$$\text{liczba przypadków, które nas interesują} = 4.$$

Stąd ostatecznie dostajemy

$$\text{Prawdopodobieństwo} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}.$$

Uniknęliśmy całkowicie użycia zbiorów. Ale — powtarzam — często mam do czynienia z klasą uczniów na tyle zdolnych, że wprowadzenie formalizmu teoriomnogościowego nie powoduje trudności. Wtedy to robię. Jednak wprowadzenie zbiorów musi być dobrze uzasadnione. Kombinatoryka i rachunek prawdopodobieństwa są dobrym usprawiedliwieniem. To, że prosta jest zbiorem punktów, takim usprawiedliwieniem nie jest.

Tak więc powtórzę — nie wprowadzam symboliki logicznej, nie wprowadzam terminologii teoriomnogościowej, o ile nie jest ona konieczna i o ile klasa nie jest dostatecznie przygotowana. A co z żargonem? Oczywiście używam go, może nawet nadużywam. Staram się jednak używać go tylko w języku mówionym. Wtedy zazwyczaj wyjaśniam, co taki zwrot żargonowy znaczy i jak my, matematycy, go używamy. W tekstach, które uczniom daję, staram się pisać precyzyjnie, choć przypominam — precyzyjnie to nie znaczy formalnie. Swoją drogą, jestem ciekaw, w ilu miejscach w tym poradniku tę zasadę złamałem i użyłem żargonu w piśmie. Ciekaw jestem, ilu Czytelników napisze do mnie, że mimo tych pouczeń, sam ich nie przestrzegam. Cóż, nikt nie jest bez winy, a drogowskaz rzadko idzie sam w kierunku, który wskazuje.

Jeśli chodzi o kwestię wprowadzania teorii mnogości do szkoły, to na zakończenie chcę tylko przypomnieć, że w czasach, gdy ja chodziłem do szkoły (lata 60. XX wieku), w programie szkolnym w ogóle nie było zbiorów. Z teorią mnogości zetknąłem się po raz pierwszy dopiero na I roku studiów matematycznych i, chociaż byłem dobrym studentem, sprawiała mi ona wiele kłopotów. Chcę tu zwrócić uwagę na charakter mojej argumentacji: byłem dobrym studentem, a mimo to zetknięcie z teorią mnogości było dla mnie trudne. Chcę podkreślić, że rozumowanie postaci: „to jest łatwe, bo nigdy nie miałem z tym kłopotu” na ogół jest niepoprawne. Natomiast rozumowanie postaci: „to jest trudne, bowiem, mimo iż byłem bardzo dobrym studentem (uczniem), sprawiało mi to trudność” jest rozumowaniem poprawnym. Tego argumentu użyłem. Teoria mnogości jest naprawdę trudna i przedwczesne jej wprowadzanie do szkoły, bez należytego dla niej uzasadnienia, jest po prostu szkodliwe. Przypomnę jeszcze, że w geometrii mieliśmy bardzo dobrze trafiające do wyobraźni pojęcie miejsca geometrycznego. Dzisiaj wielu nauczycieli używa zbiorów: okrąg jest to zbiór punktów leżących w danej odległości od środka, symetralna odcinka jest to zbiór punktów leżących w jednakowej odległości od końców odcinka itp. Dawniej mówiono, że okrąg jest to miejsce geometryczne punktów leżących w danej odległości od środka, a symetralna jest to miejsce geometryczne punktów leżących w jednakowej odległości od końców odcinka. Niby różnica niewielka, ale pojęcie miejsca geometrycznego jest bardzo obrazowe: kładzie ono nacisk na to, gdzie interesujące nas punkty leżą, a nie jaki obiekt matematyczny one wszystkie tworzą.

Teraz zajmijmy się logiką. Przypomnę, że w szkole, dokładniej — w liceum, uczono długo logiki. A właściwie tylko jednego fragmentu logiki — rachunku zdań. Może jeszcze dokładniej — uczono weryfikowania za pomocą wartościowania zerojedynkowego, czy dane zdanie złożone jest tautologią logiczną. Zawsze zadawałem sobie pytanie, po co to było (a może nawet — po co to nadal jest)? Pytałem wielu nauczycieli, czy wiedzą, po co to robią. Jedyną sensowną odpowiedzią było to, że tego wymaga program. Ten argument już jest nieaktualny. Z podstawy programowej logika zniknęła całkowicie. A wielu nauczycieli uczy jej nadal. Po co? Czy wydaje się im, że tak uczony rachunek zdań (a właściwie jego niewielki fragment) uczy sposobów rozumowania? Moim zdaniem zupełnie nie. Słyszę czasami opinię, że aby nauczyć uczniów logicznego myślenia, należałoby w szkole uczyć logiki. Moim zdaniem jest to pogląd całkowicie błędny. Logika podsumowuje, porządkuje naszą wiedzę o rodzajach rozumowania. Ale te rodzaje rozumowania musimy najpierw zobaczyć sami w praktyce. Wydaje się, że w szkole najlepszą dziedziną, w której możemy uczyć rozumowań (wnioskowań, dowodów), jest geometria. Przede wszystkim przez swoją poglądowość. Rozumowania geometryczne nie dotyczą abstrakcji, symboli, ale konkretu, jakim jest rysunek rozważanych figur geometrycznych. Dopiero, gdy poznamy w praktyce różne rodzaje rozumowań, logika nam je uporządkuje — najlepiej, gdy się to stanie w czasie studiów wyższych. A zajmowanie się logiką w szkole będzie prowadziło do różnych trudności, z których wielokrotnie nie zdajemy sobie sprawy. Przede wszystkim dlatego, że do pewnych rozwiązań, które nie są wcale tak naturalne, jak nam się dzisiaj wydaje, przywykliśmy. A gdy przywykliśmy, to stały się one dla nas naturalne i zapomnieliśmy o trudnościach, z którymi są one związane. Popatrzmy na niektóre z nich.

Pierwszą trudnością jest różne rozumienie spójników logicznych w języku potocznym i w matematyce. Jedną różnicę znają chyba wszyscy. W języku potocznym często mylimy alternatywę z alternatywą wykluczającą. Mówiąc dokładniej, nie rozróżniamy spójników „lub” i „albo”. Spójnik „lub” ma w naszym zamyśle oznaczać alternatywę niewykluczającą. Zdanie „pójdę do kina lub na koncert” może oznaczać, że pójdę na oba. Jednak w potocznym rozumieniu te dwie możliwości mają się wykluczać, czyli „pójdę do kina, albo na koncert” — ale nie na oba. To oczywiście jest pewien problem, ale da się to łatwo wytłumaczyć. Są trudności poważniejsze. Popatrzmy najpierw na przykłady. Zacznijmy od koniunkcji i alternatywy.

Weźmy następujące zadanie: jakie liczby x spełniają równanie $(x-1)(x-2)=0$? Naturalne jest powiedzenie: $x=1$ **i** $x=2$. Jak ocenimy ucznia, który tak odpowie? Oczywiście **nie istnieje** liczba x spełniająca koniunkcję „$x=1$ i $x=2$”. Spójnik „i” w tym zdaniu oczywiście znaczy: „$x=1$ jest rozwiązaniem **i** $x=2$ jest rozwiązaniem”. Myślę, że wielu nauczycieli matematyki poprawi naszego ucznia, zastępując ich zdaniem niepoprawny zwrot „$x=1$ i $x=2$” zwrotem niewątpliwie poprawnym „$x=1$ lub $x=2$”. Tu widzimy różnicę między potocznym, naturalnym rozumieniem spójników logicznych, a rozumieniem formalnym, matematycznym. Moim zdaniem, pierwszy zwrot „$x=1$ i $x=2$”, jest całkowicie poprawny. Trzeba tylko dopytać ucznia, co miał na myśli, pisząc spójnik „i”. Prawdopodobnie dowiemy się, że chodziło mu nie o to, że x jest jednocześnie równy 1 i 2, ale o to, że 1 jest rozwiązaniem i 2 jest rozwiązaniem. Może się zdarzyć jeszcze „gorszy” błąd: uczeń może napisać „$x=1$ i 2”. Z matematycznego punktu widzenia jest to zupełnie źle: spójnik „i” musi przecież łączyć zdania, a nie liczby. Ale w języku potocznym mamy dwa rozumienia spójnika „i”. Na przykład: „Ania i Janek poszli do kina” oraz „Ania poszła do kina i spotkała tam Janka”. Można oczywiście próbować argumentować, że pierwszy zwrot oznacza naprawdę: „Ania poszła do kina i Janek poszedł do kina”, ale jest to dość naciągane. Każdy widzi, że w pierwszym zdaniu spójnik „i” łączy dwa rzeczowniki, w drugim zaś zdaniu łączy dwa zdania, tworząc z nich zdanie złożone. Pierwsze zdanie jest niewątpliwie zdaniem prostym.

Matematyka doprecyzowuje rozumienie spójników i łączy je jednoznacznie z działaniami na zbiorach. Uczono nas, że sumę zbiorów definiujemy za pomocą alternatywy, a iloczyn (przecięcie) za pomocą koniunkcji:

$$A\cup B=\{x: x\in A \ \vee \ x\in B\},$$
$$A\cap B=\{x: x\in A \ \wedge \ x\in B\}.$$

Czy możemy sobie wyobrazić, że sumę zbiorów zdefiniujemy za pomocą koniunkcji? W pierwszej chwili każdy odpowiedziałby, że nie. A przecież poprawne jest powiedzenie, że do sumy zbiorów $A \cup B$ należą te elementy, które należą do A i należą te elementy, które należą do B i nie należą żadne inne. Sumę zbiorów zdefiniowaliśmy więc za pomocą koniunkcji! Nie powinno dziwić zatem, że jednym z popełnianych czasami błędów w zadaniach z rachunku prawdopodobieństwa jest mylenie sumy i iloczynu zdarzeń. Niech naszym doświadczeniem losowym będzie rzut kostką do gry. Zdarzeniu „liczba oczek jest parzysta i podzielna przez 3" według niektórych uczniów sprzyjają cztery zdarzenia elementarne: 2, 3, 4 i 6, a więc prawdopodobieństwo tego zdarzenia jest równe $\frac{2}{3}$. Bowiem sprzyjają liczby parzyste **i** sprzyjają liczby podzielne przez 3. Spójnik „i", w zamyśle autora zadania oznaczający iloczyn zdarzeń, został zrozumiany tak jak w poprzednim przykładzie, a więc definiujący w istocie sumę zdarzeń. To nie jest wydumany przykład. Rzeczywiście widziałem rozwiązanie zadania maturalnego zawierające opisany wyżej błąd. Uczeń zdefiniował poprawnie dwa zdarzenia A i B, a następnie zamiast obliczyć wyłącznie prawdopodobieństwo iloczynu zdarzeń (bowiem w treści trzeba było obliczyć prawdopodobieństwo zdarzenia zdefiniowanego za pomocą koniunkcji), obliczał prawdopodobieństwo sumy zdarzeń. Dopiero po chwili dostrzegłem, że ten uczeń kierował się pewną logiką — uznał widocznie — tak jak wyżej — że zdarzeniu, którego prawdopodobieństwo miał obliczyć, sprzyjają zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniu A i sprzyjające zdarzeniu B i żadne inne, chociaż tego nie napisał wyraźnie. A więc uznał, że należy obliczyć pradwopodobieństwo sumy zdarzeń. W tym celu obliczył prawdopodobieństwa zdarzeń A i B, potem prawdopodobieństwo iloczynu $A \cap B$ i wreszcie skorzystał ze wzoru włączeń i wyłączeń. Ta pozornie bezsensowna kolejność, może być uznana za przejaw całkowitego niezrozumienia polecenia. Moim zaś zdaniem, tak jak rozumiem to rozwiązanie teraz, była ona tylko wynikiem potocznego rozumienia spójnika „i". Można powiedzieć, że uczeń zrobił poprawnie wszystko, czego od niego wymagano, a nawet więcej. Oczywiście rozwiązania nie można uznać za całkowicie poprawne. Ostatecznie uczeń czegoś jednak nie rozumie. Ale nie można też takiego rozwiązania uznać za bezsensowne. Swój sens jego postępowanie jednak miało. Dlaczego o tym piszę tak dokładnie? Po to mianowicie, by pokazać, że samo dostrzeżenie tej subtelności może być trudne nawet dla doświadczonych nauczycieli. Na pewno będzie zatem trudne do zrozumienia dla gimnazjalisty.

Przejdźmy teraz do implikacji, a więc do zdań postaci „jeśli. . . , to. . . ". W języku potocznym spójnik „jeśli" lub „jeżeli" jest na ogół rozumiany jako równoważność. Potwierdza to takie właśnie częste rozumienie tego spójnika nawet w tekstach matematycznych. Używamy go mianowicie w definicjach. Mówimy: trójkąt jest równoramienny, jeśli ma co najmniej dwa boki równe. Oczywiście „jeżeli" znaczy tu „wtedy i tylko wtedy, gdy". Można mi zarzucić, że tu właśnie propaguję żargon. Otóż nie jest to żargon. Tak mówimy poprawnie w języku naturalnym. Zwrot „wtedy i tylko wtedy, gdy" jest zwrotem sztucznym, wymyślonym wyłącznie na potrzeby matematyki. W naszym codziennym języku mówimy „jeżeli" i tę formę w tym znaczeniu przenosimy do matematyki. Tak pisali nasi najwięksi matematycy. Zacytujmy Kuratowskiego (wszystkie cytaty pochodzą z książki *Rachunek różniczkowy i całkowy*): „Ciąg $a_1, a_2, \ldots$ nazywamy *ograniczonym*, jeśli zbiór jego wyrazów jest ograniczony, tzn. jeśli istnieje taka liczba M, że nierówność $|a_n| < M$ jest spełniona dla wszystkich wartości n" (str. 22). Dalej: „Mówimy, że ciąg $\{a_n\}$ *jest rozbieżny* do ∞, jeśli do każdej liczby r istnieje takie k, że dla $n > k$ jest $a_n > r$" (str. 31). Sierpiński w swojej znakomitej książeczce *Wstęp do teorii liczb* pisze na str. 6: „Mówimy, że liczba całkowita a jest podzielna (bez reszty) przez liczbę całkowitą b, jeżeli istnieje liczba całkowita k, taka iż $a = kb$." Takie cytaty można byłoby mnożyć. Spójnik „jeżeli" oznacza tu równoważność, a nie implikację. Można oczywiście powiedzieć, że we wszystkich takich przypadkach należało napisać „wtedy i tylko wtedy, gdy” zamiast „jeżeli” — ale jednak tak pisali nasi mistrzowie, od których uczyliśmy się wszyscy: Kuratowski i Sierpiński. Tak oni pisali, tak też wielokrotnie my mówimy. Nie dziwmy się więc, że podobnie (to znaczy jako równoważność) rozumieją nasi uczniowie spójnik „jeśli” w implikacji „jeśli ..., to ...” My **wiemy**, że jest różnica — dlatego że tego nas nauczono i do tego się przyzwyczailiśmy.

Różnica — tak naprawdę — polega na tym, że implikacja „jeśli α, to β” jest prawdziwa nie tylko w dwóch przypadkach (gdy oba zdania α i β są prawdziwe oraz gdy oba są fałszywe), ale jest prawdziwa także w trzecim przypadku (gdy zdanie α jest fałszywe, zaś zdanie β prawdziwe). Dalej, uczniowie często rozumieją implikację „ jeśli α, to β” jako zapis wynikania: z α potrafię wyprowadzić β. Jak to wpływa na wartościowanie implikacji? Musimy uczniów jakoś przekonać do tego, że ze zdania fałszywego wynika każde zdanie: nie tylko fałszywe, ale także dowolne zdanie prawdziwe. Zanim przejdę dalej, proszę Czytelnika o chwilę zastanowienia. Czy potrafimy przekonać ucznia, że każda implikacja o fałszywym poprzedniku jest prawdziwa? Inaczej, czy potrafimy przekonać, że za pomocą poprawnego rozumowania potrafimy ze zdania fałszywego wyprowadzić dowolne zdanie, także prawdziwe? Czy potrafimy przekonać gimnazjalistę za pomocą argumentów, które on z całą pewnością zaakceptuje i uzna za tak oczywiste, że się z nimi utożsami? Proszę Czytelników o wymyślenie takich argumentacji, zanim przejdą do dalszej lektury. A dalej do tego problemu jeszcze powrócimy. Omówię teraz moje doświadczenia z uczniami, z którymi omawiałem rozumienie implikacji.

Powodem do tego, by rozmawiać z uczniami o implikacji, były między innymi zadania ze wspomnianego zestawu zadań. Popatrzmy na zadanie 6 z tego zestawu. Oto ono:

Zadanie 6.
Które zdanie jest fałszywe? Wybierz odpowiedź spośród podanych.

A. Jeżeli liczba jest podzielna przez 12, to jest podzielna przez 6.
B. Jeżeli liczba jest podzielna przez 6, to jest podzielna przez 2 i przez 3.
C. Jeżeli liczba jest podzielna przez 3 i przez 5, to jest podzielna przez 15.
D. Jeżeli liczba jest podzielna przez 3 i przez 6, to jest podzielna przez 18.

To zadanie dałem grupie moich uczniów, z którymi potem dokładnie rozwiązania omówiłem. Byli to bardzo dobrzy uczniowie, każdy z nich rozwiązał co najmniej 4 zadania z zawodów I stopnia Olimpiady Matematycznej Gimnazjalistów, w której startowali. Ich trudności są więc bardzo wymowne. Pokazują one, że naturalne rozumienie logiki nawet przez bardzo dobrych uczniów, umiejących przeprowadzać rozumowania na poziomie olimpijskim, odbiega od rozumienia matematycznego, którego nas **nauczono** i do którego tak przywykliśmy, że nie wyobrażamy sobie innego. A oto pierwsze z rozważanych zdań: „Jeżeli liczba jest podzielna przez 12, to jest podzielna przez 6”. Uczniowie zgodzili się łatwo, że **na ogół** to zdanie jest prawdziwe. Ale popatrzmy na szczególne przypadki. Weźmy liczbę 18. Od razu powiedzieli, że to zdanie **nie ma sensu**, bo z tego, że 18 dzieli się przez 12 **nie wynika** (bo i nie może wynikać), że 18 dzieli się przez 6. A jeśli to zdanie nie ma sensu, to nie jest prawdziwe. Stąd wzięło się sformułowanie „na ogół” — bo tam, gdzie to zdanie ma sens, jest też prawdziwe. Rozumowali dalej: jeśli musielibyśmy przyjąć, że to zdanie jest prawdziwe, to zdanie ostatnie (a więc w zamierzeniu autorów jedyne fałszywe) „jeżeli liczba jest podzielna przez 3 i przez 6, to jest podzielna przez 18” też jest prawdziwe dla **niektórych** liczb, na przykład dla 18. Ich konkluzją było to, że wszystkie te zdania są dla niektórych liczb prawdziwe, a dla niektórych fałszywe. Rzeczywiście, wytłumaczenie komuś w przekonujący sposób, że implikacja o fałszywym poprzedniku powinna być uznana za prawdziwą (równoważnie dla ucznia: ze zdania fałszywego wynika każde zdanie), nie jest proste. Znana jest anegdota o tym, jak jeden z poważnych profesorów matematyki zapytał kiedyś Bertranda Russella — jednego z najwybitniejszych logików XX wieku — czy rzeczywiście wierzy w to, że ze zdania fałszywego wynika każde zdanie. „Oczywiście", odparł Russell. „To czy mógłby Pan ze zdania $2 \cdot 2 = 5$ wywnioskować, że ja jestem papieżem?" „To bardzo proste — odparł Russell — z założenia wiemy, że $2 \cdot 2 = 5$. Z drugiej strony wiemy, że $2 \cdot 2 = 4$. Zatem $5 = 4$. Odejmijmy 3 od obu stron tej równości, dostaniemy $2 = 1$. Pan i papież to są dwie osoby, a wiemy, że $2 = 1$. Zatem Pan i papież to jedna osoba, a więc Pan jest papieżem." To piękna opowieść, ale chyba trzeba było geniuszu Bertranda Russella, by ją nam przekazać. Czy możemy oczekiwać, że będzie to tak samo jasne dla gimnazjalisty? Jestem przekonany, że nie. Utwierdzają mnie w tym wielokrotne rozmowy z moimi uczniami, w których dochodziło do rozważania podobnych kwestii logicznych. Powtórzę: dla nas jest to oczywiste, bo tak nas nauczono i do tego przywykliśmy. Wróćmy do zadania 6. Moi uczniowie trafnie wskazali na zdanie D, jednak argumentacja żadnego z nich nie była zadowalająca. Rozumienie zdań o skomplikowanej budowie logicznej (jak się okazuje, implikacja jest wystarczająco skomplikowana, zwłaszcza jeśli jest poprzedzona domyślnym kwantyfikatorem ogólnym) nie jest więc proste. A zdania w zadaniu 6 mają postać implikacji właśnie **poprzedzonej takim domyślnym kwantyfikatorem** — chodzi przecież o to, czy są one prawdziwe **dla każdej liczby**. Powtarzam, dla liczby 18 zdanie D jest prawdziwe. Na zakończenie pierwszej opowieści o moich uczniach i zadaniu 6: wreszcie jeden z tych uczniów, chyba matematycznie najlepszy, powiedział: „no tak, ostatecznie mogę się z Panem zgodzić, że prawdziwe jest zdanie *jeśli coś, to coś innego*, w którym to pierwsze *coś* jest fałszywe, ale to jest chore".

Omówię teraz moje drugie doświadczenie z podobnym problemem dotyczącym implikacji. Tym razem, na kółku matematycznym, w grupie około dwudziestu bardzo zdolnych uczniów, startujących w Olimpiadzie Matematycznej Gimnazjalistów, omawiałem następujące zadanie z V OMG:

Liczby całkowite a, b, c, d spełniają układ równań

$$\begin{cases} a+b+c+d = 101 \\ ab+cd = 200. \end{cases}$$

Wykaż, że dokładnie jedna z liczb a, b, c, d jest nieparzysta.

Moi uczniowie bardzo szybko przeprowadzili poprawne rozumowanie. Suma tych czterech liczb jest równa 101, a więc jest nieparzysta. Zatem, albo jedna z nich jest nieparzysta i trzy są parzyste, albo trzy z nich są nieparzyste i jedna jest parzysta. Gdyby trzy liczby były nieparzyste, to jeden z iloczynów ab i cd byłby nieparzysty, drugi parzysty i ich suma byłaby nieparzysta i nie byłaby równa 200. A więc dokładnie jedna liczba jest nieparzysta. Zapytałem teraz, czy to rzeczywiście jest koniec rozwiązania. My **wiemy**, że tak. Ale co by się stało, gdyby takie cztery liczby nie istniały? Popatrzmy na nieco zmodyfikowane zadanie:

Wykaż, że jeśli liczby całkowite dodatnie a, b, c, d spełniają układ równań

$$\begin{cases} a+b+c+d = 5 \\ ab+cd = 200, \end{cases}$$

to dokładnie jedna z liczb a, b, c, d jest nieparzysta.

Tym razem celowo nadałem zadaniu postać implikacji, a także nieco zmieniłem dane: liczby a, b, c i d są teraz dodatnie i liczbę 101 zastąpiłem liczbą 5. W niczym nie zmienia to powyższego rozwiązania. W zadaniu nie jest bowiem istotny znak rozważanych liczb oraz istotna jest tylko parzystość prawych stron obu równań. Nie ma znaczenia, ile wynosi suma tych liczb — ma tylko być nieparzysta. Jest jednak pewna różnica — nowy układ równań nie ma rozwiązania. Tutaj jest to widoczne od razu — wśród tych czterech liczb musi być jedna dwójka i trzy jedynki. Ale wtedy suma iloczynów $ab + cd$ byłaby równa 3. Takie liczby nie istnieją. Czy zatem ma sens pytanie o to, ile jest wśród nich liczb nieparzystych? Zresztą z pierwszego równania wynika coś dokładnie przeciwnego — są wśród nich trzy jedynki, a więc trzy liczby nieparzyste. Zmieńmy dane w zadaniu jeszcze raz:

Wykaż, że jeśli liczby całkowite dodatnie a, b, c, d spełniają układ równań

$$\begin{cases} a+b+c+d = 101 \\ \qquad\quad ab+cd = 1696, \end{cases}$$

to dokładnie jedna z liczb a, b, c, d jest nieparzysta.

Znów rozumowanie się nie zmieni. Tym razem zmieniliśmy (w stosunku do oryginału) prawą stronę drugiego równania. Pozostała ona jednak parzysta, a więc rozumowanie pozostanie bez zmian. Ten układ jednak też nie ma rozwiązania. Można oczywiście postawić zarzut, że liczba 1696 jest na przykład za duża. Nie o to chodzi. Dla 10 sąsiednich liczb parzystych układ równań ma rozwiązanie:

$$\begin{aligned}
1686 &= 1 \cdot 6 + 24 \cdot 70,\\
1688 &= 3 \cdot 8 + 26 \cdot 64,\\
1690 &= 1 \cdot 18 + 38 \cdot 44,\\
1692 &= 1 \cdot 12 + 28 \cdot 60,\\
1694 &= 1 \cdot 14 + 30 \cdot 56,\\
1698 &= 1 \cdot 18 + 40 \cdot 42,\\
1700 &= 6 \cdot 8 + 28 \cdot 59,\\
1702 &= 2 \cdot 11 + 28 \cdot 60,\\
1704 &= 3 \cdot 16 + 36 \cdot 46,\\
1706 &= 2 \cdot 2 + 23 \cdot 74.
\end{aligned}$$

A dla liczby 1696 rozwiązania nie ma. Nie jest przy tym łatwo stwierdzić, że rozwiązanie rzeczywiście nie istnieje (ja użyłem do tego komputera). Kwestia tych trudności nie ma jednak znaczenia dla dalszego ciągu. Chodzi bowiem o to, czy brak rozwiązania układu równań zmienia nasze przekonanie o poprawności rozwiązania zadania, a więc o prawdziwości udowodnionego zdania? Wywiązała się długa dyskusja między uczniami. Czy ma w ogóle sens mówienie o jakichkolwiek własnościach liczb, które nie istnieją? Czy ma sens twierdzenie, że dokładnie jedna z liczb a, b, c, d jest nieparzysta, jeśli takich liczb nie ma? A jeśli nie ma to sensu, to czy wolno twierdzić, że takie zdanie (przypominam: implikacja) jest prawdziwe? W tym kontekście zadałem im pytanie o podzielność z zadania 6 — czy jeśli liczba jest podzielna przez 12, to jest podzielna przez 6? Ponownie byłem świadkiem długiego sporu o to, czy to zdanie jest prawdziwe dla każdej liczby. Jeszcze raz podsunąłem im do zastanowienia przykład liczby 18. I jeszcze raz byłem świadkiem sporu o to, czy implikacja o fałszywym poprzedniku jest prawdziwa. Przypominam: ta dyskusja toczyła się w gronie bardzo dobrych uczniów. Nie można postawić im zarzutu, że nie potrafią przeprowadzać rozumowań. Rozwiązują oni bowiem zadania olimpijskie. Potwierdza to natomiast postawioną na początku tezę, że umiejętność wartościowania skomplikowanych formuł logicznych nie jest tożsama z umiejętnością prowadzenia rozumowań. Potwierdza, że logika języka naturalnego jest odmienna od logiki matematycznej. Pokazuje także to, że nawet uczniowie bardzo zdolni mogą mieć trudności z poprawną odpowiedzią na podobne pytania. Powtarzam — dla nas odpowiedź jest oczywista, bo **nas tego nauczono** oraz **do tego przywykliśmy**. I jeszcze jedna uwaga. Wspomniałem, że nawet uczniowie bardzo zdolni mają opisane wyżej trudności. Może właśnie dotyczy to przede wszystkim uczniów zdolnych, którzy są w stanie dostrzec problem i zrozumieć jego głębię. Przejdźmy do zadania 7 ze wspomnianego zestawu. Oto ono:

Zadanie 7.
Do pojemnika wsypano 200 koralików białych i 300 czerwonych. Wymieszano je i zapakowano do woreczków po 50 sztuk. Okazało się, że w jednym z woreczków znalazły się tylko białe koraliki.

Dokończ poniższe zdanie, wybierając odpowiedź spośród podanych.

Wobec tego nie jest możliwe, aby

A. wszystkie pozostałe białe koraliki znajdowały się w trzech woreczkach.
B. w jednym z pozostałych woreczków nie było białych koralików.
C. w większości pozostałych woreczków znalazło się po 17 białych koralików.
D. w każdym z pozostałych woreczków było więcej koralików białych niż czerwonych.

Aby zrozumieć, o co chodzi w zdaniu „nie jest możliwe, aby w jednym z pozostałych woreczków nie było białych koralików”, trzeba doskonale wyczuwać intuicyjnie prawa de Morgana dla zdań z kwantyfikatorami. Albo po prostu to wiedzieć. Logiką ludzie zajmowali się co najmniej od czasów Arystotelesa (IV wiek p.n.e.), a prawa de Morgana sformułowano wyraźnie dopiero w XIX wieku. Te ponad 2000 lat różnicy to dla mnie wystarczający dowód na to, że te prawa nie są intuicyjnie oczywiste. Dlaczego zatem niektórzy nasi uczniowie potrafią z tych praw poprawnie korzystać? **Bo ich tego uczymy.** Pamiętam, jak dla mnie odkryciem było uświadomienie sobie, co to jest kontrprzykład — a więc najsilniejszy argument za tym, że jakieś zdanie ogólne nie jest prawdziwe — tu właśnie kryje się potęga praw de Morgana. Dałem kiedyś moim uczniom zadanie z Olimpiady Matematycznej Gimnazjalistów: wyznacz wszystkie liczby naturalne n takie, że dla każdej pary liczb dodatnich x i y zachodzi nierówność $xy^n < x^4 + y^4$. Moi uczniowie rozumieli, że dla niektórych n trzeba będzie udowodnić nierówność. Ale jak udowodnić, że dla innych n ta nierówność **nie jest prawdziwa**? Zrozumienie, że wystarczy podać **jeden** przykład (np. dla $n = 1$ oraz $x = y = \frac{1}{2}$ mamy $xy = \frac{1}{4}$ i $x^4 + y^4 = \frac{1}{8}$, a więc **nie jest prawdą, że** $xy < x^4+y^4$), zajęło im sporo czasu. Protestowali, że przecież dostawali złe stopnie, gdy na klasówce rozwiązywali zadanie „na przykładzie”, a ja tu robię właśnie to samo. Zrozumienie, co to jest kontrprzykład, nie jest łatwe. Zauważmy, że poprawne rozwiązanie cytowanego zadania 7 wymaga właśnie skonstruowania kilku kontrprzykładów. Czy tego należy uczyć w gimnazjum? Moim zdaniem niektórych uczniów tak. Ale ta nauka powinna wynikać z rozwiązywanych przedtem zadań, takich jak wspomniane zadanie olimpijskie. To jednak dotyczy bardzo niewielkiej części uczniów.

Spróbujmy podsumować te rozważania o logice. Czy należy jej uczyć w szkole, a zwłaszcza w gimnazjum? Moim zdaniem jest to za trudne dla ogółu uczniów. W przypadku klasy z programem rozszerzonym być może jest to możliwe. W niektórych klasach próbowałem dyskutować z uczniami na te tematy, w innych nawet nie próbowałem, bo widziałem, że to się nie może udać. W takim razie co z podobnymi zadaniami? Czy mogą się one zdarzyć na egzaminie? Mam nadzieję, że nie. Dotychczasowe doświadczenia pokazują, że zadania egzaminacyjne nigdy nie były tak skomplikowane — i może tak będzie dalej. Jednego jestem pewien — uczenie logiki formalnej, rachunku zdań z wartościowaniem zerojedynkowym, tłumaczenie uczniom, co to jest tautologia — to wszystko jest w programie szkolnym całkowicie niepotrzebne. Należy uczyć rozumowań matematycznych na przykładzie odpowiednio dobranych zadań. Trzeba nauczyć, co to jest twierdzenie odwrotne, co to jest warunek konieczny i co to jest warunek wystarczający, co to jest warunek konieczny i wystarczający, trzeba nauczyć rozumowania przez sprowadzenie do niedorzeczności i trzeba nauczyć, co to jest kontrprzykład. Ale nie ma potrzeby zapisywać tego wszystkiego w sposób formalny. Uczmy naszych uczniów myśleć. Gdy się tego nauczą, można spróbować tę wiedzę o rozumowaniach podsumować, ucząc logiki. Ale nie odwrotnie.

19. Realizacja programu w Gimnazjum nr 13 im. S. Staszica w Warszawie

W 2010 roku przyjęliśmy do Gimnazjum nr 13 im. Stanisława Staszica w Warszawie dwie klasy, w których mieliśmy realizować opisany w tym poradniku rozszerzony program matematyki. Plan zajęć został ułożony tak, by obie klasy miały lekcje matematyki w tym samym czasie. Uczniowie obu klas zostali podzieleni (na podstawie sprawdzianu przeprowadzonego na pierwszej lekcji) na dwie grupy — silniejszą i słabszą. Grupę silniejszą nazwaliśmy grupą alfa, grupę słabszą grupą beta i od tego momentu nigdy nie używaliśmy określeń „silniejsza" i „słabsza". Do grupy alfa zakwalifikowaliśmy 36 uczniów, do grupy beta 24 uczniów (łącznie przyjęto 60 uczniów do obu klas). Nie było żadnego specjalnego egzaminu do tych dwóch klas. Po prostu sformowano je spośród tych uczniów przyjętych do szkoły (czyli spośród 5 klas), którzy zadeklarowali chęć uczestniczenia w programie rozszerzonym. Uznaliśmy, że na początku grupa alfa powinna być bardziej liczna; liczyliśmy się z możliwością ucieczki do grupy beta tych uczniów, którzy stwierdzą, że program rozszerzony w moim wydaniu jest dla nich zbyt ambitny i będą woleli jego nieco łagodniejszą wersję w wykonaniu mojej młodszej koleżanki, pani Agnieszki Potockiej. Rzeczywiście to zjawisko miało miejsce. Grupa alfa nieco stopniała na korzyść grupy beta. Pod koniec I klasy w grupie alfa były 32 osoby. W klasie II doszedł jeszcze jeden uczeń; w klasie III na początku (gdy główny nacisk położyłem na przygotowanie do OMG), znów miałem 36 uczniów. Po zawodach I stopnia OMG miałem jednak znów 32 uczniów.

Program rozszerzony — jak sama nazwa wskazuje — jest rozszerzeniem zwykłego programu nauczania w gimnazjum. Potrzebny jest więc podręcznik. Kilka lat temu, gdy po raz pierwszy zacząłem uczyć w gimnazjum, przestudiowałem wszystkie istniejące podręczniki, by wybrać ten jeden, z którego będę korzystał. Z tego podręcznika (w coraz to nowszych i — chyba — gorszych wersjach) korzystam do dziś. Uważam, że niniejszy poradnik nie jest miejscem na reklamowanie jednego konkretnego podręcznika. Uważam też, że każdy nauczyciel powinien dokonać samodzielnie podobnego przeglądu podręczników i wybrać z nich ten, który mu będzie najbardziej odpowiadał. Ja natomiast w tym miejscu powiem o kryteriach, którymi się kierowałem.

Po pierwsze chodziło mi o wybranie podręcznika z najmniejszą liczbą błędów. Podręcznika bezbłędnego nie znalazłem wówczas, odrzuciłem natomiast podręczniki, w których liczba błędów przekraczała moje (dość daleko posunięte) poczucie tolerancji. Odrzuciłem wszystkie podręczniki, w których pojawiało się słowo „zbiór" — przyczyny takiego mojego podejścia do teorii mnogości w szkole wyjaśniłem w poprzednim rozdziale. Odrzuciłem niektóre podręczniki ze względu na ich grafikę, rodzaj czcionki itp. W tekście matematycznym obowiązują pewne reguły dotyczące na przykład kroju czcionek. Ja sam używam do pisania tekstów matematycznych systemu $\TeX$, używanego dzisiaj powszechnie w naszym środowisku na całym świecie (tego systemu użyłem też do napisania i przygotowania do druku tego poradnika). W tym systemie do normalnego tekstu używane są czcionki szeryfowe. Jest też specjalnie dobrany krój czcionek do zapisu formuł matematycznych. Podręcznik drukowany czcionką bezszeryfową (w której na przykład nie umiem odróżnić liter I oraz l od cyfry 1), odrzucałem nawet bez dokładniejszego wczytywania się w zawartość podręcznika. Podręcznik wybrany przeze mnie, ku mojemu zadowoleniu, był złożony także w systemie $\TeX$. Odczuwałem zatem pewną wspólnotę z zespołem przygotowującym ten podręcznik. Widziałem, że dbają oni o te same standardy, które i ja uważam za ważne.

Chciałem, by w podręczniku były zadania proste, typowe, ale także i zadania nietypowe. Bardzo ważną cechą podręcznika jest to, by zadania dobrze przygotowywały do wprowadzenia w przyszłości nowych pojęć — mimo iż zadania dane wcześniej dotyczą zupełnie innego tematu. Z zadowoleniem przyjąłem również to, że po każdym rozdziale był zestaw zadań podsumowujących wszystko to, czego uczeń miał się w tym rozdziale nauczyć. Taki zestaw zadań jest doskonałym zestawem przygotowawczym do klasówki. Bardzo często mówiłem uczniom, że na klasówce dam wyłącznie (poza ewentualnie zadaniem na ocenę celującą) zadania z tego zestawu zadań. Uczeń, który te wszystkie zadania rozwiąże samodzielnie, sprawdzi swoje odpowiedzi z podanymi na końcu podręcznika i nauczy się tych rozwiązań, w zasadzie ma pewność otrzymania oceny bardzo dobrej. Czasem, gdy o tym opowiadam innym nauczycielom, spotykam się z zarzutem, że tak przecież nie można. Na klasówce powinny być wyłącznie zadania nowe, nieznane uczniom. Przecież uczeń może nauczyć się na pamięć kilkudziesięciu zadań i dostać dobry stopień. Odpowiadam, że właśnie o to mi chodzi, by uczeń nauczył się tych zadań. O kwestii uczenia się matematyki „na pamięć” już pisałem w tym poradniku, chyba w kilku miejscach. Podsumowując, chciałem, by było widoczne, że podręcznik jest naprawdę głęboko przemyślany, nawet jeśli zawiera różne drobne usterki. W używanym przeze mnie podręczniku znalazłem tylko kilka błędów (złe zadania), natomiast widziałem (a także wiedziałem), że powstał on na podstawie wieloletnich doświadczeń — najpierw w ostatnich klasach ośmioletniej szkoły podstawowej, a potem w przypadku nowszych wersji, w gimnazjum.

Chciałem również, by podręcznikowi towarzyszył zbiór zadań. Nie korzystałem natomiast nigdy z różnego rodzaju zeszytów ćwiczeń, kart pracy itp. Na lekcjach korzystaliśmy wyłącznie z podręcznika. Jako zasadę przyjąłem, że prawie wszystkie zadania znajdujące się w podręczniku (z wyjątkiem zadań uzupełniających, znajdujących się na końcu każdego rozdziału) zostaną rozwiązane i omówione na lekcjach. Zadania uzupełniające były traktowane jako zadania przygotowawcze do klasówek. Zadania ze zbioru zadań uczniowie rozwiązywali samodzielnie w domu. Na pierwszej lekcji, gdy zajmowaliśmy się sprawami organizacyjnymi, wspólnie z uczniami policzyliśmy zadania w zbiorze zadań i otrzymaną liczbę podzieliliśmy przez orientacyjną liczbę tygodni nauki. Okazało się, że uczniowie powinni tygodniowo rozwiązać około 20 zadań. Każdy uczeń musiał zatem założyć specjalny zeszyt do zadań domowych i na pierwszej lekcji w tygodniu oddać ten zeszyt do sprawdzenia. Ja sprawdzałem tylko to, czy uczniowie zrobili wymagane 20 zadań. W wyjątkowych przypadkach sprawdzałem poprawność rozwiązań. Mówiłem uczniom, że to oni są odpowiedzialni za porównanie wyniku z odpowiedzią znajdującą się w zbiorze zadań i ewentualne poprawienie rozwiązania. To nie były jedyne prace domowe. Mniej więcej raz w tygodniu uczniowie dostawali zadania dodatkowe. Te zadania oddawali na oddzielnych kartkach i ja sprawdzałem dokładnie rozwiązania.

Po tych uwagach dotyczących podręcznika przejdę do rozkładu zajęć. W roku szkolnym jest zazwyczaj 36 tygodni. W moim programie rozszerzonym mieliśmy po 5 godzin matematyki tygodniowo. To daje łącznie 180 godzin zajęć w roku szkolnym. W każdym roku szkolnym mamy dni wolne od nauki (takie jak np. 2 maja, dni egzaminów gimnazjalnych, rekolekcje). W inne dni uczniowie mają inne zajęcia szkolne (wycieczki klasowe, wyjścia do muzeum itp.). Zakładam, że z takich powodów w czasie roku szkolnego „przepada” ok. 25 godzin lekcyjnych. Zatem w rozkładzie zajęć uwzględniam tylko 155 godzin lekcyjnych matematyki. W poniższym rozkładzie zajęć nie uwzględniam kółka matematycznego. Prowadziłem takie kółko dla uczniów I klasy (od II semestru), przez całą II klasę oraz przez I semestr III klasy (do zawodów II stopnia OMG). Na kółko przeznaczałem 1 godzinę tygodniowo.

Klasa I

- Sprawy organizacyjne — 1 godz.
- Sudoku — 3 godz. (Razem dotąd 4 godz.).
- Powtórzenie ze szkoły podstawowej — 10 godz. (Razem dotąd 14 godz.).
  - ⋆ Własności liczb i działań.
  - ⋆ Ułamki i działania na ułamkach (zwłaszcza skracanie ułamków).
  - ⋆ Liczby pierwsze, NWD, NWW, algorytm Euklidesa.
  - ⋆ Dzielenie z resztą.
  - ⋆ Ułamki dziesiętne, ułamki okresowe.
  - ⋆ Kartkówka (np. z zaokrąglania liczb) i klasówka jednogodzinna.
- Zadania tekstowe — 12 godz. (Razem dotąd 26 godz.).
  - ⋆ W tym 2–3 godz. na wzory ogólne — po omówieniu wyrażeń algebraicznych.
  - ⋆ Klasówka jednogodzinna.
- Procenty — 9 godz. (Razem dotąd 35 godz.).
  - ⋆ Tworzenie wykresów procentowych.
  - ⋆ Kartkówka (3 podstawowe typy zadań) i klasówka jednogodzinna.
- Wyrażenia algebraiczne, część I — 15 godz. (Razem dotąd 50 godz.).
  - ⋆ Działania na wyrażeniach algebraicznych bez mnożenia sum algebraicznych, wyłączania poza nawias i rozkładania wyrażeń na czynniki.
  - ⋆ 1–2 kartkówki i klasówka jednogodzinna.
- Równania — 16 godz. (Razem dotąd 66 godz.).
  - ⋆ Układanie równań, w tym klasówka godzinna.
  - ⋆ Rozwiązywanie równań, w tym także równań z parametrami, w tym klasówka jednogodzinna.
- Przedziały i rozwiązywanie nierówności — 10 godz. (Razem dotąd 76 godz.).
  - ⋆ Przedziały i zaznaczanie ich na osi liczbowej.
  - ⋆ Rozwiązywanie nierówności.
  - ⋆ Wartość bezwzględna.
  - ⋆ Równania i nierówności z wartością bezwzględną.
  - ⋆ 2 kartkówki: jedna z rozwiązywania nierówności, druga z wartości bezwzgkędnej.
- Proporcje — 8 godz. (Razem dotąd 84 godz.).
  - ⋆ Klasówka jednogodzinna.
- Wyrażenia algebraiczne, część II — 12 godz. (Razem dotąd 96 godz.).
  - ⋆ Mnożenie wyrażeń algebraicznych.
  - ⋆ Wyłączanie poza nawias.
  - ⋆ Rozkładanie wyrażeń na czynniki.
  - ⋆ Wzory skróconego mnożenia.
  - ⋆ Dowodzenie nierówności.
  - ⋆ Kartkówka i klasówka jednogodzinna.
- Geometria trójkąta — 36 godz. (Razem dotąd 132 godz.) Ze względu na znaczenie geometrii w moim programie podaję liczby godzin na poszczególne tematy.
  - ⋆ Podstawowe pojęcia (3 godz.).
  - ⋆ Pierwsze twierdzenia (3 godz.).
  - ⋆ Zadania — zestawy I–IV (16 godz.).
  - ⋆ Papier w kratkę (3 godz.).
  - ⋆ Zadania z podręcznika (7 godz.).
  - ⋆ Klasówki (4 godz.).

- Symetrie — 10 godz. (Razem dotąd 142 godz.).
  - ⋆ W tym omówienie projektu o szlaczkach.
- Inne — 13 godz. (Razem dotąd 155 godz.).
  - ⋆ Test OMG, wraz z omówieniem (4 godz.).
  - ⋆ Omówienie zadań z zawodów I i II stopnia OMG (3 godz.).
  - ⋆ Omówienia i poprawy klasówek — 8 godz.

Klasa II

- Przygotowanie do Konkursu Wojewódzkiego i do OMG (na początku roku szkolnego) — 30 godz.
  - ⋆ Klasówka jednogodzinna.
- Dokończenie geometrii trójkąta (zestawy zadań V i VI) — 10 godz. (Razem dotąd 40 godz.).
  - ⋆ Klasówka jednogodzinna.
- Pola wielokątów, trójkąty prostokątne (zestaw VII) — 10 godz. (Razem dotąd 50 godz.).
  - ⋆ W tym zadania z podręcznika.
  - ⋆ Klasówka jednogodzinna.
- Geometria okręgu (zestawy zadań VIII–X) — 16 godz. (Razem dotąd 66 godz.).
  - ⋆ W tym zadania z podręcznika o wielkątach i okręgach.
  - ⋆ Klasówka jednogodzinna.
- Długość okręgu, pole koła — 4 godz. (Razem dotąd 70 godz.).
  - ⋆ Temat, który uczniowie przygotowują samodzielnie.
  - ⋆ Klasówka jednogodzinna, omówienie klasówki oraz poprawa (jednogodzinna).
- Układ współrzędnych — 4 godz. (Razem dotąd 74 godz.).
  - ⋆ Kartkówka.
- Konstrukcje geometryczne — 6 godz. (Razem dotąd 80 godz.).
  - ⋆ W tym omówienie działania programu komputerowego do przeprowadzania konstrukcji.
- Potęgi — 6 godz. (Razem dotąd 86 godz.).
  - ⋆ Klasówka jednogodzinna.
- Pierwiastki — 10 godz. (Razem dotąd 96 godz.).
  - ⋆ W tym usuwanie niewymierności.
  - ⋆ Średnia geometryczna i kwadratowa, nierówności między średnimi.
  - ⋆ Klasówka jednogodzinna.
- Układy równań — 10 godz. (Razem dotąd 106 godz.).
  - ⋆ Klasówka jednogodzinna.
- Stereometria — 24 godz. (Razem dotąd 130 godz.).
  - ⋆ Zajęcia wstępne (7 godz.).
  - ⋆ Graniastosłupy (6 godz.).
  - ⋆ Ostrosłupy (8 godz.).
  - ⋆ 3 klasówki jednogodzinne (3 godz.).
- Statystyka — 4 godz. (Razem dotąd 134 godz.).
  - ⋆ Kartkówka.
- Kombinatoryka i rachunek prawdopodobieństwa — 12 godz. (Razem dotąd 144 godz.).
  - ⋆ W tym omówienie i podsumowanie eksperymentu.
  - ⋆ Klasówka jednogodzinna.

- Inne — 9 godz. (Razem dotąd 155 godz.).
  - ⋆ Omówienie zadań z zawodów I i II stopnia OMG.
  - ⋆ Omówienia i poprawy klasówek.
  - ⋆ Warsztaty.

Klasa III

W klasie III lekcje zostały podzielone na dwa niezależne nurty. Pierwszy z nich, w wymiarze 2 godzin tygodniowo, był w całości poświęcony powtórzeniu i przygotowaniu do egzaminu gimnazjalnego. Drugi, w wymiarze 3 godzin tygodniowo, był poświęcony trzem tematom, które były pozostawione na III klasę (funkcje, figury podobne, bryły obrotowe) oraz przygotowaniu do zawodów matematycznych (Konkurs Wojewódzki i OMG). Omówię poniżej tylko rozkład godzin w tym drugim nurcie, w okresie od początku roku szkolnego do egzaminu gimnazjalnego.

W klasie III do egzaminu gimnazjalnego jest około 27 tygodni, tzn. ok. 80 godzin lekcyjnych. Zakładam, że ok. 10 godzin może zostać wykorzystane na inne aktywności.

- Funkcje — 10 godz.
- Figury podobne — 10 godz.
- Bryły obrotowe — 10 godz.
- Przygotowanie do zawodów matematycznych — 40 godz.

Czas po egzaminie gimnazjalnym był przeznaczony na poprawy klasówek (zmierzające do poprawy oceny rocznej) oraz na różne tematy dodatkowe. Na przykład, uczę wtedy dokładniej kombinatoryki i geometrii analitycznej.

Na zakończenie chcę napisać kilka słów o uzyskanych efektach. W klasie, którą uczyłem, w Olimpiadzie Matematycznej Gimnazjalistów (VIII OMG) wystartowali prawie wszyscy uczniowie. W III klasie do zawodów II stopnia zostało zakwalifikowanych 24 uczniów. Do finału (tzn. zawodów III stopnia) zostało zakwalifikowanych 11 uczniów — 8 uzyskało tytuł laureata, a 3 tytuł finalisty. Żadne inne gimnazjum w Polsce nie miało większej liczby trzecioklasistów uczestniczących w zawodach III stopnia VIII OMG. Jeśli do tego dodam jeszcze 2 laureatów z Gimnazjum Przymierza Rodzin im. Jana Pawła II, których także uczyłem według opisanego programu rozszerzonego, to okaże się, że dzięki temu programowi rozszerzonemu, 10 uczniów zostało laureatami OMG i 3 finalistami. Te liczby są chyba najlepszym dowodem skuteczności opisanego programu rozszerzonego. Zachęcam innych nauczycieli do skorzystania z moich doświadczeń i do wypromowania jak największej liczby laureatów i finalistów.

20. Zestawy zadań na warsztaty matematyczne

W tym rozdziale pokażę 9 przykładowych zestawów zadań na warsztaty matematyczne. Oczywiście takie zestawy można dawać uczniom także na kółkach matematycznych. Jak wspomniałem, najczęściej wybieram na warsztaty następujące cztery działy matematyki:

- teorię liczb,
- kombinatorykę,
- nierówności,
- geometrię.

Przykładowe zestawy zadań będą dotyczyć tych czterech działów matematyki. Każdy zestaw będzie składał się z co najmniej kilkunastu zadań. Można z każdego z nich wybrać kilka zadań jako zadania domowe (przygotowawcze) i kilka zadań do zestawów na warsztaty. Można też taki zestaw dać uczniom na kółku matematycznym. Wszystkie zadania pokażę wraz z rozwiązaniami lub ze wskazówkami do rozwiązań. Uczniowie przed warsztatami dostają także pewne materiały teoretyczne. Jest to czasem przypomnienie najważniejszych pojęć, których będą dotyczyć zadania, a czasem wprowadzenie nowych metod rozwiązywania zadań. Uczniowie zapoznają się z tymi metodami na podstawie dostarczonych materiałów, a następnie te metody są dokładnie omawiane na kółku przed warsztatami lub na początku warsztatów. Takie przykładowe materiały teoretyczne załączam przed zadaniami.

Zadania, które tu zamieszczam, zostały wybrane z wielu zbiorów zadań. Przede wszystkim wymienię zbiory zadań z polskich Olimpiad Matematycznych. Ponadto wykorzystałem m.in. zbiory: [Engel], [Larson], [Manfrino], [Pompe], [Xu]. Wiele zadań to zadania bardzo popularne, znajdujące się w różnych zbiorach zadań; w wielu przypadkach nie potrafię nawet przypomnieć sobie, skąd dane zadanie zaczerpnąłem.

Zadania z teorii liczb

Zadania z teorii liczb można podzielić na kilka naturalnych grup tematycznych. Pokażę tu cztery zestawy zadań z teorii liczb:

- Zestaw 1: zadania arytmetyczne, dotyczące postaci rozważanych liczb w zapisie dziesiętnym.
- Zestaw 2: zadania dotyczące różnych rodzajów liczb: kwadratów i liczb pierwszych.
- Zestaw 3: zadania dotyczące podzielności, wykorzystujące własności kongruencji.
- Zestaw 4: kilka typów równań diofantycznych.

W większości zadań będziemy wykorzystywać wzory skróconego mnożenia. Ponadto zadania w jednym zestawie mogą wykorzystywać techniki z innego zestawu (na przykład w rozwiązywaniu równań diofantycznych wykorzystujemy kongruencje). Uczniowie otrzymują przed warsztatami, oprócz zadań przygotowawczych, krótkie przypomnienie najważniejszych pojęć z teorii liczb, z których będziemy korzystać.

Zadania z kombinatoryki

Te zadania też podzielę na kilka grup tematycznych. Pokażę tu zadania dotyczące podstawowych metod zliczania (stosowanie reguł mnożenia i dodawania), zadania dotyczące zasady szufladkowej Dirichleta oraz wybrane zadania z kombinatoryki, które nie polegają na zliczaniu; są to m.in. zadania z teorii grafów oraz zadania dotyczące tzw. zasady ekstremum.

Uczniowie dostają krótkie przypomnienie najważniejszych pojęć używanych w zadaniach. Przypominam regułę mnożenia i regułę dodawania, trzy postaci zasady szufladkowej Dirichleta i kilka podstawowych pojęć z teorii grafów. Na pierwszych zajęciach warsztatów przypominam te pojęcia. Dość dużo czasu poświęcam zasadzie szufladkowej. Wyjaśniam uczniom, że w sformułowaniu zasady szufladkowej konkluzja ma postać — „istnieje co najmniej k piłeczek, które..." (dla odpowiedniego k). To sugeruje, że bardzo często rozwiązanie zadania, w którym należy udowodnić, że istnieje co najmniej ileś obiektów o pewnej własności, polega na zastosowaniu zasady szufladkowej. Wyjaśniam również, że rozwiązanie zadania, w którym stosujemy zasadę szufladkową, na ogół składa się z trzech etapów. Pierwszy polega na dokładnym wskazaniu, czym są szufladki i czym są piłeczki, drugi polega na sprawdzeniu, że liczba szufladek i liczba piłeczek spełniają założenia odpowiedniej postaci zasady szufladkowej oraz na zastosowaniu tej zasady szufladkowej. Efektem drugiego etapu rozwiązania jest stwierdzenie, że w którejś szufladce znajduje się wymagana liczba piłeczek. Wreszcie trzeci etap polega na wykazaniu, że jeśli piłeczki znajdują się w tej samej szufladce, to spełniają tezę twierdzenia, czyli spełniają wymagania stawiane im w treści zadania. W rozwiązaniu kilku pierwszych zadań ograniczę się tylko do wskazania szufladek i piłeczek oraz w niektórych przypadkach do podania wskazówki do etapu trzeciego; wykonanie etapu drugiego i trzeciego rozwiązania jest za każdym razem dość łatwe i pozostawię je jako ćwiczenie.

Trzeci zestaw zadań zawiera inne zadania z kombinatoryki. Niektóre zadania dotyczą teorii grafów; we wspomnianym krótkim przypomnieniu podaję uczniom podstawowe pojęcia tej teorii. Początkowe zadania (polecam zwłaszcza 5 pierwszych zadań) dotyczące zasady ekstremum pokazuję uczniom na początku warsztatów lub na kółku przygotowującym do warsztatów. Pozostałe zadania uczniowie mają już rozwiązać samodzielnie.

Przedstawione zadania z kombinatoryki znacznie wykraczają poza podstawę programową gimnazjum, a także ponad wymagania Olimpiady Matematycznej Gimnazjalistów. Dlaczego w takim razie wchodzę w ten dział matematyki tak głęboko? Jest wiele powodów. Dwa powody mają charakter osobisty. Po pierwsze, jest to dział matematyki, który szczególnie lubię i który wielokrotnie wykładałem na Uniwersytecie. Oczywiście gust nauczyciela jest jednym z najważniejszych czynników branych pod uwagę przy wyborze tematów zajęć dodatkowych. Po drugie, uważam, że dzięki ogromnemu doświadczeniu dydaktycznemu (także wyniesionemu z zajęć ze studentami) mogę nauczyć kombinatoryki ciekawiej niż innych działów matematyki. Po trzecie, uważam, że kombinatoryka szczególnie dobrze rozwija umiejętność myślenia. Pamiętajmy, że nie wymaga ona żadnej rozbudowanej teorii, wymaga tylko — zgodnie z nazwą — kombinowania. Uczniowie zdolni mogą rozwiązywać nawet bardzo trudne zadania wyłącznie dzięki pomysłowym rozumowaniom. Wreszcie po czwarte, kombinatoryka jest obecna na Olimpiadzie Matematycznej w znacznie większym zakresie niż to wynika z podstaw programowych dla gimnazjum i liceum. Sądzę, że przygotowania do Olimpiady Matematycznej z niektórych działów matematyki można rozpocząć już w gimnazjum i kombinatoryka do tego nadaje się wyjątkowo dobrze.

Zadania o nierównościach

W tym zestawie zadań rozwijamy metody dowodzenia nierówności opisane w rozdziale o algebrze. Zadania dotyczą następujących czterech metod dowodzenia nierówności:

- przekształcanie nierówności: podnoszenie do kwadratu, grupowanie,
- sprowadzenie do nierówności kwadratowej,
- wykorzystanie nierówności między średnimi,
- ciągi uporządkowane zgodnie i przeciwnie.

Przed warsztatami przypominam uczniom podstawowe własności nierówności opisane w rozdziale o algebrze. W szczególności przypominam nierówności między średnimi (harmoniczną, geometryczną, arytmetyczną i kwadratową). Te nierówności były treścią zadania, które rozwiązuję z uczniami na lekcji (zob. rozdział o algebrze). W przypadku, gdyby nie udało się rozwiązać tego zadania wcześniej na lekcji, rozwiązujemy je na kółku przed warsztatami. Następnie podaję uczniom definicję średnich w przypadku ogólnym, dla n liczb, oraz informuję, że nadal prawdziwe są te same nierówności między średnimi. Tych uogólnionych nierówności uczniom nie dowodzę, podobnie nie dowodzę, że każda z tych nierówności staje się równością tylko wtedy, gdy wszystkie liczby są równe. Proszę tylko, by uczniowie te fakty zapamiętali. Przypominam także twierdzenie o wyróżniku trójmianu kwadratowego.

Pierwsze trzy metody dla przypomnienia ilustruję kilkoma zadaniami wstępnymi. Mogę wykorzystać zadania już omawiane na lekcjach (lub na kółkach), mogę też wykorzystać początkowe zadania z prezentowanego zestawu. Czwartą metodę omawiam dokładniej i także ilustruję kilkoma zadaniami. Dokładny opis tej czwartej metody znajduje się w przygotowaniu z nierówności, które daję uczniom. W sformułowaniu dwóch wniosków pojawia się słowo „permutacja". Jeśli ten termin nie był jeszcze wyjaśniony przy okazji kombinatoryki, to teraz wyjaśniam uczniom, co on oznacza. Nie podaję żadnej formalnej definicji permutacji, ograniczam się do opisu — jest to ciąg o tych samych wyrazach, ale — być może — w innej kolejności. Ilustruję też to pojęcie kilkoma przykładami.

Jako komentarz do wprowadzenia teoretycznego o ciągach uporządkowanych zgodnie lub przeciwnie mogę tylko zauważyć, że uczniowie bez trudu wierzą, że w pokazany przykładowy sposób można uporządkować każdą permutację liczb od 1 do n. Ci uczniowie, którzy uczą się informatyki, bez trudu dostrzegają tu zadanie o sortowaniu tablic i algorytm polegający na tym, by za pomocą zamian dwóch elementów przenosić na właściwe miejsca kolejne liczby od 1 do $n-1$ (liczba n znajdzie się wtedy także na właściwym miejscu). Ścisły dowód wymagałby wprowadzenia dokładnej definicji permutacji oraz jakiegoś rozumowania indukcyjnego. To tłumaczy, dlaczego ograniczam się tylko do przykładu.

Zadania z geometrii

Przygotowany zestaw zadań z geometrii zawiera zadania dotyczące najprostszej geometrii trójkąta (rachunek kątów, przystawanie trójkątów, twierdzenie Pitagorasa, własności linii środkowej), geometrii okręgu (okręgi opisane na czworokącie i wpisane w czworokąt, potęga punktu względem okręgu) oraz własności pól. Pierwsze 10 zadań, to na ogół zadania dość łatwe (z wyjątkiem zadania 9). Następne zadania, wybrane z zestawów zadań [Pompe], są nieco trudniejsze. Podstawowe fakty, niektóre wraz z dowodami, podaję w krótkim przypomnieniu. Podaję tam np. twierdzenia o potędze punktu względem okręgu. Są to niezwykle ciekawe twierdzenia geometrii okręgu, chociaż zdaję sobie sprawę z tego, że moi uczniowie wykorzystają je dopiero podczas przygotowań do Olimpiady matematycznej w liceum. Zwracam uwagę na to, że tych twierdzeń oraz twierdzenia o dwusiecznej nie dowodzę, korzystając z podobieństwa trójkątów. Taki zestaw zadań z geometrii mogę dać na warsztatach już w II klasie, kiedy jeszcze nie omawiam z uczniami podobieństwa. Dlatego twierdzenia o potędze punktu względem okręgu wyprowadzam z twierdzenia Pitagorasa, a twierdzenia o dwusiecznej dowodzę, korzystając z pól trójkątów. W przyszłości uczniowie zobaczą dowody tych twierdzeń wykorzystujące podobieństwo trójkątów.

Przygotowanie z teorii liczb

Będziemy w tym przygotowaniu z teorii liczb rozważać wyłącznie liczby całkowite.

Oznaczenie

Jeśli a jest dzielnikiem b, to piszemy $a \mid b$. Zatem:

$$a \mid b \quad \text{wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje liczba } c \text{ taka, że} \quad b = ac.$$

Jeśli a nie jest dzielnikiem b, to piszemy $a \nmid b$.

Przykłady:

$3 \mid 12, \quad 7 \mid (-21), \quad (-5) \mid 20, \quad (-11) \mid (-77), \quad 7 \nmid 29, \quad (-3) \nmid (-50).$

Podstawowe własności relacji podzielności

a) Jeśli $a \mid b$ oraz $b \mid c$, to $a \mid c$.

b) Jeśli $a \mid b$ oraz $a \mid c$, to $a \mid bm + cn$ dla dowolnych liczb całkowitych m i n. W szczególności $a \mid b + c$ oraz $a \mid b - c$.

c) Jeśli $a + b = c$ oraz dwie spośród liczb a, b, c są podzielne przez d, to trzecia też jest podzielna przez d.

d) Jeśli $a \mid bc$ oraz $\text{NWD}(a, b) = 1$, to $a \mid c$.

e) Dla dowolnej liczby naturalnej $n \geq 1$:

$$a \mid b \quad \text{wtedy i tylko wtedy, gdy} \quad a^n \mid b^n.$$

f) Jeśli $a \mid c$, $b \mid c$ oraz $\text{NWD}(a, b) = 1$, to $ab \mid c$.

Dzielenie z resztą

Załóżmy, że dane są liczby całkowite a i b, przy czym $b > 0$. Mówimy, że liczba a daje iloraz q i resztę r przy dzieleniu przez b, jeśli

$$a = b \cdot q + r \quad \text{oraz} \quad 0 \leq r < b.$$

Przykłady:

- $17 = 4 \cdot 4 + 1$ oraz $0 \leq 1 < 4$, więc liczba 17 przy dzieleniu przez 4 daje iloraz 4 i resztę 1;
- $26 = 3 \cdot 8 + 2$ oraz $0 \leq 2 < 3$, więc liczba 26 przy dzieleniu przez 3 daje iloraz 8 i resztę 2;
- $39 = 3 \cdot 13 + 0$, więc liczba 39 przy dzieleniu przez 3 daje iloraz 13 i resztę 0;
- $-25 = 4 \cdot (-7) + 3$ oraz $0 \leq 3 < 4$, więc liczba -25 przy dzieleniu przez 4 daje iloraz -7 i resztę 3.

Kongruencje

Załóżmy, że dana jest liczba całkowita dodatnia m. Mówimy, że dwie liczby całkowite a i b **przystają modulo** m wtedy i tylko wtedy, gdy liczby a i b dają takie same reszty przy dzieleniu przez m. Piszemy wówczas

$$a \equiv b \pmod{m}.$$

Inaczej mówiąc

$$a \equiv b \pmod{m} \quad \text{wtedy i tylko wtedy, gdy} \quad m \mid a - b.$$

Relację przystawania modulo m nazywamy także relacją **kongruencji** modulo m. Stosujemy zapis

$$a \not\equiv b \pmod{m},$$

gdy liczby a i b nie przystają modulo m.

Przykłady:

- $12 \equiv 2 \pmod{10}$,
- $18 \equiv 0 \pmod{3}$,
- $1024 \equiv -1 \pmod{5}$,
- $-12 \equiv 3 \pmod{5}$,
- $-22 \equiv -1 \pmod{7}$,
- $22 \not\equiv 1 \pmod{4}$,
- $15 \not\equiv 0 \pmod{6}$.

Własności relacji kongruencji (przystawania)

1) $a \equiv a \pmod{m}$.
2) Jeśli $a \equiv b \pmod{m}$, to $b \equiv a \pmod{m}$.
3) Jeśli $a \equiv b \pmod{m}$ oraz $b \equiv c \pmod{m}$, to $a \equiv c \pmod{m}$.
4) Jeśli $a \equiv b \pmod{m}$ oraz $n \mid m$, to $a \equiv b \pmod{n}$.
5) $a \equiv b \pmod{m}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $ac \equiv bc \pmod{mc}$.
6) Jeśli $a \equiv b \pmod{m}$ oraz $a \equiv b \pmod{n}$, to $a \equiv b \pmod{\mathrm{NWW}(m,n)}$.
7) Jeśli $\mathrm{NWD}(m,n) = 1$, $a \equiv b \pmod{m}$ oraz $a \equiv b \pmod{n}$, to $a \equiv b \pmod{mn}$.
8) Jeśli $a \equiv b \pmod{m}$ oraz $c \equiv d \pmod{m}$, to:
   a) $a + c \equiv b + d \pmod{m}$,
   b) $a - c \equiv b - d \pmod{m}$,
   c) $ac \equiv bd \pmod{m}$.
9) Jeśli $a \equiv b \pmod{m}$, to $a^n \equiv b^n \pmod{m}$.
10) Jeśli $\mathrm{NWD}(a,m) = 1$ oraz $ab \equiv ac \pmod{m}$, to $b \equiv c \pmod{m}$.
11) Jeśli $\mathrm{NWD}(a,m) = 1$, to istnieje liczba b taka, że $ab \equiv 1 \pmod{m}$.

Liczby pierwsze

Liczbę naturalną p nazywamy liczbą pierwszą, jeśli $p \geq 2$ oraz p ma dokładnie dwa dzielniki: 1 i p.

Jeśli p jest liczbą pierwszą oraz $p \mid ab$, to $p \mid a$ lub $p \mid b$.

Jeśli p i q są dwiema różnymi liczbami pierwszymi oraz $p \mid a$ i $q \mid a$, to $pq \mid a$. Podobna zależność zachodzi dla większej liczby różnych liczb pierwszych.

Ważniejsze wzory skróconego mnożenia

$$\begin{aligned}
(a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2,\\
(a-b)^2 &= a^2 - 2ab + b^2,\\
(a+b)^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3,\\
(a-b)^3 &= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3,\\
a^2 - b^2 &= (a-b)(a+b),\\
a^3 - b^3 &= (a-b)(a^2 + ab + b^2),\\
a^3 + b^3 &= (a+b)(a^2 - ab + b^2),\\
a^n - b^n &= (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \ldots + a^2b^{n-3} + ab^{n-2} + b^{n-1}).
\end{aligned}$$

Zauważmy, że w ostatnim wzorze drugi czynnik po prawej stronie jest sumą n składników. Następnie, jeśli liczba n jest nieparzysta, to

$$a^n + b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \ldots + a^2b^{n-3} - ab^{n-2} + b^{n-1}).$$

Jeśli natomiast liczba n jest parzysta, to

$$a^n - b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \ldots - a^2b^{n-3} + ab^{n-2} - b^{n-1}).$$

Z trzech ostatnich wzorów wynikają następujące ważne własności relacji podzielności:

1) Dla dowolnej liczby naturalnej n: $a - b \mid a^n - b^n$.
2) Jeśli liczba n jest nieparzysta, to: $a + b \mid a^n + b^n$.
3) Jeśli liczba n jest parzysta, to: $a + b \mid a^n - b^n$.

W wielu zadaniach zapis $\underbrace{aa\ldots a}_{n}$ oznacza liczbę naturalną zapisaną za pomocą n cyfr równych a, np:

- zapis $\underbrace{55\ldots5}_{7}$ oznacza liczbę zapisaną za pomocą siedmiu piątek, tzn. liczbę 5555555,
- zapis $34\underbrace{55\ldots5}_{7}21$ oznacza liczbę 34555555521.

Przygotowanie z kombinatoryki

Reguły zliczania

Reguła mnożenia. Mamy do wykonania dwie czynności, jedną po drugiej. Pierwsza czynność kończy się jednym z m wyników. Druga czynność, niezależnie od wyniku pierwszej, kończy się jednym z n wyników. Wykonanie obu czynności kończy się wtedy jednym z mn wyników; wynikiem wykonania obu czynności jest oczywiście para wyników: wynik pierwszej i wynik drugiej.

Reguła dodawania. Mamy dwie czynności. Pierwsza kończy się jednym z m wyników, druga — jednym z n wyników. Zbiory wyników obu czynności są rozłączne, tzn. żaden wynik jednej czynności nie jest jednocześnie wynikiem drugiej. Wykonujemy jedną z tych czynności. Możemy wówczas uzyskać jeden z $m + n$ wyników.

Zasada szufladkowa Dirichleta

Zasada szufladkowa Dirichleta jest zasadą kombinatoryczną często używaną w rozwiązywaniu zadań olimpijskich. Spotykamy ją w trzech różnych postaciach. Najprostsza to:

- Mamy n szufladek i co najmniej $n + 1$ piłeczek. Piłeczki te wkładamy do szufladek. Wtedy w co najmniej jednej szufladce znajdą się co najmniej dwie piłeczki.

Nieco ogólniejsza jest postać następująca:

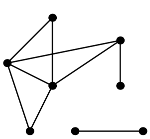
- Mamy n szufladek i co najmniej $mn+1$ piłeczek. Piłeczki te wkładamy do szufladek. Wtedy w co najmniej jednej szufladce znajdzie się co najmniej $m + 1$ piłeczek.

Wreszcie mamy nieskończoną postać tej zasady:

- Mamy n szufladek i nieskończenie wiele piłeczek. Piłeczki te wkładamy do szufladek. Wtedy w co najmniej jednej szufladce znajdzie się nieskończenie wiele piłeczek.

Grafy

Graf składa się ze zbioru **wierzchołków** (rysowanych najczęściej jako kropki na płaszczyźnie) i ze zbioru **krawędzi** łączących wierzchołki (rysowanych najczęściej jako odcinki o końcach w wierzchołkach; czasami rysujemy krzywe zamiast odcinków). Przykładowy graf widzimy na rysunku 20.1. Ma on 8 wierzchołków i 9 krawędzi. Na rysunku krawędzie mogą się przecinać. Punkt przecięcia krawędzi nie jest wierzchołkiem; wierzchołkami są tylko punkty zaznaczone grubymi kropkami. Jak widać, graf nie musi składać się z jednego kawałka: powyższy graf ma dwie części. Takie części nazywamy składowymi grafu. Czasami zamiast odcinków rysujemy strzałki: są to krawędzie skierowane i w takim przypadku graf nazywamy skierowanym. Za pomocą grafów możemy zilustrować wiele sytuacji: relację znajomości, sieć dróg, sieci elektryczne itp.


Rys. 20.1

Grafy skierowane mogą być przydatne przy ilustracji turniejów. Często w rozwiązywaniu zadań z teorii grafów korzysta się z tzw. zasady ekstremum, polegającej na tym, że wybiera się pewien zbiór największy (lub najmniejszy) ze względu na jakąś własność.

Wierzchołki v i w połączone krawędzią nazywamy wierzchołkami sąsiednimi. Mówimy też, że wierzchołek w jest sąsiadem wierzchołka v i wierzchołek v jest sąsiadem wierzchołka w.

Stopniem wierzchołka nazywamy liczbę krawędzi wychodzących z tego wierzchołka, czyli liczbę jego sąsiadów. Stopień wierzchołka v będziemy oznaczać symbolem $d(v)$. Na przykładowym rysunku mamy dwa wierzchołki stopnia 4, jeden wierzchołek stopnia 3, dwa wierzchołki stopnia 2 i trzy wierzchołki stopnia 1. Często stosuje się następujące twierdzenie.

Twierdzenie. (Lemat o uściskach dłoni) Przypuśćmy, że dany graf ma n wierzchołków $v_1, \ldots, v_n$ i m krawędzi. Wówczas

$$d(v_1) + \ldots + d(v_n) = 2m.$$

W naszym przykładowym grafie suma stopni wierzchołków jest rzeczywiście równa 18, tzn. jest równa podwojonej liczbie krawędzi:

$$4 + 4 + 3 + 2 + 2 + 1 + 1 + 1 = 18.$$

Wniosek. W każdym grafie liczba wierzchołków mających stopień nieparzysty jest parzysta.

W naszym grafie rzeczywiście są cztery wierzchołki stopnia nieparzystego.

Graf pełny jest to graf, w którym każde dwa wierzchołki są połączone krawędzią. Graf pełny mający n wierzchołkow oznaczamy symbolem K_n. Podzbiór A grafu G o tej własności, że każde dwa wierzchołki zbioru A są w grafie G połączone krawędzią, nazywamy kliką.

Turnieje

W kilku dotychczasowych edycjach Olimpiady Matematycznej Gimnazjalistów znalazły się zadania dotyczące turniejów. Z turniejem mamy do czynienia wtedy, gdy pewna skończona liczba uczestników (zawodników lub drużyn — w dalszym ciągu uczestników turnieju będziemy nazywać zawodnikami) rozgrywa ze sobą mecze. Będziemy rozpatrywali wyłącznie turnieje spełniające następujące warunki:

- każdy zawodnik gra z każdym innym zawodnikiem dokładnie jeden mecz,
- żaden zawodnik nie gra sam ze sobą,
- każdy mecz jest zakończony zwycięstwem jednego zawodnika, tzn. nie ma remisów.

Inaczej mówiąc, turniej jest to graf skierowany pełny, czyli taki, w którym każda para wierzchołków jest połączona dokładnie jedną krwędzią skierowaną.

Jeżeli x i y są dwoma zawodnikami uczestniczącymi w turnieju, to zapis $x \to y$ oznacza, że zawodnik x wygrał mecz z zawodnikiem y.

W dowolnym turnieju **cyklem** długości m nazywamy ciąg $u_1, u_2, \ldots, u_m$ zawodników o tej własności, że

$$u_1 \to u_2 \to \ldots \to u_{n-1} \to u_m \to u_1.$$

Oczywiście, jeśli ciąg $u_1, u_2, \ldots, u_m$ jest cyklem, to $m \geq 3$.

Przygotowanie z nierówności

Średnie

Dla dwóch liczb dodatnich a i b mamy:

$$\frac{1}{H}=\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{2},\quad G=\sqrt{ab},\quad A=\frac{a+b}{2},\quad K=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}.$$

Liczby H, G, A i K nazywamy odpowiednio: średnią harmoniczną, średnią geometryczną, średnią arytmetyczną i średnią kwadratową liczb a i b. Wzór na średnią harmoniczną można doprowadzić do postaci:

$$H=\frac{2ab}{a+b}.$$

Dla dowolnych liczb dodatnich a i b zachodzą następujące nierówności:

$$H\le G\le A\le K.$$

Dla dowolnych liczb dodatnich $a_1,\ldots,a_n$ definiujemy

$$\begin{aligned}\frac{1}{H}&=\frac{\frac{1}{a_1}+\ldots+\frac{1}{a_n}}{n},\\ G&=\sqrt[n]{a_1\cdot\ldots\cdot a_n},\\ A&=\frac{a_1+\ldots+a_n}{n},\\ K&=\sqrt{\frac{a_1^2+\ldots+a_n^2}{n}}.\end{aligned}$$

Wtedy zachodzą nierówności $H\le G\le A\le K$. Przy dowodzeniu nierówności ważne jest zastanowienie się, kiedy zachodzi równość. Otóż dowolna nierówność w ciągu nierówności $H\le G\le A\le K$ staje się równością wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie liczby, których średnie rozważamy, są równe.

Ciągi uporządkowane zgodnie i przeciwnie

Definicja. Dwa ciągi skończone $(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ oraz $(b_1,b_2,\ldots,b_n)$, tej samej długości, o wyrazach rzeczywistych, nazywamy ciągami **uporządkowanymi zgodnie** (lub **jednakowo uporządkowanymi**; czasem jest używana także nazwa **ciągi jednomonotoniczne**), jeśli

$$a_1\le a_2\le\ldots\le a_n\ \text{ oraz }\ b_1\le b_2\le\ldots\le b_n$$

lub

$$a_1\ge a_2\ge\ldots\ge a_n\ \text{ oraz }\ b_1\ge b_2\ge\ldots\ge b_n.$$

Definicja. Dwa ciągi skończone $(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ oraz $(b_1,b_2,\ldots,b_n)$, tej samej długości, o wyrazach rzeczywistych, nazywamy ciągami **uporządkowanymi przeciwnie**, jeśli

$$a_1\le a_2\le\ldots\le a_n\ \text{ oraz }\ b_1\ge b_2\ge\ldots\ge b_n$$

lub

$$a_1\ge a_2\ge\ldots\ge a_n\ \text{ oraz }\ b_1\le b_2\le\ldots\le b_n.$$

Definicja. Dla danych dwóch ciągów skończonych $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ oraz $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ tej samej długości symbolem

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ b_1 & b_2 & \ldots & b_n \end{bmatrix}$$

oznaczamy liczbę rzeczywistą

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ b_1 & b_2 & \ldots & b_n \end{bmatrix} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + \ldots + a_n \cdot b_n.$$

Używane jest też oznaczenie

$$\left| \begin{matrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ b_1 & b_2 & \ldots & b_n \end{matrix} \right\rfloor = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + \ldots + a_n \cdot b_n$$

(por. [Kourliandtchik]).

Twierdzenie. Jeśli ciągi (a_1, a_2) oraz (b_1, b_2) są uporządkowane zgodnie, to

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ b_2 & b_1 \end{bmatrix}.$$

Dowód. Zauważmy, że

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ b_2 & b_1 \end{bmatrix} = a_1b_1 + a_2b_2 - a_1b_2 - a_2b_1 = (a_2 - a_1)(b_2 - b_1) \geq 0.$$

Wniosek 1. Dane są dwa ciągi $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ oraz $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ liczb rzeczywistych. Jeśli

$$a_i \leq a_j \quad \text{oraz} \quad b_i \geq b_j,$$

to

$$\begin{bmatrix} a_1 & \ldots & a_i & \ldots & a_j & \ldots & a_n \\ b_1 & \ldots & b_i & \ldots & b_j & \ldots & b_n \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} a_1 & \ldots & a_i & \ldots & a_j & \ldots & a_n \\ b_1 & \ldots & b_j & \ldots & b_i & \ldots & b_n \end{bmatrix}.$$

Dowód. Przyjrzyjmy się lewej i prawej stronie dowodzonej nierówności. Mamy:

$$\begin{bmatrix} a_1 & \ldots & a_i & \ldots & a_j & \ldots & a_n \\ b_1 & \ldots & b_i & \ldots & b_j & \ldots & b_n \end{bmatrix} = a_1b_1 + \ldots + a_ib_i + \ldots + a_jb_j + \ldots + a_nb_n,$$

$$\begin{bmatrix} a_1 & \ldots & a_i & \ldots & a_j & \ldots & a_n \\ b_1 & \ldots & b_j & \ldots & b_i & \ldots & b_n \end{bmatrix} = a_1b_1 + \ldots + a_ib_j + \ldots + a_jb_i + \ldots + a_nb_n.$$

Mamy zatem udowodnić, że

$$a_ib_i + a_jb_j \leq a_ib_j + a_jb_i,$$

czyli

$$\begin{bmatrix} a_i & a_j \\ b_i & b_j \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} a_i & a_j \\ b_j & b_i \end{bmatrix}.$$

To jednak wynika natychmiast z twierdzenia, gdyż ciągi (a_i, a_j) oraz (b_j, b_i) są uporządkowane zgodnie.

Wniosek 2. Dane są dwa uporządkowane zgodnie ciągi $(a_1, \dots, a_n)$ oraz $(b_1, \dots, b_n)$ liczb rzeczywistych. Jeśli $(i_1, i_2, \dots, i_n)$ jest dowolną permutacją ciągu liczb $(1, 2, \dots, n)$, to

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ b_{i_1} & b_{i_2} & \dots & b_{i_n} \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ b_1 & b_2 & \dots & b_n \end{bmatrix}.$$

Wniosek 3. Dane są dwa uporządkowane przeciwnie ciągi $(a_1, \dots, a_n)$ oraz $(b_1, \dots, b_n)$ liczb rzeczywistych. Jeśli $(i_1, i_2, \dots, i_n)$ jest dowolną permutacją ciągu liczb $(1, 2, \dots, n)$, to

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ b_{i_1} & b_{i_2} & \dots & b_{i_n} \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ b_1 & b_2 & \dots & b_n \end{bmatrix}.$$

Pomijamy dowody wniosków 2 i 3. Wniosek 2 zilustrujemy jednym przykładem.

Przypuśćmy, że mamy dane ciągi $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$ i $(b_1, b_2, b_3, b_4, b_5)$ uporządkowane zgodnie. Weźmy permutację $(3, 1, 5, 2, 4)$ ciągu liczb $(1, 2, 3, 4, 5)$. Mamy udowodnić, że

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ b_3 & b_1 & b_5 & b_2 & b_4 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \end{bmatrix}.$$

Stosujemy czterokrotnie wniosek 1:

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ b_3 & b_1 & b_5 & b_2 & b_4 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ b_1 & b_3 & b_5 & b_2 & b_4 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ b_1 & b_2 & b_5 & b_3 & b_4 \end{bmatrix} \leq$$

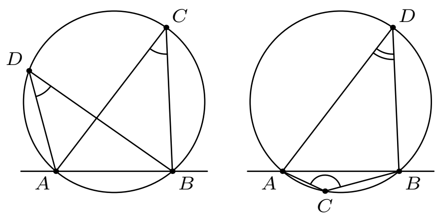
$$\leq \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_5 & b_4 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \end{bmatrix}$$

Przygotowanie z geometrii

Cztery punkty na okręgu

Bardzo często główny pomysł w rozwiązaniu zadania geometrycznego polega na dostrzeżeniu czterech punktów leżących na jednym okręgu. Przypuśćmy, że mamy daną prostą AB i dwa punkty C i D leżące poza tą prostą. Mamy następujące dwa warunki konieczne i wystarczające na to, by cztery punkty A, B, C i D leżały na jednym okręgu:

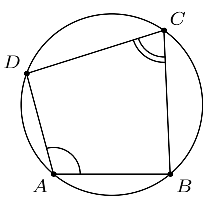
- jeśli punkty C i D leżą po tej samej stronie prostej AB, to punkty A, B, C i D leżą na jednym okręgu wtedy i tylko wtedy, gdy $\measuredangle ACB = \measuredangle ADB$ (rys. 20.2 po lewej stronie);
- jeśli punkty C i D leżą po różnych stronach prostej AB, to punkty A, B, C i D leżą na jednym okręgu wtedy i tylko wtedy, gdy $\measuredangle ACB + \measuredangle ADB = 180°$ (rys. 20.2 po prawej stronie).



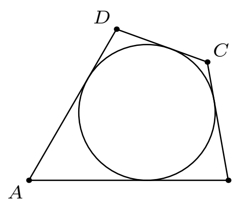
Rys. 20.2

Czworokąt wpisany w okrąg i czworokąt opisany na okręgu

- Na czworokącie wypukłym $ABCD$ można opisać okrąg wtedy i tylko wtedy, gdy sumy przeciwległych kątów są równe: $\measuredangle BAD + \measuredangle BCD = \measuredangle ABC + \measuredangle ADC = 180°$ (rys. 20.3).
- W czworokąt wypukły $ABCD$ można wpisać okrąg wtedy i tylko wtedy, gdy sumy przeciwległych boków są równe: $AB + CD = AD + BC$ (rys. 20.4).



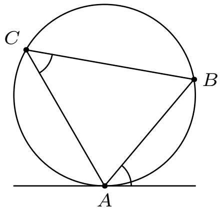
Rys. 20.3



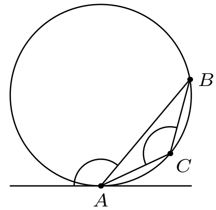
Rys. 20.4

Twierdzenie o kącie między styczną i cięciwą

Dana jest cięciwa AB okręgu i prosta styczna do tego okręgu w punkcie A. Kąt między cięciwą AB i tą prostą styczną jest równy kątowi wpisanemu opartemu na tym łuku AB, który jest zawarty w rozważanym kącie między styczną i cięciwą. Na rysunkach 20.5 i 20.6 widzimy dwie sytuacje — gdy ten kąt między styczną i cięciwą jest ostry (rys. 20.5) lub rozwarty (rys. 20.6).



Rys. 20.5

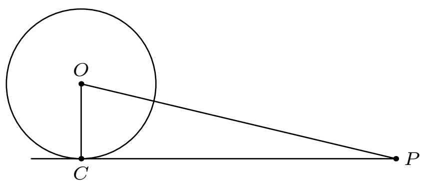


Rys. 20.6

Potęga punktu względem okręgu

Dany jest okrąg o środku O i promieniu r. Dany jest punkt P na zewnątrz tego okręgu; niech d oznacza odległość punktu P od środka okręgu: $PO = d$.

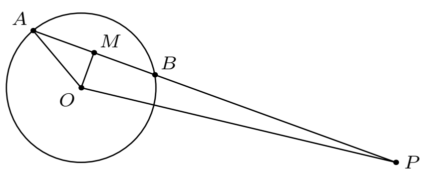
- Prosta PC jest styczna do okręgu w punkcie C (rys. 20.7).



Rys. 20.7

Ponieważ styczna PC jest prostopadła do promienia OC, więc z twierdzenia Pitagorasa wynika, że $PC^2 = PO^2 - OC^2 = d^2 - r^2$.

- Z punktu P prowadzimy półprostą przecinającą okrąg w punktach A i B. Przypuśćmy, że półprosta PA nie przechodzi przez środek okręgu; przypadek, gdy tak się dzieje, zostawiam jako ćwiczenie. Niech M będzie środkiem cięciwy AB (rys. 20.8).



Rys. 20.8

Wówczas

$$PA \cdot PB = (PM + MA) \cdot (PM - MB) = (PM + MA) \cdot (PM - MA) = PM^2 - MA^2.$$

Ponieważ odcinek OM jest prostopadły do cięciwy AB, więc otrzymaliśmy dwa trójkąty prostokątne AMO i PMO. Z twierdzenia Pitagorasa otrzymujemy:

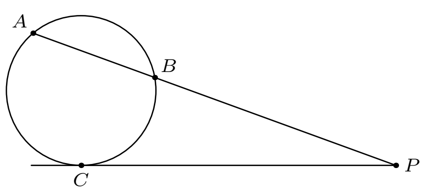
$$PM^2 = PO^2 - OM^2 \quad \text{oraz} \quad MA^2 = OA^2 - OM^2.$$

Zatem

$$PA \cdot PB = PM^2 - MA^2 = (PO^2 - OM^2) - (OA^2 - OM^2) = PO^2 - OA^2 = d^2 - r^2.$$

W przypadku, gdy rozważana półprosta przechodzi przez środek okręgu, otrzymamy tę samą równość $PA \cdot PB = d^2 - r^2$.

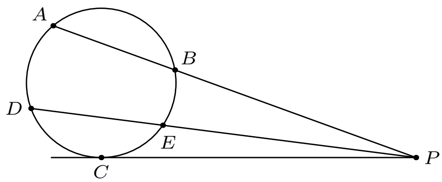
- Z punktu P prowadzimy półprostą przecinającą okrąg w dwóch punktach A i B oraz styczną do okręgu w punkcie C (rys. 20.9).



Rys. 20.9

Wówczas $PA \cdot PB = PC^2 = d^2 - r^2$.

- Z punktu P prowadzimy dwie półproste: jedna przecina okrąg w punktach A i B, druga przecina okrąg w punktach D i E. Prowadzimy także styczną do okręgu w punkcie C (rys. 20.10).



Rys. 20.10

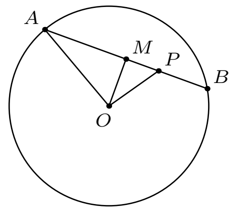
Wówczas $PA \cdot PB = PC^2 = PD \cdot PE = d^2 - r^2$.

- Liczbę $d^2 - r^2$ nazywamy potęgą punktu P względem danego okręgu.

Niech teraz punkt P będzie leżał wewnątrz danego okręgu; niech $PO = d$. Niech następnie dana będzie cięciwa AB taka, że punkt P leży wewnątrz tej cięciwy. Znów rozważymy tylko przypadek, gdy cięciwa AB nie jest średnicą okręgu, pozostawiając drugi przypadek jako ćwiczenie. Niech M będzie środkiem cięciwy AB. W przypadku, gdy punkty P i M pokrywają się, z twierdzenia Pitagorasa bez trudu wyprowadzamy równość (szczegóły pozostawię jako ćwiczenie)

$$PA \cdot PB = PA^2 = OA^2 - OP^2 = r^2 - d^2.$$

Przypuśćmy zatem, że punkty P i M nie pokrywają się. Bez zmniejszenia ogólności możemy przyjąć, że punkt M leży wewnątrz odcinka PA (rys. 20.11).



Rys. 20.11

Wówczas

$$PA \cdot PB = (PM + MA) \cdot (MB - PM) = (PM + MA) \cdot (MA - PM) = MA^2 - PM^2.$$

Tak jak wyżej, trójkąty AMO i PMO są prostokątne. Z twierdzenia Pitagorasa otrzymujemy

$$PM^2 = PO^2 - OM^2 \quad \text{oraz} \quad MA^2 = OA^2 - OM^2.$$

Zatem

$$PA \cdot PB = MA^2 - PM^2 = (OA^2 - OM^2) - (PO^2 - OM^2) = OA^2 - OM^2 = r^2 - d^2,$$

czyli

$$-(PA \cdot PB) = d^2 - r^2.$$

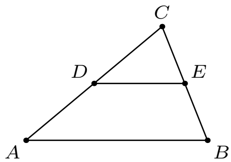
W tym przypadku także liczbę $d^2 - r^2$ nazywamy potęgą punktu P względem danego okręgu. Zauważmy, że jeśli punkt P leży na zewnątrz okręgu, to potęga tego punktu jest dodatnia, jeśli zaś punkt P leży wewnątrz okręgu, to jego potęga jest ujemna. Dla punktu P leżącego na okręgu przyjmujemy, że potęga jest równa 0; zauważmy, że w takim przypadku $d = r$, więc $d^2 - r^2 = 0$. Tak więc we wszystkich przypadkach potęga punktu względem okręgu jest określona wzorem $d^2 - r^2$.

Przypuśćmy wreszcie, że punkt P jest punktem przecięcia dwóch cięciw AB i CD danego okręgu. Wówczas

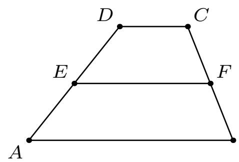
$$PA \cdot PB = r^2 - d^2 = PC \cdot PD.$$

Linia środkowa trójkąta i trapezu

- Załóżmy, że punkty D i E są odpowiednio środkami boków trójkąta ABC (rys. 20.12). Wówczas $AB \parallel DE$ oraz $DE = \frac{1}{2} \cdot AB$.
- Załóżmy, że dany jest trapez $ABCD$, w którym $AB \parallel CD$. Punkty E i F są odpowiednio środkami ramion AD i BC (rys. 20.13). Wówczas $AB \parallel CD \parallel EF$ oraz $EF = \frac{1}{2} \cdot (AB + CD)$.



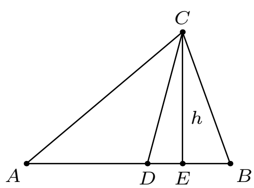
Rys. 20.12



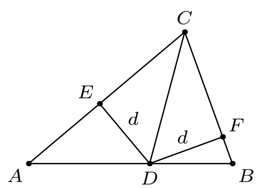
Rys. 20.13

Twierdzenie o dwusiecznej

Niech CD będzie dwusieczną kąta ACB trójkąta ABC. Wówczas trójkąty ADC i BDC mają wspólną wysokość h opuszczoną z wierzchołka C (rys. 20.14). Każdy punkt dwusiecznej jest jednakowo oddalony od ramion kąta, a więc trójkąty ACD i BCD mają równe wysokości d opuszczone z wierzchołka D, odpowiednio na podstawy AC i BC (rys. 20.15).



Rys. 20.14



Rys. 20.15

Zatem

$$P_{ACD} = \frac{1}{2} \cdot AD \cdot h = \frac{1}{2} AC \cdot d, \qquad P_{BCD} = \frac{1}{2} \cdot BD \cdot h = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot d.$$

Stąd wynika, że

$$\frac{AD}{BD} = \frac{P_{ACD}}{P_{BCD}} = \frac{AC}{BC}.$$

Zestaw 1.
Liczby w zapisie dziesiętnym

1. Udowodnij, że liczba $\underbrace{55\ldots5}_{48}$ jest podzielna przez 3.

2. Udowodnij, że liczba $\underbrace{55\ldots5}_{48}$ jest podzielna przez 7.

3. Udowodnij, że liczba $\underbrace{55\ldots5}_{40}\underbrace{77\ldots7}_{40}$ jest złożona.

4. Udowodnij, że liczba $\underbrace{55\ldots5}_{40}\underbrace{11\ldots1}_{40}$ nie jest kwadratem liczby naturalnej.

5. Rozstrzygnij, czy liczba $\underbrace{11\ldots1}_{14}\underbrace{22\ldots2}_{7}\underbrace{11\ldots1}_{14}+6$ jest pierwsza.

6. Udowodnij, że liczba $7\underbrace{55\ldots5}_{100}99$ jest podzielna przez 17.

7. Udowodnij, że liczba $1\underbrace{00\ldots0}_{99}1\underbrace{00\ldots0}_{99}1$ nie jest kwadratem liczby naturalnej.

8. Udowodnij, że liczba $1\underbrace{00\ldots0}_{99}3\underbrace{00\ldots0}_{99}1$ nie jest kwadratem liczby naturalnej.

9. Udowodnij, że liczby postaci $\underbrace{11\ldots1}_{n}2\underbrace{11\ldots1}_{n}$ dla $n = 1, 2, 3, \ldots$ są złożone.

10. Udowodnij, że liczba $4\underbrace{00\ldots0}_{99}3\underbrace{00\ldots0}_{99}1$ jest złożona.

11. Udowodnij, że

$$\Big(\underbrace{66\ldots6}_{100}\Big)^2 < \underbrace{44\ldots4}_{200} < \Big(\underbrace{66\ldots6}_{99}7\Big)^2.$$

12. Udowodnij, że liczba $32\underbrace{00\ldots0}_{7}201$ jest złożona.

13. Udowodnij, że liczba 312500051 jest złożona.

14. Udowodnij, że liczba 1280000401 jest złożona.

15. Udowodnij, że liczba $1\underbrace{00\ldots0}_{2013}1$ jest złożona.

Zestaw 2.

Różne rodzaje liczb

1. Znajdź wszystkie liczby pierwsze p takie, że liczba $p + 400$ jest kwadratem liczby całkowitej.

2. Udowodnij, że liczba $4^6 + 4 \cdot 6^5 + 9^5$ jest złożona.

3. Udowodnij, że liczba $2^{18} + 32 \cdot 10^5 + 5^{10}$ jest złożona.

4. Wyznacz wszystkie liczby naturalne $n \geq 1$, dla których liczba $n^4 + 4$ jest pierwsza.

5. Udowodnij, że liczba $2^{2002} + 5^{2000}$ jest złożona.

6. Udowodnij, że liczba $4^{15} + 15^4$ jest złożona.

7. Wykaż, że liczba $2^{14} + 5^8$ jest złożona.

8. Wykaż, że liczba $2^{20} + 4 \cdot 6^8 + 9^8$ jest złożona.

9. Wykaż, że liczba $2^{16} - 2 \cdot 6^7 + 3^{14}$ jest złożona.

10. Wykaż, że liczba $111^4 + 111^2 + 1$ jest złożona.

11. Wykaż, że liczba $9 \cdot 15^4 + 5 \cdot 15^2 + 1$ jest złożona.

12. Wykaż, że liczba $2^{10} \cdot 3^{14} + 2^7 \cdot 3^6 + 1$ jest złożona.

13. Wykaż, że liczba $2^{38} + 3 \cdot 2^{18} + 1$ jest złożona.

14. Udowodnij, że jeśli liczba całkowita a jest większa od 2 oraz $n \geq 2$, to liczba $a^n - 1$ jest złożona.

15. Udowodnij, że jeśli liczba n jest złożona, to liczba $2^n - 1$ też jest złożona.

16. Udowodnij, że jeśli liczba n ma dzielnik nieparzysty (większy od 1), to liczba $2^n + 1$ jest złożona.

17. Wyznacz wszystkie liczby pierwsze p i q takie, że $p^2 - 2q^2 = 1$.

18. Udowodnij, że jeśli liczby $2n+1$ i $3n+1$ są kwadratami (przy czym $n > 0$), to liczba $5n + 3$ jest złożona.

19. Udowodnij, że liczba $n^5 + n^4 + 1$ jest złożona dla $n > 1$.

20. Udowodnij, że liczba $5^{100} + 5^{75} + 5^{50} + 5^{25} + 1$ jest złożona.

Zestaw 3.
Kongruencje

1. Udowodnij, że $6 \mid n^3 - n$.

2. Udowodnij, że ostatnią cyfrą liczby 7^{256} jest 1.

3. Znajdź ostatnią cyfrę liczby 2^{100}.

4. Wyznacz resztę z dzielenia liczby $3^{80} + 7^{80}$ przez 11.

5. Udowodnij, że $10 \mid 53^{53} - 33^{33}$.

6. Udowodnij, że $29 \mid 2^{5n+1} + 3^{n+3}$.

7. Udowodnij, że jeśli $x^2 + y^2 = z^2$, to:

a) co najmniej jedna z liczb x i y jest podzielna przez 3,

b) co najmniej jedna z liczb x i y jest podzielna przez 4,

c) co najmniej jedna z liczb x, y i z jest podzielna przez 5.

8. Znajdź wszystkie liczby pierwsze p takie, że liczby $4p^2 + 1$ i $6p^2 + 1$ też są pierwsze.

9. Udowodnij, że $6 \mid 7^n - 1$.

10. Udowodnij, że $7 \mid 2222^{5555} + 5555^{2222}$.

11. Znajdź dwie ostatnie cyfry liczby 2^{999}.

12. Udowodnij, że $11 \mid 2^{6n+1} + 9^{n+1}$.

13. Udowodnij, że $133 \mid 11^{n+2} + 12^{2n+1}$.

14. Udowodnij, że $30 \mid n(n^2 - 11)(n^2 + 11)$.

15. Udowodnij, że $9 \mid 4^n + 15n - 1$.

16. Udowodnij, że $8 \mid 5^{n+1} + 2 \cdot 3^n + 1$.

17. Wykaż, że liczba $53 \cdot 83 \cdot 109 + 40 \cdot 66 \cdot 96$ jest złożona.

18. Udowodnij, że $504 \mid n^3(n^3 - 1)(n^3 + 1)$.

19. Znajdź liczbę pierwszą p taką, że:

a) $p + 10$ i $p + 14$ są pierwsze;

b) $p + 4$ i $p + 14$ są pierwsze.

20. Znajdź liczbę pierwszą p taką, że:

a) $2p + 1$ i $4p + 1$ są pierwsze;

b) $8p^2 + 1$ jest pierwsza.

21. Udowodnij, że jeśli $p > 3$ i liczby p oraz $10p + 1$ są pierwsze, to liczba $5p + 1$ nie jest pierwsza.

22. Udowodnij, że jeśli liczby p i $p^2 + 2$ są pierwsze, to liczba $p^3 + 2$ też jest pierwsza.

Zestaw 4.
Równania diofantyczne

1. Rozwiąż następujące równania w liczbach całkowitych:

a) $xy = x + y$,
b) $xy = x - 2y + 7$,
c) $xy = 7x + 3y - 11$,
d) $2xy = 3x - y + 2$,
e) $6xy = 2x + 9y + 14$.

2. Znajdź wszystkie liczby całkowite n, dla których następująca liczba jest całkowita:

a) $\dfrac{n+7}{n+2}$,
b) $\dfrac{3n+2}{2n+1}$,
c) $\dfrac{14n+52}{n^2+1}$,
d) $\dfrac{26n+138}{n^2+1}$.

Rozwiąż następujące równania:

3. $(2x + y)(5x + 3y) = 7$.
4. $x^2 - y^2 = 31$.
5. $xy = x + y + 3$.
6. $xy + 3x - 5y = -3$.
7. $xy = 20 - 3x + y$.
8. $x^2 - y^2 = 1988$.
9. $x^2 = 14 + y^2$.
10. $x^2 - 7y = 10$.
11. $x^2 - 3y^2 = 8$.
12. $x^2 - 3y = 17$.
13. $15x^2 - 7y^2 = 9$.
14. $x^2 + y^2 + z^2 = 8t - 1$.
15. $x^3 + 21y^2 + 5 = 0$.
16. $x_1^4 + \ldots + x_{14}^4 = 1599$.
17. $x^2 + y^2 = x + y + 2$.
18. $x^2 + y^2 = 9x + 1$.
19. $x^2 + 4x - 8y = 11$.
20. $x^2 + 5xy - y^2 = 6$.
21. $x^2 - xy + y^2 = x + y$.
22. $x^3 - 2y^3 - 4z^3 = 0$.

Zestaw 5.

Kombinatoryka — zliczanie

1. Ile jest liczb dziesięciocyfrowych, w których zapisie nie występuje zero i występuje dokładnie jedna cyfra parzysta?

2. Ile jest liczb dziesięciocyfrowych, w których zapisie nie występuje zero i występuje dokładnie jedna cyfra nieparzysta?

3. Ile jest liczb dziesięciocyfrowych, w których zapisie występuje dokładnie jedna cyfra parzysta?

4. Ile jest liczb dziesięciocyfrowych, w których zapisie występuje dokładnie jedna cyfra nieparzysta?

5. Ile jest liczb dziesięciocyfrowych, w których zapisie nie występuje zero i każda cyfra parzysta różna od zera występuje dokładnie jeden raz?

6. Ile jest liczb dziesięciocyfrowych, w których zapisie nie występuje zero i każda cyfra nieparzysta występuje dokładnie jeden raz?

7. Ile jest liczb dziesięciocyfrowych, w których zapisie każda cyfra parzysta występuje dokładnie jeden raz?

8. Ile jest liczb dziesięciocyfrowych, w których zapisie każda cyfra nieparzysta występuje dokładnie jeden raz?

9. Ile jest liczb dwunastocyfrowych, w których zapisie każda cyfra parzysta występuje dokładnie jeden raz?

10. Ile jest liczb dwunastocyfrowych, w których zapisie każda cyfra nieparzysta występuje dokładnie jeden raz?

11. Na okręgu wybrano n punktów i poprowadzono wszystkie cięciwy o końcach w tych punktach. Ile jest takich cięciw?

12. W turnieju szachowym uczestniczy n graczy. Każdy gracz gra dokładnie jedną grę z każdym innym. W każdej grze gracz, który wygrał, otrzymuje 1 punkt. Gracz, który przegrał, otrzymuje 0 punktów. W przypadku remisu obaj gracze dostają po pół punktu. Ile wynosi suma punktów zdobytych przez wszystkich graczy po zakończeniu turnieju?

13. Udowodnij, że

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

14. Ile jest liczb dziesięciocyfrowych o sumie cyfr równej 2?

15. Ile jest liczb dziesięciocyfrowych o sumie cyfr równej 3?

16. Ile jest liczb n-cyfrowych o sumie cyfr równej 2?

17. Ile jest liczb n-cyfrowych o sumie cyfr równej 3?

18. Ile jest liczb dziesięciocyfrowych, w których zapisie nie występuje zero i występują dokładnie dwie cyfry parzyste?

19. Ile jest liczb dziesięciocyfrowych, w których zapisie nie występuje zero i występują dokładnie dwie cyfry nieparzyste?

20. Ile jest liczb dziesięciocyfrowych, w których zapisie występują dokładnie dwie cyfry parzyste?

21. Ile jest liczb dziesięciocyfrowych, w których zapisie występują dokładnie dwie cyfry nieparzyste?

22. Prostokąt o wymiarach 10×1 podzielono na 10 kwadratów. W każdy z tych kwadratów chcemy wpisać jedną liczbę: 1, 2 lub 3. Chcemy przy tym, by każda liczba wystąpiła co najmniej jeden raz. Ponadto chcemy, by wpisane liczby tworzyły ciąg niemalejący, tzn. wszystkie liczby 1 mają znajdować się na lewo od liczb 2 i wszystkie liczby 3 mają występować na prawo od liczb 2. Jeden przykład takiego wpisania liczb widzimy na rysunku 20.16.

1	1	1	1	1	2	2	3	3	3

Rys. 20.16

Na ile sposobów można wpisać te liczby do naszego prostokąta, spełniając powyższe warunki?

23. Prostokąt o wymiarach 10×1 podzielono na 10 kwadratów. W każdy z tych kwadratów mamy wpisać jedną liczbę: 1, 2 lub 3. Chcemy, by wpisane liczby tworzyły ciąg niemalejący, tzn. na początku występuje blok liczb 1, potem blok liczb 2 i na końcu blok liczb 3. Nie wymagamy przy tym, by każda liczba wystąpiła co najmniej jeden raz, tzn. niektóre bloki liczb mogą nie wystąpić. Dwa przykłady takiego wpisania liczb widzimy na rysunkach 20.17 i 20.18.

1	1	1	2	2	2	2	2	3	3

Rys. 20.17

1	1	1	1	1	1	3	3	3	3

Rys. 20.18

Na ile sposobów można wpisać te liczby do naszego prostokąta, spełniając powyższe warunki?

24. Sześcioro rodzeństwa (czterech chłopców i dwie dziewczynki) kupiło bilety do kina na miejsca od 1 do 6 w tym samym rzędzie. Na ile sposobów mogą oni wybrać miejsca, tak, by dziewczynki nie siedziały obok siebie?

25. Ile istnieje trójek uporządkowanych (x, y, z) liczb całkowitych dodatnich takich, że

$$x + y + z = 10?$$

Ile istnieje takich trójek liczb całkowitych nieujemnych? Ile (w obu wariantach) jest rozwiązań równania

$$x + y + z = n,$$

gdzie n jest daną liczbą całkowitą dodatnią?

Zestaw 6.
Zasada szufladkowa Dirichleta

1. Udowodnij, że:
a) wśród dowolnych 3 osób co najmniej dwie są tej samej płci;
b) wśród dowolnych 13 osób co najmniej dwie urodziły się w tym samym miesiącu;
c) prosta nieprzechodząca przez wierzchołek trójkąta nie może przeciąć 3 boków;
d) płaszczyzna nieprzechodząca przez wierzchołek czworościanu może przeciąć co najwyżej 4 krawędzie;
e) wśród 5 punktów leżących w trójkącie równobocznym o boku 2 co najmniej dwa są oddalone nie więcej niż o 1;
f) wśród 17 punktów leżących w trójkącie równobocznym o boku 2 co najmniej dwa są oddalone nie więcej niż o $\frac{1}{2}$;
g) spośród 12 liczb dwucyfrowych można wybrać dwie, których różnica jest liczbą o dwóch jednakowych cyfrach;
h) wśród liczb postaci 10^n (dla $n = 1, 2, 3, \ldots$) istnieje nieskończenie wiele liczb dających tę samą resztę z dzielenia przez 17.

2. Z ciągu liczb $1, 4, 7, 10, \ldots, 94, 97, 100$ wybrano 20 liczb. Udowodnij, że wśród nich są co najmniej dwie różne liczby o sumie równej 104.

3. Udowodnij, że wśród dowolnie wybranych $n + 1$ liczb całkowitych znajdują się co najmniej dwie takie, że ich różnica jest podzielna przez n.

4. Udowodnij, że wśród $n + 1$ liczb wybranych ze zbioru $\{1, 2, \ldots, 2n\}$ znajdują się dwie, z których jedna jest dzielnikiem drugiej.

5. Liczba a nie dzieli się ani przez 2, ani przez 5. Udowodnij, że pewna jej wielokrotność ma w zapisie dziesiętnym same jedynki.

6. Liczby od 1 do 101 wypisano na tablicy w dowolnej kolejności. Udowodnij, że można wytrzeć 90 z nich w taki sposób, by pozostałe tworzyły ciąg rosnący lub malejący.

7. Na przyjęciu znalazło się n osób. Udowodnij, że co najmniej dwie z nich mają wśród obecnych tę samą liczbę znajomych.
Uwaga. Zakładamy, że nikt nie zalicza siebie samego do grona swoich znajomych, oraz że osoba A zna osobę B wtedy i tylko wtedy, gdy B zna A.

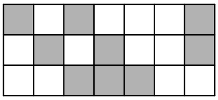
8. Udowodnij, że wśród 6 dowolnych osób albo są trzy, które się znają, albo są trzy takie, że żadne dwie z nich się nie znają.

9. Mamy danych 5 liczb całkowitych. Udowodnij, że istnieją wśród nich 3 liczby, których suma jest podzielna przez 3.

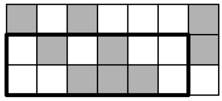
10. Mamy danych 17 liczb całkowitych. Udowodnij, że istnieje wśród nich 9 liczb, których suma jest podzielna przez 9.

11. Mamy danych 68 liczb całkowitych wybranych ze zbioru liczb od 1 do 100. Udowodnij, że istnieją wśród nich dwie liczby a i b takie, że $2a = b$.

12. Prostokąt o wymiarach 3×7 podzielono na 21 kwadratów. Każdy z tych kwadratów pomalowano na biało lub szaro. Przykład takiego kolorowania widzimy na rysunku 20.19. Udowodnij, że istnieje prostokąt, którego boki zawierają się w liniach podziału, mający cztery narożne pola tego samego koloru (rys. 20.20).



Rys. 20.19



Rys. 20.20

13. Prostokąt o wymiarach 4×28 podzielono na 112 kwadratów. Każdy z tych kwadratów pomalowano na jeden z trzech kolorów: czerwony, niebieski i zielony. Udowodnij, że istnieje prostokąt, którego boki zawierają się w liniach podziału, mający cztery narożne pola tego samego koloru.

14. Siedemnaście osób wymienia pomiędzy sobą listy, przy czym każda osoba koresponduje z każdą z pozostałych. Przedmiotem korespondencji są trzy różne zagadnienia, a każda para osób omawia korespondencyjnie tylko jedno z tych zagadnień. Udowodnij, że są takie trzy osoby, których wzajemna korespondencja dotyczy jednego i tego samego zagadnienia.

15. W turnieju szachowym uczestniczy 66 zawodników, każdy z każdym rozgrywa jedną partię, rozgrywki odbywają się w czterech miastach. Udowodnij, że pewna trójka zawodników rozgrywa wszystkie partie między sobą w tym samym mieście.

16. Udowodnij, że wśród 10 dowolnych osób albo są trzy, które się znają, albo są cztery takie, że żadne dwie z nich się nie znają.

17. Niech $x_1, x_2, x_3, \ldots$ będzie takim ciągiem liczb naturalnych, że

$$x_1 = 1 \quad \text{oraz} \quad x_n < x_{n+1} \leq 2n \ \text{ dla } n = 1, 2, 3, \ldots$$

Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej k istnieją takie liczby r i s, że $x_r - x_s = k$.

18. Udowodnij, że wśród dowolnych 7 liczb naturalnych istnieją dwie takie, że różnica ich kwadratów jest podzielna przez 10.

19. Udowodnij, że wśród dowolnych 12 liczb całkowitych istnieją takie dwie, których suma lub różnica dzieli się przez 20.

20. W grupie $n \geq 3$ osób każda ma parzystą (być może zerową) liczbę znajomych. Udowodnij, że istnieją trzy osoby mające tę samą liczbę znajomych.
Uwaga. Zakładamy, że nikt nie zalicza siebie samego do grona swoich znajomych, oraz że osoba A zna osobę B wtedy i tylko wtedy, gdy B zna A.

21. Do obrad przy okrągłym stole zasiadła parzysta liczba osób. Po przerwie obiadowej uczestnicy zajęli miejsca przy stole w sposób dowolny. Udowodnij, że istnieją dwie osoby przedzielone tą samą, co przed przerwą, liczbą osób.

22. Wokół okrągłego stołu postawiono 15 krzeseł. Naprzeciwko każdego krzesła położono kartkę z nazwiskiem osoby, dla której to miejsce jest przeznaczone. Osoby te jednak usiadły przy stole, nie zwracając uwagi na kartki. Wiadomo, że żadna osoba nie usiadła na miejscu przeznaczonym dla niej. Udowodnij, że można przekręcić okrągły stół w taki sposób, że co najmniej dwie osoby będą siedziały na właściwych miejscach.

23. Na płaszczyźnie wybrano 5 punktów kratowych (to znaczy punktów o obu współrzędnych całkowitych). Udowodnij, że istnieją wśród nich takie dwa punkty, że środek odcinka o tych końcach jest punktem kratowym.

24. W konferencji międzynarodowej oczestniczyło 1985 osób. Każda z nich zna co najwyżej 5 języków. W każdej trójce osób znajdują się co najmniej dwie znające ten sam język. Udowodnij, że co najmniej 200 osób zna ten sam język.

Zestaw 7.

Kombinatoryka — zasada ekstremum, grafy

1. Na płaszczyźnie danych jest n punktów. Każde trzy punkty są wierzchołkami trójkąta o polu ≤ 1. Udowodnij, że te punkty leżą w pewnym trójkącie o polu ≤ 4.

2. Dany jest skończony zbiór S punktów płaszczyzny o tej własności, że każda prosta przechodząca przez dwa punkty ze zbioru S przechodzi też przez trzeci punkt ze zbioru S. Udowodnij, że wszystkie te punkty są współliniowe.

3. Każdemu wierzchołkowi 100-kąta foremnego trzeba przyporządkować pewną dodatnią liczbę rzeczywistą. Czy możliwe jest takie przyporządkowanie, w którym każda liczba jest równa wartości bezwzględnej różnicy liczb, które z nią sąsiadują?

4. Na szachownicy o wymiarach $n \times n$ ustawiono pewną liczbę wież w taki sposób, że jeśli pole o współrzędnych (i, j) jest wolne, to w wierszu i-tym i w kolumnie j-tej razem znajduje się co najmniej n wież. Udowodnij, że na szachownicy znajduje się co najmniej $n^2/2$ wież.

5. Udowodnij, że w każdym turnieju, w którym grało n zawodników, wszystkich zawodników można ustawić w ciąg $v_1, v_2, \ldots, v_n$ tak, by $v_1 \to v_2 \to \ldots \to v_n$.

6. Zawodnik v wygrał w turnieju z zawodnikiem w **bezpośrednio**, jeśli $v \to w$, oraz wygrał **pośrednio**, jeśli istnieje taki zawodnik u, że $v \to u \to w$. Udowodnij, że w każdym turnieju istnieje zawodnik, który z każdym innym wygrał bezpośrednio lub pośrednio.

7. W pewnym kraju jest skończona liczba miast, które połączono siecią dróg jednokierunkowych. Wiadomo, że każde dwa miasta łączy pewna droga jednokierunkowa. Udowodnij, że istnieje miasto, z którego można odbyć podróż do każdego innego miasta.

8. W turnieju uczestniczy n graczy; każdych dwóch gra ze sobą co najwyżej raz. Udowodnij, że jeśli nie istnieje trójka graczy, którzy rozegrali ze sobą wszystkie trzy mecze, to łączna liczba rozegranych meczów jest niewiększa od $\frac{n^2}{4}$.

9. W każdej z trzech szkół uczy się n uczniów. Każdy uczeń ma w pozostałych dwóch szkołach razem co najmniej $n + 1$ znajomych. Udowodnij, że z każdej szkoły można wybrać po jednym uczniu tak, że wszyscy wybrani uczniowie się znają.

10. W turnieju uczestniczyło n zawodników. Każdy z nich rozegrał jedną partię z każdym innym zawodnikiem, nie było remisów. Udowodnij, że albo można podzielić uczestników turnieju na takie dwie grupy A i B, że każdy zawodnik z grupy A wygrał z każdym zawodnikiem z grupy B, albo można ustawić uczestników w ciąg $u_1, u_2, \ldots, u_n$ tak, że u_1 wygrał z u_2, u_2 wygrał z u_3, $\ldots$, u_{n-1} wygrał z u_n, u_n wygrał z u_1.

11. Dany jest graf mający $n \geq 3$ wierzchołków i co najmniej n krawędzi. Udowodnij, że w tym grafie istnieje cykl, to znaczy ciąg $v_1, v_2, \ldots, v_m$ wierzchołków takich, że v_1 sąsiaduje z v_2, v_2 sąsiaduje z v_3, $\ldots$, v_{m-1} sąsiaduje z v_m oraz v_m sąsiaduje z v_1.

12. W konferencji bierze udział $2n$ osób. Każdy uczestnik konferencji ma wśród pozostałych uczestników co najmniej n znajomych. Udowodnij, że wszystkich uczestników konferencji można zakwaterować w pokojach dwuosobowych tak, by każdy uczestnik mieszkał ze swoim znajomym.

13. W pewnej grupie kn osób każda osoba zna więcej niż $(k - 1)n$ innych. Udowodnij, że można z tej grupy wybrać $k + 1$ osób, z których każde dwie się znają.

14. Na sali znajduje się 100 osób, z których każda zna co najmniej 67 innych. Udowodnij, że jest na tej sali taka czwórka osób, w których każde dwie osoby się znają. Zakładamy, że jeśli osoba A zna osobę B, to osoba B zna osobę A.

15. W pewnej grupie $kn+1$ osób każda osoba zna więcej niż $(k-1)n$ innych. Udowodnij, że można z tej grupy wybrać $k+1$ osób, z których każde dwie się znają.

16. Na sali znajduje się 100 osób, z których każda zna co najmniej 66 osób spośród pozostałych 99 osób. Zakładamy, że jeśli osoba A zna osobę B, to również osoba B zna osobę A. Udowodnij, że możliwa jest wtedy taka sytuacja, że w każdej czwórce owych osób któreś dwie osoby się nie znają.

17. W pewnej grupie kn osób każda osoba zna co najmniej $(k-1)n$ innych. Wykaż, że możliwa jest sytuacja, iż w każdym zbiorze $k+1$ osób wybranych z tej grupy, jakieś dwie się nie znają. Inaczej mówiąc, w tej grupie może nie istnieć klika składająca się z $k+1$ osób.

18. W pewnej grupie $kn+1$ osób każda osoba zna co najmniej $(k-1)n$ innych. Wykaż, że możliwa jest sytuacja, iż w każdym zbiorze $k+1$ osób wybranych z tej grupy, jakieś dwie się nie znają. Inaczej mówiąc, w tej grupie może nie istnieć klika składająca się z $k+1$ osób.

19. W pewnej grupie kn osób każda osoba zna więcej niż $(k-1)n$ innych. Wykaż, że możliwa jest sytuacja, iż w każdym zbiorze $k+2$ osób wybranych z tej grupy, jakieś dwie się nie znają. Inaczej mówiąc, w tej grupie może nie istnieć klika składająca się z $k+2$ osób.

20. Na przyjęciu spotkało się co najmniej $m+1$ osób (przy czym $m \geq 3$). Każda grupa licząca dokładnie m uczestników spotkania ma wśród obecnych dokładnie jednego wspólnego znajomego. Udowodnij, że wśród obecnych:

a) nie istnieje grupa licząca więcej niż $m+1$ osób, w której wszyscy się znają;
b) każda osoba zna co najmniej jedną inną osobę;
c) istnieje grupa licząca trzy osoby, w której każde dwie się znają;
d) istnieje grupa licząca $m+1$ osób, w której wszyscy się znają;
e) było dokładnie $m+1$ osób i wszyscy się znali.

Inaczej mówiąc, naszym celem jest wykazanie, że wszyscy uczestnicy przyjęcia tworzą graf pełny, mający dokładnie $m+1$ wierzchołków.

21. Dany jest graf G taki, że każde dwa wierzchołki tego grafu mają nieparzystą liczbę wspólnych sąsiadów. Udowodnij, że wtedy stopień każdego wierzchołka tego grafu jest liczbą parzystą.

22. W pewnej grupie $2n$ osób każda osoba zna parzystą liczbę osób. Udowodnij, że dla każdej osoby A istnieje osoba B taka, że osoby A i B mają parzystą liczbę (być może zerową) wspólnych znajomych.

23. Dany jest graf G, w którym stopień każdego wierzchołka jest równy k. Ponadto dowolne dwa wierzchołki mają dokładnie dwóch wspólnych sąsiadów. Udowodnij, że liczba wierzchołków tego grafu jest równa $\frac{k^2-k+2}{2}$.

24. Na przyjęciu spotkało się n osób. Wśród dowolnych czterech osób znajduje się co najmniej jedna znająca pozostałe trzy osoby. Udowodnij, że na przyjęciu jest osoba znająca wszystkie inne.

25. W czterech pudełkach znajduje się 10 cukierków. W jednym ruchu możemy wziąć po jednym cukierku z dwóch różnych pudełek i włożyć je do trzeciego pudełka. Czy, wykonując takie ruchy, możemy przełożyć wszystkie cukierki do jednego pudełka?

Zestaw 8.

Nierówności

1. Udowodnij, że jeśli liczby rzeczywiste a i b spełniają nierówności $0 \leq a \leq b \leq 1$ (przy czym nie jest prawdą, że $ab = 1$), to

$$0 \leq \frac{b-a}{1-ab} \leq 1.$$

2. Udowodnij, że jeśli liczby rzeczywiste a i b spełniają nierówności $0 \leq a \leq b \leq 1$, to

$$0 \leq \frac{a}{1+b} + \frac{b}{1+a} \leq 1.$$

3. Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$ część ułamkowa liczby $\sqrt{4n^2+n}$ jest mniejsza od $\frac{1}{4}$.

4. Dane są liczby dodatnie a, b i c. Udowodnij, że

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \geq a+b+c.$$

5. Udowodnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b, c i d zachodzi nierówność

$$a^2+b^2+c^2+d^2 \geq (a+b+c)d.$$

6. Udowodnij, że dla dowolnych liczb dodatnich a i b zachodzi nierówność

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2.$$

7. Dane są takie liczby dodatnie a i b, że $a+b=1$. Udowodnij, że zachodzi nierówność

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)^2 + \left(b+\frac{1}{b}\right)^2 \geq \frac{25}{2}.$$

8. Udowodnij, że dla dowolnych dodatnich liczb rzeczywistych a, b i c zachodzi nierówność

$$(a+b+c)\cdot\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \geq 9.$$

9. Dane są liczby dodatnie $a_1, \ldots, a_n$ takie, że $a_1 + \ldots + a_n = 1$. Udowodnij, że

$$a_1^2 + \ldots + a_n^2 \geq \frac{1}{n}.$$

10. Dane są liczby dodatnie a, b i c. Udowodnij, że

$$ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a) \geq 6abc.$$

11. Dane są liczby dodatnie a, b i c. Udowodnij, że

$$\frac{a^3}{b} + \frac{b^3}{c} + \frac{c^3}{a} \geq ab + bc + ca.$$

12. Dane są takie liczby dodatnie a, b, c, że $abc = 1$. Udowodnij, że

$$ab^2 + bc^2 + ca^2 \geq ab + bc + ca.$$

13. Dane są liczby dodatnie a i b. Udowodnij, że

$$a^3 + b^3 \geq a^2b + ab^2.$$

14. Dane są różne od zera liczby rzeczywiste a i b. Udowodnij, że

$$a^4 + b^4 \leq \frac{a^6}{b^2} + \frac{b^6}{a^2}.$$

15. Udowodnij, że jeśli liczby rzeczywiste a i b spełniają nierówności $0 \leq a \leq b \leq 1$, to

$$0 \leq ab^2 - a^2b \leq \frac{1}{4}.$$

16. Dane są liczby rzeczywiste a, b, c i d takie, że $a + d = b + c$. Udowodnij, że

$$(a-b)(c-d) + (a-c)(b-d) + (d-a)(b-c) \geq 0.$$

17. Niech $f(x, y, z, t)$ oznacza wyrażenie algebraiczne

$$(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-t)^2 + (t-x)^2.$$

Niech następnie a, b, c i d będą liczbami rzeczywistymi takimi, że $a < b < c < d$. Udowodnij, że

$$f(a, c, b, d) > f(a, b, c, d) > f(a, b, d, c).$$

18. Dane są dowolne liczby rzeczywiste a, b i c. Udowodnij, że

$$a^2 + b^2 + c^2 + \frac{3}{4} \geq a + b + c.$$

19. Udowodnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych a i b zachodzi nierówność

$$a^2 + b^2 + ab \geq 3(a + b - 1).$$

20. Udowodnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych a i b takich, że $a \neq 0$ zachodzi nierówność

$$a^2 + b^2 + \frac{1}{a^2} + \frac{b}{a} \geq \sqrt{3}.$$

21. Dane są takie liczby dodatnie a, b, c, że $abc = 1$. Udowodnij, że

$$\frac{1+ab}{1+a} + \frac{1+bc}{1+b} + \frac{1+ca}{1+c} \geq 3.$$

22. Dane są takie liczby dodatnie a, b, c, że $a + b + c = 1$. Udowodnij, że

$$\sqrt{6a+7} + \sqrt{6b+7} + \sqrt{6c+7} \leq 9.$$

23. Dana jest liczba dodatnia x. Udowodnij, że

$$x + \frac{4}{x^2} \geq 3.$$

24. Dana jest liczba dodatnia x. Udowodnij, że

$$x^2 + \frac{16}{x} \geq 3.$$

25. Dane są liczby dodatnie a i b. Udowodnij, że

$$\frac{a^3}{b} + \frac{b^3}{a} \geq a^2 + b^2.$$

26. Dane są liczby dodatnie a i b. Udowodnij, że

$$\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} \leq \frac{1}{a^3} \cdot \sqrt{\frac{b}{a}} + \frac{1}{b^3} \cdot \sqrt{\frac{a}{b}}.$$

27. Dane są liczby dodatnie a, b i c. Udowodnij, że

$$a^3 + b^3 + c^3 \geq a^2b + b^2c + c^2a.$$

28. Dane są liczby dodatnie a, b i c. Udowodnij, że

$$a^3b + b^3c + c^3a \geq a^2bc + b^2ca + c^2ab.$$

29. Dane są liczby dodatnie $a_1, \ldots, a_n$. Udowodnij, że

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \ldots + \frac{a_n}{a_1} \geq n.$$

30. (Nierówność Nesbitta) Dane są liczby dodatnie a, b i c. Udowodnij, że

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}.$$

Zestaw 9.
Geometria

1. Dane są odcinki o długościach $1, 2, 3, \ldots, 16$. Ile różnych trójkątów można zbudować, wybierając za każdym razem trzy różne odcinki?

2. Dane są odcinki o długościach $1, 2, 3, \ldots, 17$. Ile różnych trójkątów można zbudować, wybierając za każdym razem trzy różne odcinki?

3. Dany jest trójkąt równoramienny ABC, w którym $AC = BC$. Na bokach AB i BC wybrano odpowiednio punkty D i E w taki sposób, by $CD = CE$. Udowodnij, że $\measuredangle ACD = 2 \cdot \measuredangle BDE$.

4. Punkt D leży wewnątrz trójkąta ABC. Na bokach AC i BC wybrano odpowiednio punkty E i F tak, że półprosta AF jest dwusieczną kąta CAD oraz półprosta BE jest dwusieczną kąta CBD. Półproste AF i BE przecinają się w punkcie G. Udowodnij, że

$$\measuredangle AGB = \frac{1}{2} \cdot (\measuredangle ACB + \measuredangle ADB).$$

5. Dany jest trójkąt równoramienny ABC, w którym $AC = BC$. Na boku AC wybieramy punkt D. Na półprostej CB, za punktem B, wybieramy taki punkt E, by $BE = AD$. Odcinki AB i DE przecinają się w punkcie F. Udowodnij, że $DF = EF$.

6. Dany jest trójkąt równoboczny ABC. Prosta prostopadła do AC, przechodząca przez punkt A, przecina w punkcie D prostą prostopadłą do BC, przechodzącą przez punkt B. Na bokach AC i BC wybieramy odpowiednio punkty E i F tak, by $\measuredangle EDF = 60°$. Udowodnij, że $EF = AE + BF$.

7. Dany jest trójkąt równoboczny ABC. Punkt D leży wewnątrz trójkąta ABC oraz $AD = BD$. Punkt E leży na zewnątrz trójkąta ABC, przy czym $AB = BE$ oraz $\measuredangle DBC = \measuredangle DBE$. Udowodnij, że $\measuredangle BED = 30°$.

8. Dany jest trójkąt prostokątny ABC, w którym $\measuredangle ACB = 90°$. Odcinek AD jest dwusieczną kąta BAC. Dane są długości odcinków BD i CD:

$$CD = p, \quad BD = q.$$

Oblicz długość boków AB i AC.

9. Dany jest kwadrat $ABCD$ i punkt E leżący wewnątrz niego. Dane są odległości punktu E od wierzchołków A, B i C kwadratu:

$$AE = 1, \quad BE = 2, \quad CE = 3.$$

Udowodnij, że $\measuredangle AEB = 135°$.

10. Na bokach AC i BC trójkąta ABC obrano odpowiednio punkty D i E w taki sposób, że

$$AD = CD, \quad 2 \cdot BE = CE.$$

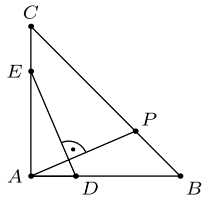
Odcinki AE i BD przecinają się w punkcie F. Udowodnij, że $AE = 4 \cdot EF$.

11. Dany jest trójkąt prostokątny równoramienny ABC, w którym $\measuredangle A = 90°$. Punkty D i E leżą odpowiednio na bokach AB i AC tego trójkąta, przy czym $AD = CE$. Prosta przechodząca przez punkt A i prostopadła do prostej DE przecina bok BC w punkcie P (rys. 20.21). Wykaż, że $AP = DE$.

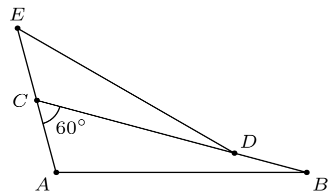
12. Dany jest trójkąt ABC, w którym:

$$\measuredangle ACB = 60^\circ \quad \text{oraz} \quad AC < BC.$$

Punkt D leży na boku BC, przy czym $BD = AC$. Punkt E jest punktem symetrycznym do punktu A względem punktu C (rys. 20.22). Udowodnij, że $AB = DE$.



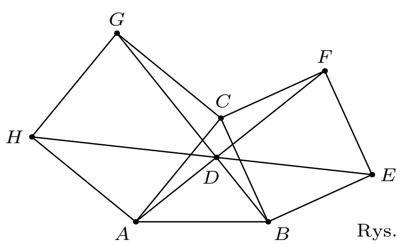
Rys. 20.21



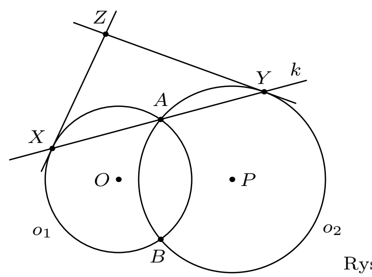
Rys. 20.22

13. Na bokach BC i AC trójkąta ostrokątnego ABC zbudowano, po zewnętrznej stronie, kwadraty $BCFE$ i $ACGH$ (rys. 20.23). Udowodnij, że proste AF, BG i EH przecinają się w jednym punkcie.

14. Dwa ustalone okręgi o_1 i o_2 przecinają się w punktach A i B. Prosta k przechodzi przez punkt A i przecina okręgi o_1 i o_2 odpowiednio w punktach X i Y, przy czym punkt X leży na zewnątrz okręgu o_2, a punkt Y na zewnątrz okręgu o_1. Styczne do okręgów o_1 i o_2 w punktach X i Y przecinają się w punkcie Z (rys. 20.24). Udowodnij, że miara kąta XZY nie zależy od wyboru prostej k.

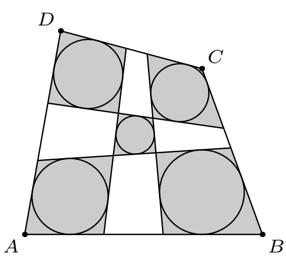


Rys. 20.23

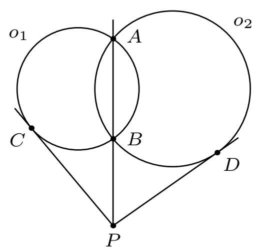


Rys. 20.24

15. Czworokąt wypukły $ABCD$ podzielono na dziewięć czworokątów, jak pokazano na rysunku 20.25. Udowodnij, że jeśli w zacieniowane czworokąty można wpisać okręgi, to również w czworokąt $ABCD$ można wpisać okrąg.



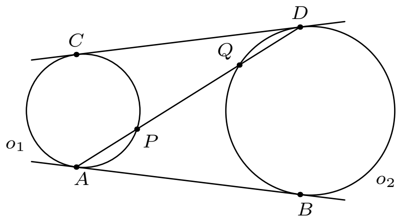
Rys. 20.25



Rys. 20.26

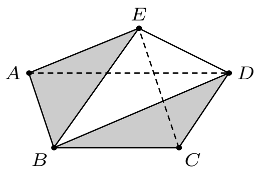
16. Okręgi o_1 i o_2 przecinają się w punktach A i B. Punkt P leży na prostej AB i na zewnątrz obu okręgów. Przez punkt P poprowadzono proste styczne do okręgów o_1 i o_2, odpowiednio w punktach C i D (rys. 20.26). Wykaż, że $PC = PD$.

17. Okręgi o_1 i o_2 są rozłączne zewnętrznie. Wspólna styczna zewnętrzna do tych okręgów jest styczna do okręgów o_1 i o_2 odpowiednio w punktach A i B. Druga wspólna styczna zewnętrzna do tych okręgów jest styczna do okręgów o_1 i o_2 odpowiednio w punktach C i D. Prosta AD przecina okręgi o_1 i o_2 odpowiednio w punktach P i Q (rys. 20.27). Udowodnij, że $AP = QD$.



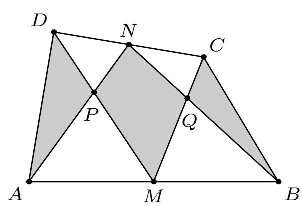
Rys. 20.27

18. Dany jest pięciokąt wypukły $ABCDE$. Jego przekątna AD jest równoległa do boku BC, a przekątna CE jest równoległa do boku AB (rys. 20.28). Wykaż, że pola trójkątów ABE i BCD są równe.



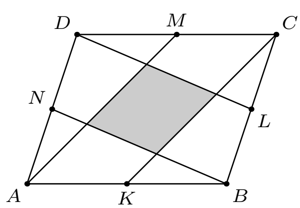
Rys. 20.28

19. Punkty M i N są odpowiednio środkami boków AB i CD czworokąta wypukłego $ABCD$. Odcinki AN i DM przecinają się w punkcie P, odcinki BN i CM przecinają się w punkcie Q (rys. 20.29). Udowodnij, że suma pól trójkątów ADP i BCQ jest równa polu czworokąta $MPNQ$.



Rys. 20.29

20. Punkty K, L, M, N są odpowiednio środkami boków AB, BC, CD, DA równoległoboku $ABCD$ (rys. 20.30). Znając pole równoległoboku $ABCD$, oblicz pole czworokąta ograniczonego prostymi AM, BN, CK, DL.



Rys. 20.30

Rozwiązania zadań

Zestaw 1.

Liczby w zapisie dziesiętnym

Niektóre zadania tego zestawu można rozwiązać, po prostu wykonując działania na podanych liczbach wielocyfrowych lub zauważając pewne prawidłowości występujące w trakcie wykonywania tych działań. W innych można skorzystać ze znanych cech podzielności (przez 3 i przez 9). Jest to dobra okazja do wprowadzenia uogólnionych cech podzielności przez te liczby. Mianowicie, jeśli przez $S(n)$ oznaczymy sumę cyfr liczby n (w zapisie dziesiętnym), to:

- reszty z dzielenia przez 3 liczb n i $S(n)$ są równe,
- reszty z dzielenia przez 9 liczb n i $S(n)$ są równe.

Inaczej mówiąc:

- $n \equiv S(n) \pmod 3$,
- $n \equiv S(n) \pmod 9$.

Dowód tej uogólnionej cechy podzielności można przeprowadzić przy okazji omawiania z uczniami kongruencji; można też po prostu tę cechę podać bez dowodu. W gruncie rzeczy, cechy podzielności przez 3 i przez 9 były podane w szkole podstawowej „na wiarę”, bez dowodu.

W wielu zadaniach istotne będzie wykorzystanie następującej równości:

$$\underbrace{aa\ldots a}_{n} = a \cdot \underbrace{11\ldots 1}_{n} = \frac{a}{9} \cdot \underbrace{99\ldots 9}_{n} = \frac{a}{9} \cdot (10^n - 1).$$

Wynika ona po prostu stąd, że

$$\underbrace{99\ldots 9}_{n} = 10^n - 1.$$

Na przykład

$$\underbrace{11\ldots 1}_{10} = 1111111111 \quad \text{oraz} \quad \underbrace{55\ldots 5}_{100} = \frac{5}{9} \cdot (10^{100} - 1).$$

Zastosowanie tej równości w rozwiązaniach zadań będzie bardzo dobrym ćwiczeniem w przekształcaniu wyrażeń algebraicznych i korzystaniu ze wzorów skróconego mnożenia. W niektórych zadaniach wykorzystujemy także proste własności nierówności.

Kilka ostatnich zadań tego zestawu można rozwiązać, rozkładając na czynniki pewne wyrażenie algebraiczne (wielomian jednej zmiennej). Wskazana metoda, polegająca na ułożeniu i rozwiązaniu w liczbach całkowitych skomplikowanego układu równań, jest trudna i pracochłonna. Jednak wielu uczniów potrafi ją zrozumieć i wykorzystać przy innych okazjach. Można też otrzymać szukany rozkład za pomocą grupowania i stosowania wzorów skróconego mnożenia. Na ogół takie rozwiązanie wymaga od ucznia sporej pomysłowości: trzeba odpowiednie wyrazy dodać i odjąć, następnie odpowiednio pogrupować składniki sumy i dostrzec możliwość zastosowania wzoru skróconego mnożenia. Warto jednak taką pomysłowość ćwiczyć.

1. Udowodnij, że liczba $\underbrace{55\ldots5}_{48}$ jest podzielna przez 3.

Rozwiązanie. Zauważamy, że suma cyfr danej liczby jest równa $48 \cdot 5$, a więc jest podzielna przez 3.

2. Udowodnij, że liczba $\underbrace{55\ldots5}_{48}$ jest podzielna przez 7.

Rozwiązanie. Wykonując algorytm dzielenia pisemnego, po pierwszych pięciu dzieleniach zauważamy, że $555555 : 7 = 79365$. Zatem

$$\begin{aligned}\underbrace{55\ldots5}_{48} &= 555555 \cdot 10^{42} + \underbrace{55\ldots5}_{42} = 555555 \cdot 10^{42} + 555555 \cdot 10^{36} + \underbrace{55\ldots5}_{36} = \ldots = \\ &= 555555 \cdot (10^{42} + 10^{36} + 10^{30} + 10^{24} + 10^{18} + 10^{12} + 10^{6} + 1) = \\ &= 7 \cdot 79365 \cdot (10^{42} + 10^{36} + 10^{30} + 10^{24} + 10^{18} + 10^{12} + 10^{6} + 1) = \\ &= 7 \cdot 79365079365079365079365079365079365079365079365,\end{aligned}$$

a więc liczba $\underbrace{55\ldots5}_{48}$ jest podzielna przez 7.

Wynik końcowy można było otrzymać, wykonując algorytm dzielenia pisemnego i zauważając, że te same dzielenia (prowadzące do uzyskania cyfr 79365 ilorazu, a właściwie 079365) powtórzymy 8 razy.

Zadanie możemy też rozwiązać, korzystając z równości

$$\underbrace{55\ldots5}_{48} = \frac{5}{9} \cdot (10^{48} - 1).$$

Ponieważ

$$\begin{aligned}10^{48} - 1 &= (10^{24} + 1)(10^{24} - 1) = (10^{24} + 1)(10^{12} + 1)(10^{12} - 1) = \\ &= (10^{24} + 1)(10^{12} + 1)(10^{6} + 1)(10^{6} - 1) = \\ &= (10^{24} + 1)(10^{12} + 1)(10^{6} + 1)(10^{3} + 1)(10^{3} - 1)\end{aligned}$$

oraz $10^3 + 1 = 1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$ i $10^3 - 1 = 999 = 9 \cdot 111 = 9 \cdot 3 \cdot 37$, więc

$$\underbrace{55\ldots5}_{48} = \frac{5}{9} \cdot (10^{48} - 1) = 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 3 \cdot 37 \cdot (10^{24} + 1)(10^{12} + 1)(10^{6} + 1).$$

Uwaga. Kontynuując ostatnie postępowanie, możemy uzyskać dalszy rozkład na czynniki liczby $\underbrace{55\ldots5}_{48}$, ostatecznie otrzymując rozkład na czynniki pierwsze. W tym celu skorzystamy ze wzoru

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2).$$

Mamy zatem

$$\begin{aligned}10^{24} + 1 &= (10^8)^3 + 1^3 = (10^8 + 1)\big((10^8)^2 - 10^8 + 1\big) = (10^8 + 1)(10^{16} - 10^8 + 1), \\ 10^{12} + 1 &= (10^4)^3 + 1^3 = (10^4 + 1)\big((10^4)^2 - 10^4 + 1\big) = (10^4 + 1)(10^8 - 10^4 + 1), \\ 10^{6} + 1 &= (10^2)^3 + 1^3 = (10^2 + 1)\big((10^2)^2 - 10^2 + 1\big) = (10^2 + 1)(10^4 - 10^2 + 1).\end{aligned}$$

Obliczenia komputerowe pokazują, że liczby

$$10^2 + 1 = 101, \qquad 10^8 - 10^4 + 1 = 99990001,$$
$$10^4 - 10^2 + 1 = 9901, \qquad 10^{16} - 10^8 + 1 = 9999999900000001$$

są pierwsze oraz

$$143 = 11 \cdot 13, \qquad 10^4 + 1 = 73 \cdot 137,$$
$$111 = 3 \cdot 37, \qquad 10^8 + 1 = 17 \cdot 5882353.$$

Ostatecznie otrzymujemy

$$\underbrace{55\ldots5}_{48} = 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 37 \cdot 73 \cdot 101 \cdot 137 \cdot 9901 \cdot 5882353 \cdot 99990001 \cdot 9999999900000001.$$

3. Udowodnij, że liczba $\underbrace{55\ldots5}_{40}\underbrace{77\ldots7}_{40}$ jest złożona.

Rozwiązanie. Suma cyfr liczby $\underbrace{55\ldots5}_{40}\underbrace{77\ldots7}_{40}$ jest równa $40 \cdot 5 + 40 \cdot 7 = 480$. Z cechy podzielności przez 3 wynika, że ta liczba jest podzielna przez 3. Jako ćwiczenie pozostawię sprawdzenie, że

$$\underbrace{55\ldots5}_{40}\underbrace{77\ldots7}_{40} = 3 \cdot \underbrace{11\ldots1}_{40} \cdot \Big(5 \cdot \underbrace{33\ldots3}_{40} + 4\Big).$$

4. Rozstrzygnij, czy liczba $\underbrace{11\ldots1}_{14}\underbrace{22\ldots2}_{7}\underbrace{11\ldots1}_{14} + 6$ jest pierwsza.

Rozwiązanie. Suma cyfr liczby $\underbrace{11\ldots1}_{14}\underbrace{22\ldots2}_{7}\underbrace{11\ldots1}_{14}$ jest równa

$$14 \cdot 1 + 7 \cdot 2 + 14 \cdot 1 = 42,$$

a więc ta liczba dzieli się przez 3 i po dodaniu 6 też będzie podzielna przez 3. Można również sprawdzić, że

$$\underbrace{11\ldots1}_{14}\underbrace{22\ldots2}_{7}\underbrace{11\ldots1}_{14} = \underbrace{11\ldots1}_{7} \cdot (10^{14} + 10^7 + 1) \cdot (10^7 + 1),$$

a następnie że liczba $10^{14} + 10^7 + 1$ jest podzielna przez 3. Otóż

$$10^{14} + 10^7 + 1 = (10^7 - 1)^2 + 3 \cdot 10^7 = 81 \cdot \Big(\underbrace{11\ldots1}_{7}\Big)^2 + 3 \cdot 10^7.$$

5. Udowodnij, że liczba $\underbrace{55\ldots5}_{40}\underbrace{11\ldots1}_{40}$ nie jest kwadratem liczby naturalnej.

Rozwiązanie. Oznaczmy

$$n = \underbrace{55\ldots5}_{40}\underbrace{11\ldots1}_{40}.$$

Suma cyfr liczby n jest równa 240. Z cechy podzielności przez 3 wynika, że ta liczba jest podzielna przez 3. Przypuśćmy, że $n = m^2$, gdzie m jest liczbą całkowitą. Wówczas liczba m^2 jest podzielna przez 3, skąd wynika, że liczba m jest podzielna przez 3 (korzystamy tu z tego, że 3 jest liczbą pierwszą). Niech więc $m = 3k$. Wtedy $n = m^2 = (3k)^2 = 9k^2$. Stąd wynika, że liczba n jest podzielna przez 9. Z cechy podzielności przez 9 wynika, że to jest jednak nieprawdą, bo liczba 240 nie dzieli się przez 9.

6. Udowodnij, że liczba $7\underbrace{55\ldots5}_{100}99$ jest podzielna przez 17.

Rozwiązanie. Zauważmy, że:

$$
\begin{aligned}
7\underbrace{55\ldots5}_{100}99 &= 7\cdot10^{102} + \frac{5}{9}\cdot 100\cdot(10^{100}-1) + 99 = \\
&= \frac{63\cdot10^{102} + 500\cdot(10^{100}-1) + 9\cdot99}{9} = \frac{63\cdot10^{102} + 5\cdot10^{102} - 500 + 891}{9} = \\
&= \frac{68\cdot10^{102} + 391}{9} = \frac{17\cdot(4\cdot10^{102}+23)}{9} = 17\cdot\frac{4\cdot10^{102} - 4 + 27}{9} = \\
&= 17\cdot\frac{4\cdot(10^{102}-1)+27}{9} = 17\cdot\left(4\cdot\frac{10^{102}-1}{9} + 3\right) = 17\cdot\Big(4\cdot\underbrace{11\ldots1}_{102}+3\Big) = \\
&= 17\cdot\Big(\underbrace{44\ldots4}_{102}+3\Big) = 17\cdot\underbrace{44\ldots4}_{101}7.
\end{aligned}
$$

Uwaga. Równość

$$7\underbrace{55\ldots5}_{100}99 = 17\cdot\underbrace{44\ldots4}_{101}7$$

można otrzymać za pomocą algorytmu dzielenia pisemnego.

$$
\begin{array}{l}
\quad 4\,4\,4\,\cdots\,4\,4\,4\,7\\
\hline
7\,5\,5\,5\,\cdots\,5\,5\,9\,9 : 1\,7\\
6\,8\\
\hline
\quad 7\,5\\
\quad 6\,8\\
\hline
\qquad 7\,5\\
\qquad 6\,8\\
\hline
\qquad\quad 7\\
\qquad\qquad \ldots\\
\qquad\qquad\quad 7\,5\\
\qquad\qquad\quad 6\,8\\
\hline
\qquad\qquad\qquad 7\,5\\
\qquad\qquad\qquad 6\,8\\
\hline
\qquad\qquad\qquad\quad 7\,9\\
\qquad\qquad\qquad\quad 6\,8\\
\hline
\qquad\qquad\qquad\quad 1\,1\,9\\
\qquad\qquad\qquad\quad 1\,1\,9\\
\hline
\end{array}
$$

Zauważamy, że ten sam fragment dzielenia powtarza się wielokrotnie i dopiero ostatnie działanie różni się od poprzednich. Nad każdą piątką w dzielnej znajduje się czwórka ilorazu. Ponadto w ilorazie występuje jedna dodatkowa czwórka, stojąca nad pierwszą dziewiątką. Zatem liczba czwórek jest o jeden większa od liczby piątek, czyli jest równa 101. Zatem wynikiem dzielenia jest liczba $\underbrace{44\ldots4}_{101}7$.

7. Udowodnij, że liczba $1\underbrace{00\ldots0}_{99}1\underbrace{00\ldots0}_{99}1$ nie jest kwadratem liczby naturalnej.

Rozwiązanie. Zadanie to można rozwiązać tak samo jak zadanie 6. Niech

$$n = 1\underbrace{00\ldots0}_{99}1\underbrace{00\ldots0}_{99}1.$$

Suma cyfr liczby n jest podzielna przez 3 i nie jest podzielna przez 9, więc liczba n jest podzielna przez 3 i nie jest podzielna przez 9. Tak jak w zadaniu 6, wynika stąd, że liczba n nie jest kwadratem liczby całkowitej.

Inny sposób rozwiązania polega na zauważeniu dwóch nierówności:

$$n = 10^{200} + 10^{100} + 1 > 10^{200} = \left(10^{100}\right)^2$$

oraz

$$n = 10^{200} + 10^{100} + 1 < 10^{200} + 2\cdot 10^{100} + 1 = (10^{100}+1)^2.$$

Zatem

$$\left(10^{100}\right)^2 < n < (10^{100}+1)^2.$$

Liczba n leży między dwoma kolejnymi kwadratami liczb całkowitych, więc nie jest kwadratem liczby całkowitej.

8. Udowodnij, że liczba $1\underbrace{00\ldots0}_{99}3\underbrace{00\ldots0}_{99}1$ nie jest kwadratem liczby naturalnej.

Rozwiązanie. Zadanie rozwiązujemy drugim sposobem rozwiązania z poprzedniego zadania. Niech

$$n = 1\underbrace{00\ldots0}_{99}3\underbrace{00\ldots0}_{99}1 = 10^{200} + 3\cdot 10^{100} + 1.$$

Wówczas

$$10^{200} + 2\cdot 10^{100} + 1 < n < 10^{200} + 4\cdot 10^{100} + 4,$$

czyli

$$(10^{100}+1)^2 < n < (10^{100}+2)^2.$$

Liczba n leży między kwadratami dwóch kolejnych liczb całkowitych, a więc nie jest kwadratem liczby całkowitej.

Uwaga. Rozwiązanie zadania można uzyskać za pomocą wspomnianej we wstępie uogólnionej cechy podzielności przez 3. Przypomnijmy ją: niech $S(n)$ oznacza sumę cyfr liczby n. Wówczas reszta z dzielenia liczby n przez 3 jest równa reszcie z dzielenia liczby $S(n)$ przez 3.

Stąd wynika, że reszta z dzielenia liczby $1\underbrace{00\ldots0}_{99}3\underbrace{00\ldots0}_{99}1$ przez 3 jest równa 2. Z drugiej strony można pokazać, że reszta z dzielenia kwadratu liczby całkowitej przez 3 nie może być równa 2. Rozpatrujemy trzy przypadki:

1) $(3k)^2 = 9k^2 = 3 \cdot 3k^2$,
2) $(3k+1)^2 = 9k^2 + 6k + 1 = 3 \cdot (3k^2 + 2k) + 1$,
3) $(3k+2)^2 = 9k^2 + 12k + 4 = 3 \cdot (3k^2 + 4k + 1) + 1$.

Zatem rzeczywiście kwadrat liczby całkowitej przy dzieleniu przez 3 może dać tylko resztę 0 lub 1. To pokazuje, że rzeczywiście liczba $1\underbrace{00\ldots0}_{99}3\underbrace{00\ldots0}_{99}1$ nie jest kwadratem liczby całkowitej.

9. Udowodnij, że liczby postaci $\underbrace{11\ldots1}_{n}2\underbrace{11\ldots1}_{n}$ dla $n = 1, 2, 3, \ldots$ są złożone.

Rozwiązanie. Zauważmy, że:

$$\underbrace{11\ldots1}_{n}2\underbrace{11\ldots1}_{n} = \underbrace{11\ldots1}_{n+1}\underbrace{00\ldots0}_{n} + \underbrace{11\ldots1}_{n+1} = \underbrace{11\ldots1}_{n+1} \cdot 1\underbrace{00\ldots0}_{n-1}1.$$

Możemy również wykazać tę równość w następujący sposób:

$$\begin{aligned}\underbrace{11\ldots1}_{n}2\underbrace{11\ldots1}_{n} &= \frac{10^n - 1}{9} \cdot 10^{n+1} + 2 \cdot 10^n + \frac{10^n - 1}{9} = \\ &= \frac{1}{9} \cdot (10^{2n+1} - 10^{n+1} + 18 \cdot 10^n + 10^n - 1) = \\ &= \frac{1}{9} \cdot (10^{2n+1} + 9 \cdot 10^n - 1) = \frac{1}{9} \cdot (10^{2n+1} + 10 \cdot 10^n - 10^n - 1) = \\ &= \frac{1}{9} \cdot \big(10^{n+1}(10^n + 1) - (10^n + 1)\big) = \frac{1}{9} \cdot (10^{n+1} - 1) \cdot (10^n + 1) = \\ &= \underbrace{11\ldots1}_{n+1} \cdot 1\underbrace{00\ldots0}_{n-1}1.\end{aligned}$$

10. Udowodnij, że liczba $4\underbrace{00\ldots0}_{99}3\underbrace{00\ldots0}_{99}1$ jest złożona.

Rozwiązanie. Zauważmy, że

$$\begin{aligned}4\underbrace{00\ldots0}_{99}3\underbrace{00\ldots0}_{99}1 &= 4 \cdot 10^{200} + 3 \cdot 10^{100} + 1 = 4 \cdot 10^{200} + 4 \cdot 10^{100} + 1 - 10^{100} = \\ &= (2 \cdot 10^{100} + 1)^2 - \left(10^{50}\right)^2 = (2 \cdot 10^{100} - 10^{50} + 1)(2 \cdot 10^{100} + 10^{50} + 1).\end{aligned}$$

Ponieważ $1 < 2 \cdot 10^{100} - 10^{50} + 1 < 2 \cdot 10^{100} + 10^{50} + 1$, więc oba znalezione dzielniki liczby $4\underbrace{00\ldots0}_{99}3\underbrace{00\ldots0}_{99}1$ są właściwe; ta liczba jest więc złożona.

11. Udowodnij, że

$$\Big(\underbrace{66\ldots6}_{100}\Big)^2 < \underbrace{44\ldots4}_{200} < \Big(\underbrace{66\ldots6}_{99}7\Big)^2.$$

Rozwiązanie. Zauważmy najpierw, że:

$$\underbrace{44\ldots4}_{200} = \frac{4}{9} \cdot (10^{200} - 1),$$

$$\underbrace{66\ldots6}_{99}7 = \underbrace{66\ldots6}_{100} + 1 = \frac{6}{9} \cdot (10^{100} - 1) + 1 = \frac{2}{3} \cdot (10^{100} - 1) + 1.$$

Nierówność

$$\Big(\underbrace{66\ldots6}_{100}\Big)^2 < \underbrace{44\ldots4}_{200}$$

jest zatem równoważna nierówności

$$\frac{4}{9}\cdot(10^{100}-1)^2 < \frac{4}{9}\cdot(10^{200}-1).$$

Przekształcamy tę nierówność w sposób równoważny:

$$\begin{gathered}(10^{100}-1)^2 < 10^{200}-1,\\ 10^{200}-2\cdot10^{100}+1 < 10^{200}-1,\\ 2 < 2\cdot10^{100}.\end{gathered}$$

Ostatnia nierówność jest prawdziwa, co dowodzi prawdziwości lewej nierówności.
Nierówność

$$\underbrace{44\ldots4}_{200} < \Big(\underbrace{66\ldots6}_{99}7\Big)^2$$

jest równoważna nierówności

$$\frac{4}{9}\cdot(10^{200}-1) < \left(\frac{2}{3}\cdot(10^{100}-1)+1\right)^2.$$

Przekształcamy tę nierówność w sposób równoważny:

$$\begin{gathered}\frac{4}{9}\cdot(10^{200}-1) < \frac{4}{9}\cdot(10^{100}-1)^2+\frac{4}{3}\cdot(10^{100}-1)+1,\\ \frac{4}{9}\cdot10^{200}-\frac{4}{9} < \frac{4}{9}\cdot10^{200}-\frac{8}{9}\cdot10^{100}+\frac{4}{9}+\frac{4}{3}\cdot10^{100}-\frac{4}{3}+1,\\ 0 < \frac{4}{9}\cdot10^{100}+\frac{5}{9}.\end{gathered}$$

Ostatnia nierówność jest prawdziwa, co dowodzi prawdziwości prawej nierówności.

12. Udowodnij, że liczba $32\underbrace{00\ldots0}_{7}201$ jest złożona.

Rozwiązanie. Zauważmy, że

$$32\underbrace{00\ldots0}_{7}201 = 320000000201 = 32\cdot10^{10}+200+1 = 2^5\cdot100^5+200+1 = 200^5+200+1.$$

Następnie możemy łatwo sprawdzić, że dla dowolnej liczby x:

$$x^5+x+1 = (x^2+x+1)(x^3-x^2+1).$$

Zatem $200^5+200+1 = (200^2+200+1)(200^3-200^2+1) = 40201\cdot7960001$.
Ale w jaki sposób możemy odgadnąć równość

$$x^5+x+1 = (x^2+x+1)(x^3-x^2+1)?$$

Jeden z możliwych sposobów polega na wykorzystaniu wzorów skróconego mnożenia:

$$\begin{aligned} x^5+x+1 &= x^5-x^2+x^2+x+1 = x^2(x^3-1)+x^2+x+1 = \\ &= x^2(x-1)(x^2+x+1)+(x^2+x+1) = (x^2+x+1)\cdot\big(x^2(x-1)+1\big) = \\ &= (x^2+x+1)\cdot(x^3-x^2+1). \end{aligned}$$

Inny sposób omówimy w uwadze 2.

Uwaga 1. Rachunek komputerowy pokazuje, że

$$40201 = 7\cdot 5743 \quad \text{oraz} \quad 7960001 = 7^3\cdot 23\cdot 1009.$$

Zatem

$$320000000201 = 7^4\cdot 23\cdot 1009\cdot 5743.$$

Uwaga 2. Równość

$$x^5+x+1 = (x^2+x+1)(x^3-x^2+1)$$

można otrzymać w następujący sposób. Próbujemy przedstawić wielomian (sumę algebraiczną) x^5+x+1 w postaci iloczynu innych sum algebraicznych (wielomianów niższego stopnia). Pokażę, w jaki sposób możemy znaleźć taki rozkład na iloczyn wyrażeń stopnia drugiego i trzeciego. Oczywiście możemy również spróbować przedstawić to wyrażenie w postaci iloczynu wyrażeń pierwszego i czwartego stopnia. Pozostawię to jako ćwiczenie; okaże się, że taki rozkład na wielomiany o współczynnikach całkowitych nie istnieje. Zajmijmy się teraz rozkładem na iloczyn wielomianów drugiego i trzeciego stopnia. Przypuśćmy zatem, że:

$$x^5+x+1 = (x^2+ax+b)(x^3+cx^2+dx+e).$$

Po otwarciu nawiasów i porównaniu współczynników wielomianów po obu stronach równości, otrzymujemy następujący układ równań:

$$\begin{cases} a+c=0 \\ b+ac+d=0 \\ bc+ad+e=0 \\ ae+bd=1 \\ be=1 \end{cases}$$

Znajdziemy rozwiązanie tego układu równań w liczbach całkowitych. Najpierw z pierwszego równania wyznaczamy $c=-a$ i podstawiamy do pozostałych równań:

$$\begin{cases} c=-a \\ b-a^2+d=0 \\ -ab+ad+e=0 \\ ae+bd=1 \\ be=1 \end{cases}$$

Teraz z ostatniego równania otrzymujemy

$$b = e = 1 \quad \text{lub} \quad b = e = -1.$$

Rozpatrujemy dwa przypadki.

Przypadek 1. $b = e = 1$. Podstawiamy te wartości do układu równań:

$$\begin{cases} b = 1 \\ c = -a \\ e = 1 \\ 1 - a^2 + d = 0 \\ -a + ad + 1 = 0 \\ a + d = 1 \end{cases}$$

Z ostatniego równania wyznaczamy $d = 1 - a$ i podstawiamy do pozostałych równań:

$$\begin{cases} b = 1 \\ c = -a \\ d = 1 - a \\ e = 1 \\ 1 - a^2 + 1 - a = 0 \\ -a + a(1 - a) + 1 = 0 \end{cases}$$

czyli po uproszczeniu

$$\begin{cases} b = 1 \\ c = -a \\ d = 1 - a \\ e = 1 \\ a^2 + a - 2 = 0 \\ a^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

Ostatnie dwa równania mają jedno wspólne rozwiązanie: $a = 1$. Wtedy otrzymujemy

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \\ c = -1 \\ d = 0 \\ e = 1 \end{cases}$$

co daje szukany rozkład na czynniki.

Przypadek 2. $b = e = -1$. Podstawiamy te wartości do układu równań:

$$\begin{cases} b = -1 \\ c = -a \\ e = -1 \\ -1 - a^2 + d = 0 \\ a + ad - 1 = 0 \\ -a - d = 1 \end{cases}$$

Z ostatniego równania wyznaczamy $d = -a - 1$ i po podstawieniu do pozostałych równań układu otrzymujemy dwa równania sprzeczne: $a^2 + a + 2 = 0$ oraz $a^2 + 1 = 0$. Zatem rozkład na czynniki otrzymany w pierwszym przypadku jest jedynym takim rozkładem.

13. Udowodnij, że liczba 312500051 jest złożona.

Rozwiązanie. Zauważmy, że $3125 = 5^5$. Zatem

$$312500051 = 312500000 + 50 + 1 = 50^5 + 50 + 1.$$

Oznaczmy $x = 50$. Mamy teraz tak, jak w poprzednim zadaniu

$$x^5 + x + 1 = (x^2 + x + 1)(x^3 - x^2 + 1).$$

Zatem

$$312500051 = (50^2 + 50 + 1)(50^3 - 50^2 + 1) = 2551 \cdot 122501.$$

Można sprawdzić, że oba czynniki są liczbami pierwszymi.

14. Udowodnij, że liczba 1280000401 jest złożona.

Rozwiązanie. Zauważmy, że $1280000401 = 20^7 + 20^2 + 1$. Rozłóżmy zatem wyrażenie $x^7 + x^2 + 1$ na czynniki:

$$\begin{aligned}
x^7 + x^2 + 1 &= x^7 + x^2 + 1 + (x^4 + x) - (x^4 + x) = x^7 - x - x^4 + x + x^4 + x^2 + 1 = \\
&= x(x^6 - 1) - x(x^3 - 1) + (x^2 + 1)^2 - x^2 = \\
&= x(x^3 - 1)(x^3 + 1) - x(x^3 - 1) + (x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1) = \\
&= (x^3 - 1) \cdot \big(x(x^3 + 1) - x\big) + (x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1) = \\
&= (x - 1)(x^2 + x + 1) \cdot x^4 + (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1) = \\
&= (x^2 + x + 1) \cdot \big(x^4(x - 1) + (x^2 - x + 1)\big) = \\
&= (x^2 + x + 1) \cdot (x^5 - x^4 + x^2 - x + 1).
\end{aligned}$$

Po podstawieniu $x = 200$ otrzymamy rozkład na czynniki:

$$1280000401 = 421 \cdot 3040381.$$

Oba czynniki są liczbami pierwszymi. Oczywiście możemy także ułożyć i rozwiązać w liczbach całkowitych odpowiedni układ równań. Próbujemy przedstawić wyrażenie x^7+x^2+1 w postaci iloczynu dwóch wielomianów niższego stopnia. Mamy trzy możliwości: iloczyn wielomianów pierwszego i szóstego stopnia, iloczyn wielomianów drugiego i piątego stopnia i iloczyn wielomianów trzeciego i czwartego stopnia. W pierwszym i trzecim przypadku próby zakończą się niepowodzeniem: odpowiedni układ równań nie będzie miał rozwiązania w liczbach całkowitych. W drugim przypadku mamy równość

$$x^7 + x^2 + 1 = (x^2 + ax + b)(x^5 + cx^4 + dx^3 + ex^2 + fx + g).$$

Odpowiedni układ równań ma postać

$$\begin{cases}
a + c = 0 \\
b + ac + d = 0 \\
bc + ad + e = 0 \\
bd + ae + f = 0 \\
be + af + g = 1 \\
bf + ag = 0 \\
bg = 1
\end{cases}$$

Z pierwszego równania otrzymujemy $c = -a$. Ostatnie równanie daje dwie możliwości: $b = g = 1$ lub $b = g = -1$. Pierwsza z nich prowadzi do sukcesu. Przypuśćmy zatem, że $b = g = 1$. Z przedostatniego równania dostajemy wtedy $f = -a$, a z poprzedniego dostajemy $e = a^2$. Wreszcie z drugiego równania dostajemy $d = a^2 - 1$. Po podstawieniu tych wartości do trzeciego i czwartego równania dostajemy dwa równania z niewiadomą a:

$$\begin{cases} -a + a(a^2 - 1) + a^2 = 0 \\ a^2 - 1 + a^3 - a = 0 \end{cases}$$

Drugie równanie możemy łatwo przekształcić:

$$\begin{gathered} a^2 - 1 + a(a^2 - 1) = 0, \\ (a^2 - 1)(a + 1) = 0, \\ (a - 1)(a + 1)^2 = 0. \end{gathered}$$

To równanie ma dwa rozwiązania: $a = 1$ oraz $a = -1$. Tylko $a = 1$ spełnia pierwsze równanie. Mamy zatem rozwiązanie:

$$a = b = e = g = 1, \quad c = f = -1, \quad d = 0.$$

Sprawdzenie, że w pozostałych przypadkach nie otrzymamy rozwiązania, zostawię jako ćwiczenie.

15. Udowodnij, że liczba $1\underbrace{00\ldots0}_{2013}1$ jest złożona.

Rozwiązanie. Zauważmy, że

$$1\underbrace{00\ldots0}_{2013}1 = 10^{2014} + 1 = 100^{1007} + 1 = 101 \cdot (100^{980} - 100^{979} + \ldots - 100 + 1).$$

Zestaw 2.
Różne rodzaje liczb

Ten zestaw zadań jest w zasadzie zestawem ćwiczeń na wzory skróconego mnożenia i rozkładanie wyrażeń na czynniki za pomocą tych wzorów. Poznajemy tzw. tożsamość Sophie Germain. Jest to tożsamość pozwalająca rozłożyć na czynniki wyrażenie a^4+4b^4. Mianowicie:

$$a^4+4b^4 = a^4+4a^2b^2+4b^4-4a^2b^2 = (a^2+2b^2)^2-(2ab)^2 = (a^2-2ab+2b^2)(a^2+2ab+2b^2).$$

Uczniowie wiedzą, że wyrażenie postaci a^2+b^2 nie rozkłada się na iloczyn czynników pierwszego stopnia. Stąd wnioskują, że podobne wyrażenie a^4+b^4 też nie rozkłada się na iloczyn wyrażeń niższego stopnia. To okazuje się nieprawdą, o ile wolno będzie używać współczynników niewymiernych. Mamy mianowicie

$$\begin{aligned} a^4+b^4 &= a^4+2a^2b^2+b^4-2a^2b^2 = (a^2+b^2)^2-(ab\sqrt{2})^2 = \\ &= (a^2-\sqrt{2}\cdot ab+b^2)\cdot(a^2+\sqrt{2}\cdot ab+b^2). \end{aligned}$$

Ta równość, podobnie jak tożsamość Sophie Germain, jest na ogół zaskoczeniem dla uczniów.

Interesującym zagadnieniem jest badanie pierwszości liczb szczególnie prostej postaci, na przykład liczb a^n+1 i a^n-1. Kilka informacji na temat takich liczb zamieszczam po zadaniach 15 i 16. Ten zestaw zadań zawiera w zasadzie zadania polegające na wykazaniu, że jakaś liczba jest złożona i znalezieniu jej czynników. Warto więc zakończyć ten wstęp cytatem z Gaussa (z 1801 roku):

> Zagadnienie odróżniania liczb pierwszych od złożonych i rozkładanie tych ostatnich na ich czynniki pierwsze uchodzi za najważniejsze i o dużym praktycznym znaczeniu w arytmetyce... Sama powaga nauki zdaje się wymagać, aby dołożyć wszelkich możliwych starań do rozwiązania tak eleganckiego i tak słynnego zagadnienia.

(Cytowane za: Paulo Ribenboim, *Mała księga wielkich liczb pierwszych*, tłum. J. Browkin, WNT, Warszawa 1997, str. 31.).

1. Znajdź wszystkie liczby pierwsze p takie, że liczba $p+400$ jest kwadratem liczby całkowitej.

Rozwiązanie. Niech $p+400=n^2$. Wtedy $p=n^2-400=n^2-20^2=(n-20)(n+20)$. Ponieważ p jest liczbą pierwszą oraz $n-20<n+20$, więc $n-20=1$ i $n+20=p$. Zatem $n=21$, a więc $p=21+20=41$. Rzeczywiście 41 jest liczbą pierwszą oraz $41+400=441=21^2$.

Uwaga. Sprawdzenie, że otrzymana liczba $p=41$ jest pierwsza, jest konieczne. Gdyby bowiem zamiast 400 w treści zadania było np. 100, to mielibyśmy $p+100=n^2$, czyli

$$p=n^2-100=(n-10)(n+10).$$

Zatem $n-10=1$ i $n+10=p$, skąd wynika, że $p=21$. Ponieważ 21 nie jest liczbą pierwszą, więc tak zmodyfikowane zadanie nie ma rozwiązania. Natomiast sprawdzenie, że dla znalezionej wartości p liczba $p+400$ rzeczywiście jest kwadratem, nie jest konieczne. Jeśli bowiem dla liczb n i a mamy $n-a=1$ oraz $n+a=p$, to

$$p=1\cdot p=(n-a)(n+a)=n^2-a^2$$

i wówczas liczba $p+a^2$ jest kwadratem: $p+a^2=n^2$.

2. Udowodnij, że liczba $4^6 + 4 \cdot 6^5 + 9^5$ jest złożona.

Rozwiązanie. Wykażemy, że rozważana liczba jest kwadratem liczby naturalnej (nawet pierwszej). Zauważmy, że

$$4^6 + 4 \cdot 6^5 + 9^5 = (2^6)^2 + 2 \cdot 2^6 \cdot 3^5 + (3^5)^2 = (2^6 + 3^5)^2 = 307^2.$$

Można sprawdzić, że liczba 307 jest pierwsza.

3. Udowodnij, że liczba $2^{18} + 32 \cdot 10^5 + 5^{10}$ jest złożona.

Rozwiązanie. Ta liczba także jest kwadratem liczby pierwszej. Zauważmy, że

$$2^{18} + 32 \cdot 10^5 + 5^{10} = (2^9)^2 + 2 \cdot 2^9 \cdot 5^5 + (5^5)^2 = (2^9 + 5^5)^2 = 3637^2.$$

Można sprawdzić, że liczba 3637 jest pierwsza.

4. Wyznacz wszystkie liczby naturalne $n \geq 1$, dla których liczba $n^4 + 4$ jest pierwsza.

Rozwiązanie. Zauważmy, że

$$n^4 + 4 = n^4 + 4n^2 + 4 - 4n^2 = (n^2 + 2)^2 - (2n)^2 = (n^2 - 2n + 2)(n^2 + 2n + 2).$$

Oczywiście $n^2 - 2n + 2 < n^2 + 2n + 2$. Stąd wynika, że jeśli liczba $n^4 + 4$ jest pierwsza, to $n^2 - 2n + 2 = 1$, czyli $n^2 - 2n + 1 = 0$. Zatem $(n - 1)^2 = 0$, czyli $n = 1$. Rzeczywiście, dla $n = 1$ mamy $n^4 + 4 = 5$, więc $n^4 + 4$ jest liczbą pierwszą. Dla $n > 1$ liczba $n^4 + 4$ jest iloczynem dwóch liczb naturalnych, większych od 1, a więc jest złożona.

Uwaga. Równość

$$n^4 + 4 = (n^2 - 2n + 2)(n^2 + 2n + 2)$$

jest szczególnym przypadkiem tożsamości Sophie Germain. Wyrażenie $a^2 + b^2$, jak wiemy, nie rozkłada się na czynniki w podobny sposób, ale mamy równość:

$$a^2 + b^2 = a^2 + 2ab + b^2 - 2ab = (a + b)^2 - 2ab.$$

W przypadku, gdy liczba $2ab$ jest kwadratem, otrzymamy rozkład na dwa czynniki. Mamy także równości

$$a^2 + ab + b^2 = (a + b)^2 - ab,$$
$$a^2 - ab + b^2 = (a + b)^2 - 3ab.$$

Jeśli ab (w pierwszym przypadku) lub $3ab$ (w drugim przypadku) są kwadratami, to znów otrzymamy rozkład na czynniki. Wiele innych liczb podobnych postaci można rozłożyć na czynniki w taki sposób. W kilku następnych zadaniach wykorzystamy tożsamość Sophie Germain i kilka podobnych tożsamości.

5. Udowodnij, że liczba $2^{2002} + 5^{2000}$ jest złożona.

Rozwiązanie. Skorzystajmy z tożsamości Sophie Germain dla $a = 5^{500}$ i $b = 2^{500}$. Zauważmy, że

$$2^{2002} + 5^{2000} = 5^{2000} + 4 \cdot 2^{2000} = (5^{500})^4 + 4 \cdot (2^{500})^4 =$$
$$= (5^{1000} - 5^{500} \cdot 2^{501} + 2^{1001}) \cdot (5^{1000} + 5^{500} \cdot 2^{501} + 2^{1001}).$$

Sprawdzenie, że oba czynniki są większe od 1, jest nietrudnym ćwiczeniem.

6. Udowodnij, że liczba $4^{15} + 15^4$ jest złożona.

Rozwiązanie. Jeszcze raz skorzystamy z tożsamości Sophie Germain; tym razem dla $a = 15$ i $b = 2^7$. Zauważmy, że

$$4^{15} + 15^4 = 15^4 + 4 \cdot 4^{14} = 15^4 + 4 \cdot 2^{28} = 15^4 + 4 \cdot (2^7)^4 = \\ = (15^2 - 15 \cdot 2^8 + 2^{15}) \cdot (15^2 + 15 \cdot 2^8 + 2^{15}) = 29153 \cdot 36833.$$

Można sprawdzić, że oba czynniki są liczbami pierwszymi.

7. Wykaż, że liczba $2^{14} + 5^8$ jest złożona.

Rozwiązanie. Korzystamy z tożsamości

$$a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab.$$

Po podstawieniu $a = 2^7$ i $b = 5^4$ otrzymamy:

$$2^{14} + 5^8 = (2^7)^2 + (5^4)^2 = (2^7 + 5^4)^2 - 2 \cdot 2^7 \cdot 5^4 = (2^7 + 5^4)^2 - (2^4 \cdot 5^2)^2 = \\ = (2^7 - 2^4 \cdot 5^2 + 5^4) \cdot (2^7 + 2^4 \cdot 5^2 + 5^4) = 353 \cdot 1153.$$

Oba czynniki są liczbami pierwszymi.

8. Wykaż, że liczba $2^{20} + 4 \cdot 6^8 + 9^8$ jest złożona.

Rozwiązanie. Skorzystamy z tożsamości

$$a^2 + ab + b^2 = (a + b)^2 - ab.$$

Po podstawieniu $a = 2^{10}$ i $b = 3^8$ otrzymamy

$$2^{20} + 4 \cdot 6^8 + 9^8 = (2^{10})^2 + 2^{10} \cdot 3^8 + (3^8)^2 = (2^{10} + 3^8)^2 - 2^{10} \cdot 3^8 = \\ = (2^{10} + 3^8)^2 - (2^5 \cdot 3^4)^2 = (2^{10} - 2^5 \cdot 3^4 + 3^8) \cdot (2^{10} + 2^5 \cdot 3^4 + 3^8) = 4993 \cdot 10177.$$

Oba znalezione czynniki są liczbami pierwszymi.

9. Wykaż, że liczba $2^{16} - 2 \cdot 6^7 + 3^{14}$ jest złożona.

Rozwiązanie. Podstawimy $a = 2^8$ i $b = 3^7$ w tożsamości $a^2 - ab + b^2 = (a + b)^2 - 3ab$. Otrzymamy:

$$2^{16} - 2 \cdot 6^7 + 3^{14} = (2^8)^2 - 2 \cdot 2^7 \cdot 3^7 + (3^7)^2 = (2^8)^2 - 2^8 \cdot 3^7 + (3^7)^2 = \\ = (2^8 + 3^7)2 - 3 \cdot 2^8 \cdot 3^7 = (2^8 + 3^7)2 - (2^4 \cdot 3^4)^2 = (2^8 - 6^4 + 3^7) \cdot (2^8 + 6^4 + 3^7) = 1147 \cdot 3739.$$

Drugi czynnik jest liczbą pierwszą; pierwszy jest liczbą złożoną: $1147 = 31 \cdot 37$.

10. Wykaż, że liczba $111^4 + 111^2 + 1$ jest złożona.

Rozwiązanie. Podstawmy $x = 111$ w tożsamości

$$x^4 + x^2 + 1 = (x^2 + 1)^2 - x^2 = (x^2 - x + 1) \cdot (x^2 + x + 1).$$

Otrzymamy

$$111^4 + 111^2 + 1 = 12211 \cdot 12433.$$

Oba znalezione czynniki są liczbami pierwszymi.

11. Wykaż, że liczba $9 \cdot 15^4 + 5 \cdot 15^2 + 1$ jest złożona.

Rozwiązanie. Tym razem podstawimy $x = 15$ w tożsamości

$$9x^4 + 5x^2 + 1 = (9x^4 + 6x^2 + 1) - x^2 = (3x^2 + 1)^2 - x^2 = (3x^2 - x + 1) \cdot (3x^2 + x + 1).$$

Otrzymamy $9 \cdot 15^4 + 5 \cdot 15^2 + 1 = 661 \cdot 691$. Oba czynniki są liczbami pierwszymi.

12. Wykaż, że liczba $2^{10} \cdot 3^{14} + 2^7 \cdot 3^6 + 1$ jest złożona.

Rozwiązanie. W tym zadaniu skorzystamy z tożsamości

$$9x^2 + 4x + 1 = (3x + 1)^2 - 2x.$$

Podstawiając $x = 2^5 \cdot 3^6$, otrzymamy

$$\begin{aligned} 2^{10} \cdot 3^{14} + 2^7 \cdot 3^6 + 1 &= 9 \cdot (2^5 \cdot 3^6)^2 + 4 \cdot (2^5 \cdot 3^6) + 1 = \\ &= (3 \cdot 2^5 \cdot 3^6 + 1)^2 - 2 \cdot 2^5 \cdot 3^6 = (2^5 \cdot 3^7 + 1)^2 - (2^3 \cdot 3^3)^2 = \\ &= (2^5 \cdot 3^7 - 6^3 + 1) \cdot (2^5 \cdot 3^7 + 6^3 + 1) = 69769 \cdot 70201. \end{aligned}$$

Liczba 70201 jest pierwsza; liczba 69769 jest złożona: $69769 = 7 \cdot 9967$.

13. Wykaż, że liczba $2^{38} + 3 \cdot 2^{18} + 1$ jest złożona.

Rozwiązanie. W tym zadaniu skorzystamy z tożsamości

$$4x^4 + 3x^2 + 1 = (2x^2 + 1)^2 - x^2 = (2x^2 - x + 1) \cdot (2x^2 + x + 1).$$

Podstawiając $x = 2^9$, otrzymamy

$$\begin{aligned} 2^{38} + 3 \cdot 2^{18} + 1 = 4 \cdot (2^{18})^2 + 3 \cdot 2^{18} + 1 = (2 \cdot 2^{18} + 1)^2 - (2^9)^2 = (2^{19} + 1)^2 - (2^9)^2 = \\ = (2^{19} - 2^9 + 1) \cdot (2^{19} + 2^9 + 1) = 523777 \cdot 524801. \end{aligned}$$

Oba znalezione czynniki są liczbami pierwszymi.

14. Udowodnij, że jeśli liczba całkowita a jest większa od 2 oraz $n \geq 2$, to liczba $a^n - 1$ jest złożona.

Rozwiązanie. Liczba $a^n - 1 = (a-1)\big(a^{n-1} + a^{n-2} + \ldots + a + 1\big)$ jest podzielna przez liczbę $a - 1 > 1$.

15. Udowodnij, że jeśli liczba n jest złożona, to liczba $2^n - 1$ też jest złożona.

Rozwiązanie. Jeśli $n = kl$, to

$$2^n - 1 = (2^k)^l - 1 = (2^k - 1)\big((2^k)^{l-1} + (2^k)^{l-2} + \ldots + 2^k + 1\big).$$

Uwaga. Kwestią, czy liczby szczególnej postaci są pierwsze, zajmowano się już w XVII wieku. Powyższe dwa zadania dotyczą liczb postaci $a^n - 1$. Okazuje się, że jeśli $a > 2$, to takie liczby są złożone. Interesujące jest zatem badanie pierwszości liczb postaci $2^n - 1$. Takie liczby mogą być pierwsze tylko dla wykładników n będących liczbami pierwszymi. Popatrzmy na kilka takich początkowych liczb. Niektóre z nich są pierwsze:

$$\begin{aligned} &2^2 - 1 = 3, && 2^{13} - 1 = 8191, \\ &2^3 - 1 = 7, && 2^{17} - 1 = 131071, \\ &2^5 - 1 = 31, && 2^{19} - 1 = 524287. \\ &2^7 - 1 = 127, && \end{aligned}$$

Niektóre są złożone:

$$2^{11} - 1 = 2047 = 23 \cdot 89,$$
$$2^{23} - 1 = 8388607 = 47 \cdot 178481,$$
$$2^{67} - 1 = 147573952589676412927 = 193707721 \cdot 761838257287.$$

Przyjmijmy oznaczenie: $M_p = 2^p - 1$. Marin Mersenne (1588–1648), zakonnik, filozof i matematyk żyjący w Paryżu, stwierdził bez dowodu, że liczby M_p dla

$$p = 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 67, 127, 257$$

są pierwsze oraz że są to jedyne liczby pierwsze postaci M_p dla $p \leq 257$. W ciągu następnych 300 lat stwierdzono, że Mersenne popełnił 5 błędów: liczby M_{67} i M_{257} są złożone oraz liczby M_{61}, M_{89} i M_{107} są pierwsze. Liczby M_p nazywamy liczbami Mersenne'a. Znamy tylko 48 liczb pierwszych Mersenne'a. Są to liczby M_p dla następujących wykładników p:

2	3	5	7	13	17
19	31	61	89	107	127
521	607	1279	2203	2281	3217
4253	4423	9689	9941	11213	19937
21701	23209	44497	86243	110503	132049
216091	756839	859433	1257787	1398269	2976221
3021377	6972593	13466917	20996011	24036583	25964951
30402457	32582657	37156667	42643801	43112609	57885161

Największą znaną liczbę pierwszą Mersenne'a znalazł 25 stycznia 2013 r. Curtis Cooper z University of Central Missouri w ramach tzw. projektu GIMPS (The Great Internet Mersenne Prime Search). Jest to liczba $M_{57885161} = 2^{57885161} - 1$ mająca 17425170 cyfr (ta wiadomość została znaleziona na stronie GIMPS 10 kwietnia 2013 r. o godz. 19^{25}; być może jest już nieaktualna). Ta liczba Mersenne'a jest największą znaną liczbą pierwszą. Wiemy, że istnieje nieskończenie wiele liczb pierwszych, ale nie wiemy, czy istnieje nieskończenie wiele liczb pierwszych Mersenne'a. Nie wiemy też, czy istnieje nieskończenie wiele liczb złożonych Mersenne'a.

Następne zadanie dotyczy tzw. liczb Fermata. Są to liczby pierwsze postaci $2^n + 1$.

16. Udowodnij, że jeśli liczba n ma dzielnik nieparzysty (większy od 1), to liczba $2^n + 1$ jest złożona.

Rozwiązanie. Jeśli $n = kl$ i liczba l jest nieparzysta, to

$$2^n + 1 = (2^k)^l + 1 = (2^k + 1)\big((2^k)^{l-1} - (2^k)^{l-2} + \ldots - 2^k + 1\big).$$

Uwaga. Powyższe zadanie pokazuje, że liczba postaci $2^n + 1$ może być pierwsza tylko wtedy, gdy wykładnik n nie ma dzielnika nieparzystego większego od 1, a więc tylko wtedy, gdy ten wykładnik jest potęgą dwójki. Stąd wynika, że liczby Fermata mają postać

$F_n = 2^{2^n} + 1$. Piotr Fermat (1601–1665), prawnik i matematyk mieszkający w Tuluzie, zbadał 5 początkowych liczb F_n i stwierdził, że są one pierwsze. Oto one:

$$\begin{aligned}
F_0 &= 2^{2^0} + 1 = 2^1 + 1 = 3,\\
F_1 &= 2^{2^1} + 1 = 2^2 + 1 = 5,\\
F_2 &= 2^{2^2} + 1 = 2^4 + 1 = 17,\\
F_3 &= 2^{2^3} + 1 = 2^8 + 1 = 257,\\
F_4 &= 2^{2^4} + 1 = 2^{16} + 1 = 65537.
\end{aligned}$$

Postawił wówczas hipotezę, że wszystkie takie liczby są pierwsze. Ta hipoteza okazała się nieprawdziwa. Euler około 100 lat później wykazał, że liczba F_5 jest złożona. A oto dzielniki kilku następnych liczb Fermata:

$$\begin{aligned}
F_5 &= 2^{2^5} + 1 = 2^{32} + 1 = 4294967297 = 641 \cdot 6700417,\\
F_6 &= 2^{2^6} + 1 = 2^{64} + 1 = 18446744073709551617 = 274177 \cdot 67280421310721,\\
F_7 &= 2^{2^7} + 1 = 2^{128} + 1 = 59649589127497217 \cdot 5704689200685129054721.
\end{aligned}$$

Można zadać pytanie o to, jak zostały znalezione te dzielniki. Czy Euler po prostu miał więcej cierpliwości od Fermata? Okazuje się, że Euler udowodnił twierdzenie pokazujące, jaką postać muszą mieć dzielniki liczb Fermata (o ile takie dzielniki istnieją). Mianowicie, jeśli d jest dzielnikiem liczby F_n, to

$$d = k \cdot 2^{n+2} + 1$$

dla pewnej liczby naturalnej k. W przypadku $n = 5$ wystarczyło zbadać 5 liczb:

$$\begin{aligned}
1 \cdot 2^7 + 1 &= 128 + 1 = 129,\\
2 \cdot 2^7 + 1 &= 2 \cdot 128 + 1 = 257,\\
3 \cdot 2^7 + 1 &= 3 \cdot 128 + 1 = 385,\\
4 \cdot 2^7 + 1 &= 4 \cdot 128 + 1 = 513,\\
5 \cdot 2^7 + 1 &= 5 \cdot 128 + 1 = 641,
\end{aligned}$$

by znaleźć dzielnik 641. Rozkład na czynniki liczby F_6 znaleziono w XIX wieku; rozkład liczby F_7 znaleziono w 1970 roku za pomocą skomplikowanych obliczeń komputerowych. Wszystkie zbadane dotychczas liczby Fermata okazały się złożone i nie wiadomo, czy istnieje liczba pierwsza Fermata dla $n > 4$.

17. Wyznacz wszystkie liczby pierwsze p i q takie, że $p^2 - 2q^2 = 1$.

Rozwiązanie. Ponieważ $p^2 - 1 = 2q^2$, więc liczba p jest nieparzysta. Ale wtedy obie liczby $p-1$ i $p+1$ są parzyste i z równości $(p-1)(p+1) = 2q^2$ wynika, że liczba q^2 jest parzysta, a więc $q = 2$. Wtedy $p = 3$ i oczywiście p i q są liczbami pierwszymi.

18. Udowodnij, że jeśli liczby $2n+1$ i $3n+1$ są kwadratami (przy czym $n > 0$), to liczba $5n+3$ jest złożona.

Rozwiązanie. Niech $2n+1 = a^2$ i $3n+1 = b^2$. Można założyć, że liczby a i b są dodatnie. Wtedy

$$5n+3 = 4(2n+1) - (3n+1) = 4a^2 - b^2 = (2a-b)(2a+b).$$

Oczywiście $2a - b < 2a + b$. Gdyby $2a - b = 1$, to mielibyśmy:

$$\begin{gathered}
2a = b+1,\\
4a^2 = b^2 + 2b + 1,\\
4(2n+1) = 3n+1+2b+1,\\
8n+4-3n-1-1 = 2b,\\
5n+2 = 2b,\\
(5n+2)^2 = 4b^2,\\
25n^2+20n+4 = 4(3n+1),\\
25n^2+20n+4 = 12n+4,\\
25n^2+8n = 0.
\end{gathered}$$

Ta ostatnia równość jest niemożliwa, gdyż $n > 1$.

19. Udowodnij, że liczba $n^5 + n^4 + 1$ jest złożona dla $n > 1$.

Rozwiązanie. Wystarczy sprawdzić, że

$$n^5 + n^4 + 1 = (n^2+n+1)(n^3-n+1)$$

oraz wykazać, że $n^3 - n + 1 > 1$ dla $n > 1$.

20. Udowodnij, że liczba $5^{100} + 5^{75} + 5^{50} + 5^{25} + 1$ jest złożona.

Rozwiązanie. W tym zadaniu skorzystamy z tożsamości

$$x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = (x^2+3x+1)^2 - 5x(x+1)^2.$$

Po podstawieniu $x = 5^{25}$ otrzymamy różnicę kwadratów:

$$5^{100} + 5^{75} + 5^{50} + 5^{25} + 1 = \left(5^{50} + 3\cdot 5^{25} + 1\right)^2 - 5^{26}\left(5^{25}+1\right)^2,$$

czyli

$$5^{100} + 5^{75} + 5^{50} + 5^{25} + 1 = \left(5^{50} + 3\cdot 5^{25} + 1\right)^2 - \left(5^{38}+5^{13}\right)^2.$$

Ostatecznie

$$5^{100} + 5^{75} + 5^{50} + 5^{25} + 1 = (5^{50} - 5^{38} + 3\cdot 5^{25} - 5^{13} + 1)(5^{50} + 5^{38} + 3\cdot 5^{25} + 5^{13} + 1).$$

Sprawdzenie, że oba czynniki są większe od 1, pozostawię jako ćwiczenie. Oczywiście w tym zadaniu znalezienie właściwej tożsamości jest bardzo trudne i nie można spodziewać się, by uczniowie samodzielnie ją znaleźli.

Zestaw 3.
Kongruencje

Rozwiązywanie z uczniami zadań na kongruencje poprzedzam omówieniem na kółku podstawowych własności kongruencji. Uczniowie dostają zestaw wiadomości z teorii liczb oraz kilka zadań przygotowawczych. Są to zadania 1–8. Własności kongruencji, wraz z przykładami, omawiam na kółku; tam też zazwyczaj rozwiązujemy 8 pierwszych zadań. Następnych 14 zadań rozwiązujemy na warsztatach.

1. Udowodnij, że $6 \mid n^3 - n$.

Rozwiązanie. Pokażę najpierw rozwiązania wykorzystujące kongruencje. Pierwsze rozwiązanie składa się z dwóch kroków. W kroku pierwszym wykazujemy, że liczba $n^3 - n$ jest podzielna przez 2. W drugim kroku wykazujemy, że ta liczba jest podzielna przez 3.

- Jeśli $n \equiv 0 \pmod{2}$, to $n^3 - n \equiv 0^3 - 0 = 0 \pmod{2}$,
- Jeśli $n \equiv 1 \pmod{2}$, to $n^3 - n \equiv 1^3 - 1 = 0 \pmod{2}$.

Zatem dla dowolnej liczby n mamy: $2 \mid n^3 - n$.

W podobny sposób, rozpatrując trzy przypadki, sprawdzamy, że liczba $n^3 - n$ jest podzielna przez 3.

- Jeśli $n \equiv 0 \pmod{3}$, to $n^3 - n \equiv 0^3 - 0 = 0 \pmod{3}$,
- Jeśli $n \equiv 1 \pmod{3}$, to $n^3 - n \equiv 1^3 - 1 = 0 \pmod{3}$,
- Jeśli $n \equiv 2 \pmod{3}$, to $n^3 - n \equiv 2^3 - 2 = 6 \equiv 0 \pmod{3}$.

Zatem dla dowolnej liczby n mamy: $3 \mid n^3 - n$. Stąd wynika, że $6 \mid n^3 - n$.

Można też sprawdzić sześć przypadków w zależności od tego, jaką resztę daje n przy dzieleniu przez 6.

Wreszcie popatrzmy na rozwiązanie bez użycia kongruencji. Zauważmy, że

$$n^3 - n = n(n^2 - 1) = n(n-1)(n+1) = (n-1) \cdot n \cdot (n+1).$$

Liczba $n^3 - n$ jest więc iloczynem trzech kolejnych liczb całkowitych. Wśród trzech kolejnych liczb całkowitych znajduje się co najmniej jedna liczba parzysta i dokładnie jedna liczba podzielna przez 3. A więc iloczyn jest podzielny przez 2 i przez 3, czyli przez 6.

2. Udowodnij, że ostatnią cyfrą liczby 7^{256} jest 1.

Rozwiązanie. Możemy skorzystać z kongruencji. Zauważamy, że

$$7^2 = 49 \equiv 9 \pmod{10},$$

skąd wynika, że

$$7^4 = (7^2)^2 \equiv 9^2 = 81 \equiv 1 \pmod{10}.$$

Zatem

$$7^{256} = (7^4)^{64} \equiv 1^{64} = 1 \pmod{10}.$$

Ważnym pomysłem jest wykorzystanie w kongruencjach liczb ujemnych. Zauważmy, że

$$7^2 = 49 \equiv -1 \pmod{10},$$

skąd natychmiast dostajemy

$$7^4 \equiv (-1)^2 = 1 \pmod{10} \qquad \text{lub} \qquad 7^{256} = (7^2)^{128} \equiv (-1)^{128} = 1 \pmod{10}.$$

Zadanie możemy rozwiązać także bez użycia kongruencji. Korzystamy kilkakrotnie ze wzoru skróconego mnożenia $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$. Skorzystamy także z równości

$$7^4 - 1 = (7^2+1)(7^2-1) = 50 \cdot 48 = 2400.$$

Mamy zatem:

$$\begin{aligned}
7^{256} - 1 &= \left((7^{128})^2 - 1^2\right) = (7^{128}+1)(7^{128}-1) = (7^{128}+1)(7^{64}+1)(7^{64}-1) = \\
&= (7^{128}+1)(7^{64}+1)(7^{32}+1)(7^{32}-1) = \\
&= (7^{128}+1)(7^{64}+1)(7^{32}+1)(7^{16}+1)(7^{16}-1) = \\
&= (7^{128}+1)(7^{64}+1)(7^{32}+1)(7^{16}+1)(7^{8}+1)(7^{8}-1) = \\
&= (7^{128}+1)(7^{64}+1)(7^{32}+1)(7^{16}+1)(7^{8}+1)(7^{4}+1)(7^{4}-1) = \\
&= 2400 \cdot (7^{128}+1)(7^{64}+1)(7^{32}+1)(7^{16}+1)(7^{8}+1)(7^{4}+1).
\end{aligned}$$

Zatem liczba $7^{256} - 1$ jest podzielna przez 10, czyli ostatnią cyfrą liczby 7^{256} jest 1.

Inny sposób rozwiązania polega na zauważeniu, że ostatnią cyfrą iloczynu dwóch liczb jest ostatnia cyfra iloczynu ostatnich cyfr obu czynników. Tak więc na przykład ostatnią cyfrą iloczynu

$$4658436587346587342616 \cdot 9485749858498904327$$

jest 2, gdyż $6 \cdot 7 = 42$ i ostatnią cyfrą liczby 42 jest 2. Stąd w szczególności wynika, że ostatnią cyfrę potęgi 7^{256} możemy wyznaczyć, obliczając ostatnie cyfry kolejnych potęg 7^1, 7^2, 7^3 i tak dalej. W tym celu nie musimy obliczać tych potęg; wystarczy za każdym razem obliczyć iloczyn ostatniej cyfry poprzedniej potęgi przez 7 i wziąć ostatnią cyfrę tego iloczynu. W następującej tabeli mamy w trzech kolumnach: potęgę liczby 7, iloczyn ostatniej cyfry poprzedniej potęgi przez 7, ostatnią cyfrę aktualnej potęgi:

7^1		7
7^2	$7 \cdot 7 = 49$	9
7^3	$9 \cdot 7 = 63$	3
7^4	$3 \cdot 7 = 21$	1
7^5	$1 \cdot 7 = 7$	7
7^6	$7 \cdot 7 = 49$	9
7^7	$9 \cdot 7 = 63$	3
7^8	$3 \cdot 7 = 21$	1
7^9	$1 \cdot 7 = 7$	7

Zauważamy, że ostatnie cyfry potęg powtarzają cię cyklicznie; co cztery miejsca jest taka sama ostatnia cyfra. Ponieważ wykładnik 256 jest podzielny przez 4, więc ostatnia cyfra potęgi 7^{256} jest taka sama jak ostatnia cyfra potęgi 7^4, czyli jest równa 1.

To rozumowanie można nieco uprościć i nie korzystać z cykliczności. Najpierw zauważamy, że $7^4 = 2401$, czyli ostatnią cyfrą potęgi 7^4 jest jeden. Ponieważ $7^8 = 7^4 \cdot 7^4$, więc ostatnią cyfrą potęgi 7^8 jest też 1. Podobnie

$$\begin{aligned}
7^{16} &= 7^8 \cdot 7^8, \\
7^{32} &= 7^{16} \cdot 7^{16}, \\
7^{64} &= 7^{32} \cdot 7^{32}, \\
7^{128} &= 7^{64} \cdot 7^{64}, \\
7^{256} &= 7^{128} \cdot 7^{128}.
\end{aligned}$$

Zatem ostatnią cyfrą każdej z potęg 7^{16}, 7^{32}, 7^{64}, 7^{128} i 7^{256} jest 1.

3. Znajdź ostatnią cyfrę liczby 2^{100}.

Rozwiązanie. Zauważmy, że $2^5 = 32 \equiv 2 \pmod{10}$. Podnosząc tę kongruencję do potęgi 20, a następnie do potęgi 4, otrzymamy:

$$2^{100} = (2^5)^{20} \equiv 2^{20} = (2^5)^4 \equiv 2^4 = 16 \equiv 6 \pmod{10}.$$

Zatem ostatnią cyfrą liczby 2^{100} jest 6.

Inny sposób: najpierw zauważamy, że $2^4 = 16 \equiv 1 \pmod{5}$. Stąd

$$2^{99} = 2^3 \cdot 2^{96} = 8 \cdot (2^4)^{24} \equiv 8 \cdot 1^{24} = 8 \pmod{5}.$$

Z własności 5 wynika, że

$$2^{100} = 2 \cdot 2^{99} \equiv 2 \cdot 8 = 16 \equiv 6 \pmod{10}.$$

4. Wyznacz resztę z dzielenia liczby $3^{80} + 7^{80}$ przez 11.

Rozwiązanie. Zauważamy najpierw, że

$$3^5 = 243 \equiv 1 \pmod{11} \quad \text{oraz} \quad 7^5 = 16807 \equiv 10 \equiv -1 \pmod{11}.$$

Te dwie kongruencje możemy otrzymać, wykonując kolejne działania:

$$\begin{aligned} 3^1 &\equiv 3 \pmod{11},\\ 3^2 &\equiv 3 \cdot 3 = 9 \pmod{11},\\ 3^3 &\equiv 9 \cdot 3 = 27 \equiv 5 \pmod{11},\\ 3^4 &\equiv 5 \cdot 3 = 15 \equiv 4 \pmod{11},\\ 3^5 &\equiv 4 \cdot 3 = 12 \equiv 1 \pmod{11} \end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned} 7^1 &\equiv 7 \pmod{11},\\ 7^2 &\equiv 7 \cdot 7 = 49 \equiv 5 \pmod{11},\\ 7^3 &\equiv 5 \cdot 7 = 35 \equiv 2 \pmod{11},\\ 7^4 &\equiv 2 \cdot 7 = 14 \equiv 3 \pmod{11},\\ 7^5 &\equiv 3 \cdot 7 = 21 \equiv 10 \equiv -1 \pmod{11}. \end{aligned}$$

Podnosząc obie kongruencje do potęgi 16, otrzymamy:

$$3^{80} = (3^5)^{16} \equiv 1^{16} = 1 \pmod{11} \qquad \text{oraz} \qquad 7^{80} = (7^5)^{16} \equiv (-1)^{16} = 1 \pmod{11}.$$

Zatem reszta z dzielenia $3^{80} + 7^{80}$ przez 11 jest równa 2.

5. Udowodnij, że $10 \mid 53^{53} - 33^{33}$.

Rozwiązanie. Ponieważ

$$53 \equiv 3 \pmod{10} \quad \text{oraz} \quad 33 \equiv 3 \pmod{10},$$

więc
$$53^{53} - 33^{33} \equiv 3^{53} - 3^{33} \pmod{10}.$$
Następnie zauważamy, że
$$3^4 = 81 \equiv 1 \pmod{10}.$$
Stąd otrzymujemy
$$3^{53} = 3^{4\cdot 13+1} = (3^4)^{13} \cdot 3 \equiv 1^{13} \cdot 3 = 3 \pmod{10}$$
oraz
$$3^{33} = 3^{4\cdot 8+1} = (3^4)^{8} \cdot 3 \equiv 1^{8} \cdot 3 = 3 \pmod{10}.$$
Zatem
$$53^{53} - 33^{33} \equiv 3 - 3 = 0 \pmod{10},$$
co dowodzi, że liczba $53^{53} - 33^{33}$ jest podzielna przez 10.

6. Udowodnij, że $29 \mid 2^{5n+1} + 3^{n+3}$.

Rozwiązanie. Ponieważ $32 \equiv 3 \pmod{29}$, więc
$$\begin{aligned} 2^{5n+1} + 3^{n+3} &= 2 \cdot 2^{5n} + 3^3 \cdot 3^n = 2 \cdot (2^5)^n + 27 \cdot 3^n = 2 \cdot 32^n + 27 \cdot 3^n \equiv \\ &\equiv 2 \cdot 3^n + 27 \cdot 3^n = 29 \cdot 3^n \equiv 0 \pmod{29}. \end{aligned}$$

7. Udowodnij, że jeśli $x^2 + y^2 = z^2$, to:

a) co najmniej jedna z liczb x i y jest podzielna przez 3,

b) co najmniej jedna z liczb x i y jest podzielna przez 4,

c) co najmniej jedna z liczb x, y i z jest podzielna przez 5.

Rozwiązanie. Najpierw zauważamy, że:

- jeśli $n \equiv 0 \pmod{3}$, to $n^2 \equiv 0 \pmod{3}$,
- jeśli $n \equiv 1 \pmod{3}$, to $n^2 \equiv 1 \pmod{3}$,
- jeśli $n \equiv 2 \pmod{3}$, to $n^2 \equiv 1 \pmod{3}$.

Stąd wynika, że liczba n^2 przy dzieleniu przez 3 może dać tylko resztę 0 (gdy n jest podzielna przez 3) lub 1 (w przeciwnym przypadku). Gdyby obie liczby x i y nie były podzielne przez 3, to doszlibyśmy do sprzeczności:
$$z^2 = x^2 + y^2 \equiv 1 + 1 = 2 \pmod{3}.$$

Podobnie dowodzimy punktu b). Tym razem rozważamy kongruencje modulo 8. Liczba n daje jedną z 8 reszt przy dzieleniu przez 8. Mamy wówczas:

- jeśli $n \equiv 0 \pmod{8}$, to $n^2 \equiv 0 \pmod{8}$,
- jeśli $n \equiv 1 \pmod{8}$, to $n^2 \equiv 1 \pmod{8}$,
- jeśli $n \equiv 2 \pmod{8}$, to $n^2 \equiv 4 \pmod{8}$,
- jeśli $n \equiv 3 \pmod{8}$, to $n^2 \equiv 1 \pmod{8}$,
- jeśli $n \equiv 4 \pmod{8}$, to $n^2 \equiv 0 \pmod{8}$,
- jeśli $n \equiv 5 \pmod{8}$, to $n^2 \equiv 1 \pmod{8}$,
- jeśli $n \equiv 6 \pmod{8}$, to $n^2 \equiv 4 \pmod{8}$,
- jeśli $n \equiv 7 \pmod{8}$, to $n^2 \equiv 1 \pmod{8}$.

Przypuśćmy, że obie liczby x i y są niepodzielne przez 4. Wtedy dają resztę 1 lub 4 przy dzieleniu przez 8. Suma kwadratów tych liczb daje wtedy resztę 2, 5 lub 0 przy dzieleniu przez 8. Możliwy jest tylko ten ostatni przypadek: obie liczby x i y są wtedy parzyste i niepodzielne przez 4. Zatem $x = 2u$ i $y = 2w$, gdzie u i w są nieparzyste. Oczywiście liczba z jest wtedy też parzysta: $z = 2t$. Mamy zatem

$$(2u)^2 + (2w)^2 = (2t)^2$$

i po podzieleniu przez 4 otrzymamy równanie

$$u^2 + w^2 = t^2.$$

Liczby u i w są nieparzyste, więc ich kwadraty dają resztę 1 przy dzieleniu przez 8 i okazuje się, że $t^2 \equiv 2 \pmod 8$, co jest niemożliwe.

Wreszcie zauważamy, że liczba n^2 przy dzieleniu przez 5 może dać tylko reszty 0, 1 lub 4 i stąd dość łatwo wynika punkt c).

8. Znajdź wszystkie liczby pierwsze p takie, że liczby $4p^2 + 1$ i $6p^2 + 1$ też są pierwsze.

Rozwiązanie. Jeśli $p \equiv 1 \pmod 5$ lub $p \equiv 4 \pmod 5$, to $p^2 \equiv 1 \pmod 5$ i wtedy

$$4p^2 + 1 \equiv 4 + 1 = 5 \equiv 0 \pmod 5.$$

Jeśli $p \equiv 2 \pmod 5$ lub $p \equiv 3 \pmod 5$, to $p^2 \equiv 4 \pmod 5$ i wtedy

$$6p^2 + 1 \equiv 6 \cdot 4 + 1 = 25 \equiv 0 \pmod 5.$$

Zatem $p = 5$.

Uwaga. Rozwiązanie tego zadania zostało omówione dokładnie w rozdziale o algebrze oraz w rozdziale o wskazówkach heurystycznych.

9. Udowodnij, że $6 \mid 7^n - 1$.

Rozwiązanie. Ponieważ $7 \equiv 1 \pmod 6$, więc

$$7^n \equiv 1^n = 1 \pmod 6.$$

10. Udowodnij, że $7 \mid 2222^{5555} + 5555^{2222}$.

Rozwiązanie. Zauważamy najpierw, że

$$2222 \equiv 3 \pmod 7 \quad \text{oraz} \quad 5555 \equiv 4 \pmod 7.$$

Następnie

$$3^3 = 27 \equiv -1 \pmod 7 \quad \text{oraz} \quad 4^3 = 64 \equiv 1 \pmod 7.$$

Stąd dostajemy

$$2222^{5555} \equiv 3^{5555} = 3^{3\cdot 1851+2} = 9 \cdot (3^3)^{1851} \equiv 9 \cdot (-1)^{1851} = -9 \equiv 5 \pmod 7$$

oraz

$$5555^{2222} \equiv 3^{2222} = 3^{3\cdot 740+2} = 9 \cdot (3^3)^{740} \equiv 9 \cdot 1^{740} = 9 \pmod 7.$$

Zatem
$$2222^{5555} + 5555^{2222} \equiv 5 + 9 = 14 \equiv 0 \pmod 7.$$

11. Znajdź dwie ostatnie cyfry liczby 2^{999}.

Rozwiązanie. Zauważmy najpierw, że
$$2^{10} = 1024 \equiv -1 \pmod{25}.$$

Stąd wynika, że
$$2^{990} = (2^{10})^{99} \equiv (-1)^{99} = -1 \pmod{25}.$$

Zatem
$$2^{997} = 2^7 \cdot 2^{990} \equiv -128 \equiv 22 \pmod{25},$$

skąd dostajemy ostatecznie
$$2^{999} = 4 \cdot 2^{999} \equiv 4 \cdot 22 = 88 \pmod{100}.$$

12. Udowodnij, że $11 \mid 2^{6n+1} + 9^{n+1}$.

Rozwiązanie. Ponieważ $2^6 = 64 \equiv 9 \pmod{11}$, więc
$$2^{6n+1} + 9^{n+1} = 2 \cdot (2^6)^n + 9 \cdot 9^n \equiv 2 \cdot 9^n + 9 \cdot 9^n = 11 \cdot 9^n \equiv 0 \pmod{11}.$$

13. Udowodnij, że $133 \mid 11^{n+2} + 12^{2n+1}$.

Rozwiązanie. Ponieważ $12^2 = 144 \equiv 11 \pmod{133}$, więc
$$11^{n+2} + 12^{2n+1} = 11^2 \cdot 11^n + 12 \cdot (12^2)^n \equiv 121 \cdot 11^n + 12 \cdot 11^n = 133 \cdot 11^n \equiv 0 \pmod{133}.$$

14. Udowodnij, że $30 \mid n(n^2 - 11)(n^2 + 11)$.

Wskazówka. Ponieważ $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$, więc rozpatrz oddzielnie kongruencje modulo 2, 3 i 5.

15. Udowodnij, że $9 \mid 4^n + 15n - 1$.

Rozwiązanie. Zauważmy najpierw, że $4^3 = 64 \equiv 1 \pmod 9$. Stąd wynika, że:
$$\begin{aligned} 4^{3k} &= (4^3)^k \equiv 1^k = 1 \pmod 9, \\ 4^{3k+1} &= 4 \cdot (4^3)^k \equiv 4 \pmod 9, \\ 4^{3k+2} &= 14 \cdot (4^3)^k \equiv 16 \equiv 7 \pmod 9 \end{aligned}$$

lub inaczej:

a) jeśli $n \equiv 0 \pmod 3$, to $4^n \equiv 1 \pmod 9$,
b) jeśli $n \equiv 1 \pmod 3$, to $4^n \equiv 4 \pmod 9$,
c) jeśli $n \equiv 2 \pmod 3$, to $4^n \equiv 7 \pmod 9$.

Rozpatrujemy zatem trzy przypadki:

1) $n \equiv 0 \pmod 3$. Wtedy $3n \equiv 0 \pmod 9$, skąd wynika, że
$$4^n + 15n - 1 = 4^n + 5 \cdot 3n - 1 \equiv 1 + 5 \cdot 0 - 1 = 0 \pmod 9.$$

2) $n \equiv 1 \pmod 3$. Wtedy $3n \equiv 3 \pmod 9$, skąd dostajemy

$$4^n + 15n - 1 = 4^n + 5 \cdot 3n - 1 \equiv 4 + 5 \cdot 3 - 1 = 18 \equiv 0 \pmod 9.$$

3) $n \equiv 2 \pmod 3$. Wtedy $3n \equiv 6 \pmod 9$, skąd ostatecznie dostajemy

$$4^n + 15n - 1 = 4^n + 5 \cdot 3n - 1 \equiv 7 + 5 \cdot 6 - 1 = 36 \equiv 0 \pmod 9.$$

16. Udowodnij, że $8 \mid 5^{n+1} + 2 \cdot 3^n + 1$.

Wskazówka. Rozpatrz dwa przypadki: dla n parzystych i dla n nieparzystych.

17. Wykaż, że liczba $53 \cdot 83 \cdot 109 + 40 \cdot 66 \cdot 96$ jest złożona.

Rozwiązanie. Zauważmy, że

$$53 \equiv -96 \pmod{149}, \qquad 83 \equiv -66 \pmod{149}, \qquad 109 \equiv -40 \pmod{149}.$$

Mnożąc te kongruencje stronami, otrzymujemy

$$53 \cdot 83 \cdot 109 \equiv -96 \cdot 66 \cdot 40 \pmod{149},$$

skąd wynika, że

$$53 \cdot 83 \cdot 109 + 40 \cdot 66 \cdot 96 \equiv 0 \pmod{149}.$$

18. Udowodnij, że $504 \mid n^3(n^3 - 1)(n^3 + 1)$.

Wskazówka. Ponieważ $504 = 7 \cdot 8 \cdot 9$, więc rozpatrz oddzielnie kongruencje modulo 7, 8 i 9.

19. Znajdź liczbę pierwszą p taką, że:

a) $p + 10$ i $p + 14$ są pierwsze;

b) $p + 4$ i $p + 14$ są pierwsze.

Wskazówka. Zobacz, co się dzieje, gdy $p \not\equiv 0 \pmod 3$. Rozpatrz dwa przypadki.

20. Znajdź liczbę pierwszą p taką, że:

a) $2p + 1$ i $4p + 1$ są pierwsze;

b) $8p^2 + 1$ jest pierwsza.

Wskazówka. $p = 3$. Zrób to, co w zadaniu 19.

21. Udowodnij, że jeśli $p > 3$ i liczby p oraz $10p + 1$ są pierwsze, to liczba $5p + 1$ nie jest pierwsza.

Wskazówka. Zrób jeszcze raz to samo, co w zadaniach 19 i 20.

22. Udowodnij, że jeśli liczby p i $p^2 + 2$ są pierwsze, to liczba $p^3 + 2$ też jest pierwsza.

Rozwiązanie. Oczywiście $p \neq 2$, gdyż w przeciwnym przypadku mielibyśmy $p^2 + 2 = 6$. Zatem $p \geq 3$. Jeśli $p > 3$, to liczba p nie jest podzielna przez 3, a więc $p^2 \equiv 1 \pmod 3$. Wtedy

$$p^2 + 2 \equiv 1 + 2 = 3 \equiv 0 \pmod 3,$$

co jest niemożliwe. Zatem $p = 3$ i wtedy $p^2 + 2 = 11$ oraz $p^3 + 2 = 29$.

Zestaw 4.
Równania diofantyczne

W zadaniach tego zestawu pokażę kilka wybranych metod rozwiązywania równań diofantycznych. Będą to następujące metody:

- Rozkładanie wyrażeń na czynniki.
- Przeszukiwanie dzielników danej liczby.
- Wykorzystanie nierówności.
- Zastosowanie kongruencji.
- Grupowanie i wykorzystanie wzorów skróconego mnożenia.
- Metoda zstępowania nieskończonego.

Pierwsze trzy metody zilustrujemy za pomocą pierwszych dwóch zadań. Na ogół te dwa zadania rozwiązuję z uczniami przed warsztatami, na kółku matematycznym. Z zadania 2 wybieram przykłady a) i c). Pozostałe zadania są przeznaczone na warsztaty.

1. Rozwiąż następujące równania w liczbach całkowitych:

a) $xy = x + y$;
b) $xy = x - 2y + 7$;
c) $xy = 7x + 3y - 11$;
d) $2xy = 3x - y + 2$;
e) $6xy = 2x + 9y + 14$.

Rozwiązanie. Najpierw pokażę rozwiązania wszystkich pięciu równań za pomocą metody rozkładania na czynniki.

a) Rozwiązujemy równanie $xy = x + y$. Przekształcamy je w sposób równoważny:

$$xy - x - y = 0,$$
$$xy - x - y + 1 = 1,$$
$$x(y - 1) - (y - 1) = 1,$$
$$(x - 1)(y - 1) = 1.$$

Liczba 1 ma tylko dwa rozkłady na iloczyn liczb całkowitych. Są to: $1 = 1 \cdot 1$ oraz $1 = (-1) \cdot (-1)$. Mamy zatem dwa możliwe układy równań:

$$\begin{cases} x - 1 = 1 \\ y - 1 = 1 \end{cases} \quad \text{oraz} \quad \begin{cases} x - 1 = -1 \\ y - 1 = -1 \end{cases}$$

Otrzymujemy stąd dwa rozwiązania układu: $x = y = 2$ oraz $x = y = 0$.

Uwaga. Równania postaci

$$xy = ax + by + c$$

możemy doprowadzić do postaci równoważnej

$$(x - b)(y - a) = ab + c.$$

Następnie każdemu rozkładowi liczby $ab + c$ na czynniki

$$ab + c = kl$$

odpowiada układ równań
$$\begin{cases} x-b=k \\ y-a=l \end{cases}$$

b) Równanie doprowadzamy do postaci
$$(x+2)(y-5)=5.$$

Stąd dostajemy cztery układy równań:
$$\begin{cases} x+2=1 \\ y-5=5 \end{cases} \quad \begin{cases} x+2=5 \\ y-5=1 \end{cases} \quad \begin{cases} x+2=-1 \\ y-5=-5 \end{cases} \quad \begin{cases} x+2=-5 \\ y-5=-1 \end{cases}$$

Ostatecznie mamy cztery rozwiązania: $(x,y)=(-1,10)$, $(x,y)=(3,6)$, $(x,y)=(-3,0)$, $(x,y)=(-7,4)$.

c) Równanie doprowadzamy do postaci
$$(x-3)(y-7)=10.$$

Liczba 10 ma osiem rozkładów na iloczyn liczb całkowitych. Mamy zatem osiem układów równań i osiem rozwiązań naszego równania. Są to następujące pary (x,y):
$$(-7,6),(-2,5),(1,2),(2,-3),(4,17),(5,12),(8,9),(13,8).$$

Uwaga. Równanie postaci
$$mxy=ax+by+c$$
przekształcamy w sposób równoważny:
$$\begin{gathered} mxy-ax-by=c, \\ m^2xy-amx-bmy=mc, \\ mx(my-a)-bmy+ab=ab+mc, \\ mx(my-a)-b(my-a)=ab+mc, \\ (mx-b)(my-a)=ab+mc. \end{gathered}$$

d) Tym razem otrzymujemy równanie
$$(2x+1)(2y-3)=1.$$

Mamy dwa rozwiązania: $(-1,1)$ i $(0,2)$.

e) Dostajemy równanie
$$(6x-9)(6y-2)=2\cdot 9+6\cdot 14.$$

Po podzieleniu obu stron przez 6, otrzymujemy równanie
$$(2x-3)(3y-1)=17.$$

Dostajemy cztery układy równań:

$$\begin{cases} 2x-3=1 \\ 3y-1=17 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x-3=-1 \\ 3y-1=-17 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x-3=17 \\ 3y-1=1 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x-3=-17 \\ 3y-1=-1 \end{cases}$$

Drugi i trzeci układ równań nie mają rozwiązań całkowitych. Ostatecznie otrzymujemy dwa rozwiązania: $(2,6)$ i $(-7,0)$.

Następnie popatrzmy na rozwiązania, w których sprowadzamy równanie do zadania znalezienia wszystkich dzielników pewnej liczby całkowitej.

a) Wyznaczamy y z naszego równania (najpierw zauważamy, że nie istnieje rozwiązanie, w którym $x=1$):

$$\begin{aligned} xy &= x+y, \\ xy-y &= x, \\ (x-1)y &= x, \\ y &= \frac{x}{x-1}. \end{aligned}$$

Następnie przekształcamy otrzymany wzór:

$$y=\frac{x}{x-1}=\frac{x-1+1}{x-1}=1+\frac{1}{x-1}.$$

Liczba $\frac{1}{x-1}$ musi być całkowita, a więc $x-1$ jest dzielnikiem liczby 1. Stąd mamy dwa przypadki:

Przypadek 1. $x-1=1$. Wtedy dostajemy rozwiązanie $x=y=2$.
Przypadek 2. $x-1=-1$. W tym przypadku dostajemy rozwiązanie $x=y=0$.

b) Po nietrudnych przekształceniach dostajemy:

$$y=\frac{x+7}{x+2}=1+\frac{5}{x+2}.$$

Zatem $x+2$ jest jedną z czterech liczb: -5, -1, 1 lub 5. Stąd dostajemy cztery rozwiązania równania.

c) Tym razem otrzymujemy:

$$y=\frac{7x-11}{x-3}=7+\frac{10}{x-3}.$$

Liczba 10 ma 8 dzielników całkowitych; stąd wynika, że $x-3$ jest jedną z tych ośmiu liczb. To daje osiem rozwiązań równania.

d) W tym równaniu mamy:

$$y=\frac{3x+2}{2x+1}=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2x+1}.$$

Widzimy, że y jest liczbą całkowitą wtedy i tylko wtedy, gdy ułamek $\frac{1}{2x+1}$ jest nieparzystą liczbą całkowitą. Mamy zatem dwa przypadki: $2x+1=1$ lub $2x+1=-1$. Stąd $x=0$ lub $x=-1$ i odpowiednie wartości y możemy łatwo obliczyć.

e) Wreszcie tym razem mamy:

$$y = \frac{2x+14}{6x-9} = \frac{1}{3} \cdot \frac{2x+14}{2x-3} = \frac{1}{3} \cdot \frac{2x-3+17}{2x-3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{17}{2x-3} = \frac{1}{3} \cdot \left(1 + \frac{17}{2x-3}\right).$$

Ponieważ x jest liczbą całkowitą, więc $2x-3$ jest całkowitym dzielnikiem 17. Zatem $2x-3$ jest jedną z czterech liczb: 1, 17, -1 lub -17. Tylko dwa z tych dzielników dają całkowitą wartość y. Są to: $2x-3=1$ oraz $2x-3=-17$. Stąd $x=2$ lub $x=-7$.

Trzecia metoda wykorzystuje nierówności. W przypadku równania $xy = x+y$ mamy dwa naturalne sposoby rozwiązania. W pierwszym rozwiązaniu rozpatrujemy kilka przypadków. Najpierw zauważamy, że jeśli jedna z niewiadomych jest równa 0, to druga też jest równa 0; mamy zatem rozwiązanie $x=y=0$. Teraz załóżmy, że obie liczby są różne od zera. Mamy wtedy trzy przypadki.

Przypadek 1. Obie liczby są dodatnie. Dzielimy obie strony równania przez xy i otrzymujemy

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1.$$

Jeśli któraś z niewiadomych jest równa 1, to mamy sprzeczność: lewa strona jest większa od 1. Jeśli obie niewiadome są równe co najmniej 3, to też mamy sprzeczność:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \leq \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3} < 1.$$

Zatem któraś niewiadoma jest równa 2 i stąd wynika, że ta druga też jest równa 2.

Przypadek 2. Obie liczby są ujemne. Mamy sprzeczność: liczba xy jest dodatnia, liczba $x+y$ jest ujemna.

Przypadek 3. Jedna liczba jest dodatnia, druga ujemna. Niech na przykład $x>0$, $y<0$. Niech zatem $y=-z$, gdzie $z>0$. Mamy wówczas

$$x \cdot (-z) = x - z,$$

czyli

$$xz = z - x.$$

Po podzieleniu obu stron przez xz otrzymamy

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{z} = 1.$$

To jednak jest niemożliwe, gdyż wówczas mielibyśmy

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{z} < \frac{1}{x} \leq 1.$$

Zatem w tym przypadku nie ma rozwiązania.

W drugim rozwiązaniu wyznaczamy y i korzystamy z własności funkcji homograficznej określonej wzorem

$$f(x) = y = \frac{x}{x-1}$$

dla $x \neq 1$. Zauważamy, że dla dużych wartości x (dokładniej — dla x o dużej wartości bezwzględnej) wartości funkcji f są bliskie jedności. To sugeruje rozwiązanie w następujących trzech krokach.

Krok 1. Rozwiązujemy równanie $f(x) = 1$. Sprawdzamy, czy to równanie ma rozwiązanie całkowite.
Krok 2. Rozwiązujemy nierówność podwójną $0 < f(x) < 2$. Dla argumentów x spełniających tę nierówność wartości funkcji f nie są całkowite.
Krok 3. Obliczamy wartość $f(x)$ dla wszystkich pozostałych argumentów całkowitych x i sprawdzamy, czy któraś wartość okaże się całkowita.

W kroku pierwszym łatwo stwierdzamy, że równanie $f(x) = 1$ nie ma rozwiązania. Następnie w kroku drugim rozwiązujemy nierówność podwójną

$$0 < \frac{x}{x-1} < 2.$$

Otrzymujemy: $x < 0$ lub $x > 2$. W kroku trzecim musimy zatem sprawdzić tylko dwie wartości x: $x = 0$ i $x = 2$ (wartość $x = 1$ została wykluczona wcześniej). Okazuje się, że obie są dobre: $f(0) = 0$ i $f(2) = 2$. To daje nam dwa rozwiązania równania.

2. Znajdź wszystkie liczby całkowite n, dla których następująca liczba jest całkowita:

a) $\dfrac{n+7}{n+2}$,

b) $\dfrac{3n+2}{2n+1}$,

c) $\dfrac{14n+52}{n^2+1}$,

d) $\dfrac{26n+138}{n^2+1}$.

Rozwiązanie. Pokażę rozwiązania zadań 2a) i 2c). Resztę przykładów z zadania 2 pozostawię jako ćwiczenia, podam tylko odpowiedzi. Zadanie 2a) rozwiążę trzema sposobami, znanymi z rozwiązania zadania 1.

Sposób I. Oznaczmy naszą liczbę literą m. Zauważmy, że

$$m = \frac{n+7}{n+2} = \frac{n+2+5}{n+2} = 1 + \frac{5}{n+2}.$$

Liczba m jest całkowita wtedy i tylko wtedy, gdy całkowita jest liczba $\frac{5}{n+2}$, tzn. wtedy i tylko wtedy, gdy liczba $n+2$ jest dzielnikiem liczby 5. Mamy zatem cztery możliwości:

- $n + 2 = 1$, wówczas $n = -1$;
- $n + 2 = 5$, wówczas $n = 3$;
- $n + 2 = -1$, wówczas $n = -3$;
- $n + 2 = -5$, wówczas $n = -7$.

Dostajemy 4 możliwe liczby n: -7, -3, -1 i 3.

Sposób II. Znów oznaczmy naszą liczbę literą m. Mamy zatem

$$m = \frac{n+7}{n+2},$$

czyli

$$mn + 2m - n = 7.$$

Od obu stron odejmujemy 2 i przekształcamy otrzymane równanie

$$\begin{aligned} mn + 2m - n - 2 &= 5, \\ m(n+2) - (n+2) &= 5, \\ (m-1)(n+2) &= 5. \end{aligned}$$

Znów mamy cztery możliwości:

- $m - 1 = -5$ oraz $n + 2 = 1$, wówczas $n = -1$;
- $m - 1 = -1$ oraz $n + 2 = 5$, wówczas $n = 3$;
- $m - 1 = 5$ oraz $n + 2 = -1$, wówczas $n = -3$;
- $m - 1 = 1$ oraz $n + 2 = -5$, wówczas $n = -7$.

Otrzymujemy te same cztery odpowiedzi: -7, -3, -1 i 3.

Sposób III. Przekształcamy nasze wyrażenie tak jak w sposobie I:

$$m = \frac{n+7}{n+2} = 1 + \frac{5}{n+2}.$$

Widzimy, że dla liczb n o dużej wartości bezwzględnej liczba m niewiele różni się od 1. Sprawdzamy zatem, czy może ona być równa 1:

$$\begin{aligned} \frac{n+7}{n+2} &= 1, \\ n + 7 &= n + 2, \\ 7 &= 2, \end{aligned}$$

co jest niemożliwe. Teraz rozwiązujemy nierówność podwójną

$$0 < \frac{n+7}{n+2} < 2.$$

Rozważamy dwa przypadki.

- Przypadek 1. $n + 2 > 0$, czyli $n > -2$.
  Wówczas dostajemy nierówność równoważną
  $$0 < n + 7 < 2n + 4,$$
  którą spełniają liczby $n > 3$.
- Przypadek 2. $n + 2 < 0$, czyli $n < -2$.
  Wówczas dostajemy nierówność równoważną
  $$0 > n + 7 > 2n + 4.$$
  Tę nierówność spełniają liczby n takie, że $n < -7$.

Tak więc dla liczb n takich, że $n < -7$ lub $n > 3$, liczba m nie może być całkowita: spełnia nierówność podwójną $0 < m < 2$ i jednocześnie jest różna od 1. Pozostaje więc sprawdzić liczby n takie, że $-7 \leq n \leq 3$ (oprócz $n = -2$) i zobaczyć, dla których liczb otrzymamy wartość całkowitą. Mamy teraz:

$$\begin{aligned} n=-7:&\quad \frac{n+7}{n+2}=0, & n=-1:&\quad \frac{n+7}{n+2}=6,\\ n=-6:&\quad \frac{n+7}{n+2}=-\frac{1}{4}, & n=0:&\quad \frac{n+7}{n+2}=\frac{7}{2},\\ n=-5:&\quad \frac{n+7}{n+2}=-\frac{2}{3}, & n=1:&\quad \frac{n+7}{n+2}=\frac{8}{3},\\ n=-4:&\quad \frac{n+7}{n+2}=-\frac{3}{2}, & n=2:&\quad \frac{n+7}{n+2}=\frac{9}{4},\\ n=-3:&\quad \frac{n+7}{n+2}=-4, & n=3:&\quad \frac{n+7}{n+2}=2. \end{aligned}$$

Zatem znów mamy te same odpowiedzi: -7, -3, -1 i 3.

Przejdźmy do zadania 2c). Dla przypomnienia — mamy znaleźć wszystkie liczby całkowite n takie, że liczba

$$\frac{14n+52}{n^2+1}$$

jest całkowita.

To zadanie jest trudniejsze od poprzedniego. Kwadrat liczby n w mianowniku powoduje, że pierwsze dwa sposoby rozwiązania poprzedniego zadania nie są dobre. Zastosujemy zatem sposób III. Okaże się jednak, że będziemy musieli rozwiązać nietrudne nierówności kwadratowe. Najpierw zauważamy, że dla każdej liczby całkowitej n liczba $\frac{3n+1}{n^2+1}$ jest różna od zera. Następnie zauważamy, że dla liczb n o bardzo dużej wartości bezwzględnej mianownik jest znacznie większy od wartości bezwzględnej licznika. To sugeruje, że dla takich n liczba $\frac{14n+52}{n^2+1}$ jest bliska zera, a więc niecałkowita. Rozwiązujemy zatem nierówność podwójną

$$-1 < \frac{14n+52}{n^2+1} < 1.$$

Ponieważ $n^2+1>0$ dla każdego n, więc ta nierówność jest równoważna nierówności

$$-(n^2+1) < 14n+52 < n^2+1.$$

Lewa nierówność jest równoważna nierówności

$$n^2+14n+53>0.$$

Ta nierówność jest spełniona dla każdej liczby całkowitej n, ponieważ

$$n^2+14n+53 = n^2+14n+49+4 = (n+7)^2+4 \geq 4 > 0.$$

Rozwiązujemy zatem prawą nierówność. Jest ona równoważna nierówności

$$n^2 > 14n+51.$$

Zauważamy najpierw, że dla $n \geq 18$ mamy $n^2 \geq 18n$, skąd wynika, że

$$n^2 \geq 18n = 14n + 4n \geq 14n + 4 \cdot 18 = 14n + 72 > 14n + 51.$$

Zajmijmy się teraz ujemnymi wartościami n. Niech $n = -m$, gdzie $m > 0$. Nasza nierówność przyjmie postać

$$(-m)^2 > 14 \cdot (-m) + 51,$$

czyli

$$m^2 + 14m > 51.$$

Zauważmy, że dla $m \geq 4$ mamy $m^2 \geq 4m$, skąd wynika, że

$$m^2 + 14m \geq 4m + 14m = 18m \geq 18 \cdot 4 = 72 > 51.$$

Zatem, jeśli $n \geq 18$ lub $n \leq -4$, to lewa nierówność jest spełniona. Musimy zatem sprawdzić tylko liczby całkowite n od -3 do 17. Obliczenia pozostawię jako ćwiczenie. Otrzymujemy 7 możliwych wartości n:

$$n = -3: \quad \frac{14n+52}{n^2+1} = 1, \qquad n = 2: \quad \frac{14n+52}{n^2+1} = 16,$$

$$n = -1: \quad \frac{14n+52}{n^2+1} = 19, \qquad n = 7: \quad \frac{14n+52}{n^2+1} = 3,$$

$$n = 0: \quad \frac{14n+52}{n^2+1} = 52, \qquad n = 17: \quad \frac{14n+52}{n^2+1} = 1.$$

$$n = 1: \quad \frac{14n+52}{n^2+1} = 33,$$

Oczywiście można rozwiązać nierówność kwadratową:

$$\begin{gathered} n^2 > 14n + 51, \\ n^2 - 14n + 49 > 100, \\ (n-7)^2 - 10^2 > 0, \\ (n-17)(n+3) > 0. \end{gathered}$$

Stąd $n < -3$ lub $n > 17$. Wydaje się, że pierwszy sposób jest dla gimnazjalisty bardziej naturalny.

Uwaga 1. Do podwójnej nierówności można dojść także w inny sposób. Tak jak wyżej, zauważamy najpierw, że $\dfrac{14n+52}{n^2+1} \neq 0$ dla każdej liczby całkowitej n. Rozpatrujemy zatem dwa przypadki:

1) $14n + 52 > 0$. Ponieważ $\dfrac{14n+52}{n^2+1}$ jest liczbą całkowitą, więc $n^2 + 1$ jest dzielnikiem liczby $14n + 52$. Ponieważ liczby $n^2 + 1$ i $14n + 52$ są dodatnie, więc

$$n^2 + 1 \leq 14n + 52.$$

2) $14n + 52 < 0$. Tak jak wyżej stwierdzamy, że $n^2 + 1$ jest dzielnikiem liczby $14n + 52$ i stąd $n^2 + 1 \leq |14n + 52|$, czyli $n^2 + 1 \leq -14n - 52$. Zatem

$$n^2 + 14n + 53 \leq 0.$$

Uwaga 2. Oczywiście przy rozwiązywaniu tego zadania bardzo pomaga przyjrzenie się wykresowi funkcji określonej wzorem

$$f(x) = \frac{14x + 52}{x^2 + 1}$$

dla każdej liczby rzeczywistej x.

Odpowiedzi. Zadanie 2b) jest inaczej sformułowanym zadaniem 1d). W zadaniu 2d) mamy 7 odpowiedzi: $n = -4$, $n = -3$, $n = -1$, $n = 0$, $n = 1$, $n = 2$ i $n = 17$.

3. $(2x + y)(5x + 3y) = 7$.

Rozwiązanie. Mamy 4 układy równań:

$$\begin{cases} 2x + y = 1 \\ 5x + 3y = 7 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x + y = 7 \\ 5x + 3y = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x + y = -1 \\ 5x + 3y = -7 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x + y = -7 \\ 5x + 3y = -1 \end{cases}$$

Stąd mamy 4 rozwiązania:

$$\begin{cases} x = -4 \\ y = 9 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 20 \\ y = -33 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 4 \\ y = 9 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -20 \\ y = 33 \end{cases}$$

4. $x^2 - y^2 = 31$.

Rozwiązanie. Przekształcamy równanie do postaci $(x - y)(x + y) = 31$. Tak jak w zadaniu 3, mamy 4 układy równań prowadzące do 4 odpowiedzi:

$$(x, y) = (16, 15), \quad (x, y) = (16, -15), \quad (x, y) = (-16, -15), \quad (x, y) = (-16, 15).$$

5. $xy = x + y + 3$.

Rozwiązanie. Przekształcamy równanie do postaci $(x - 1)(y - 1) = 4$. Mamy 6 odpowiedzi. Para (x, y) jest jedną z następujących sześciu par:

$$(5, 2), \quad (2, 5), \quad (0, -3), \quad (-3, 0), \quad (3, 3), \quad (-1, -1).$$

6. $xy + 3x - 5y = -3$.

Rozwiązanie. Przekształcamy równanie do postaci $(x - 5)(y + 3) = -18$. Mamy 12 rozwiązań; są to następujące pary (x, y):

$$(-13, -2), \quad (-4, -1), \quad (-1, 0), \quad (2, 3), \quad (3, 6), \quad (4, 15),$$
$$(6, -21), \quad (7, -12), \quad (8, -9), \quad (11, -6), \quad (14, -5), \quad (23, -4).$$

7. $xy = 20 - 3x + y$.

Rozwiązanie. Przekształcamy równanie do postaci $(x - 1)(y + 3) = 20$. Mamy 4 rozwiązania. Są to pary (x, y):

$$(2, 14), \quad (18, -2), \quad (0, -20), \quad (-16, -4).$$

8. $x^2 - y^2 = 1988$.

Rozwiązanie. Doprowadzamy równanie do postaci $(x-y)(x+y) = 1988$. Zauważamy, że $1988 = 2^2 \cdot 7 \cdot 71$. Liczba 1988 ma 8 rozkładów na iloczyn liczb tej samej parzystości. Jest zatem 8 rozwiązań: $(498, 496)$, $(498, -496)$, $(-498, 496)$, $(-498, -496)$, $(78, 64)$, $(78, -64)$, $(-78, 64)$, $(-78, -64)$.

9. $x^2 = 14 + y^2$.

Rozwiązanie. Możemy — tak jak w poprzednich zadaniach — doprowadzić równanie do postaci $(x - y)(x + y) = 14$. Otrzymamy 8 układów równań i okaże się, że żaden nie ma rozwiązania. Możemy także zauważyć, że liczby $x + y$ i $x - y$ są tej samej parzystości, a liczby 14 nie można rozłożyć na iloczyn liczb tej samej parzystości. Możemy wreszcie zauważyć, że jeśli para (x, y) jest rozwiązaniem równania, to $x^2 \equiv y^2 + 2 \pmod 4$. Ponieważ kwadrat może przy dzieleniu przez 4 dać tylko resztę 0 lub 1, więc po lewej stronie możemy mieć wyłącznie reszty 0 lub 1, natomiast po prawej możemy mieć wyłącznie reszty 2 lub 3. Równanie nie ma zatem rozwiązania.

10. $x^2 - 7y = 10$.

Rozwiązanie. Mamy $x^2 \equiv 3 \pmod 7$, ale kwadrat przy dzieleniu przez 7 może dać tylko reszty 0, 1, 2 lub 4. Równanie nie ma rozwiązania.

11. $x^2 - 3y^2 = 8$.

Rozwiązanie. Mamy $x^2 \equiv 2 \pmod 3$, ale to jest niemożliwe. Kwadrat przy dzieleniu przez 3 może dać tylko resztę 0 lub 1. Równanie nie ma rozwiązania.

12. $x^2 - 3y = 17$.

Rozwiązanie. Mamy $x^2 \equiv 2 \pmod 3$. Równanie nie ma rozwiązania.

13. $15x^2 - 7y^2 = 9$.

Rozwiązanie. Mamy $7x^2 + 9 \equiv 0 \pmod 5$, czyli $2x^2 \equiv 1 \pmod 5$. Jednak kwadrat przy dzieleniu przez 5 może dać reszty 0, 1 lub 4. Równanie nie ma rozwiązania.

14. $x^2 + y^2 + z^2 = 8t - 1$.

Rozwiązanie. Pokazujemy, że x^2 przy dzieleniu przez 8 może dać jedną z reszt: 0, 1 lub 4. Żadna kombinacja trzech takich liczb nie da reszty 7. Nie ma rozwiązań.

15. $x^3 + 21y^2 + 5 = 0$.

Rozwiązanie. Mamy $x^3 + 5 \equiv 0 \pmod 7$. Jednak sześcian przy dzieleniu przez 7 może dać tylko reszty 0, 1 lub 6. Równanie nie ma rozwiązania.

16. $x_1^4 + \ldots + x_{14}^4 = 1599$.

Rozwiązanie. Pokazujemy, że x^4 przy dzieleniu przez 16 może dać tylko resztę 0 lub 1. Żadna kombinacja 14 takich liczb nie da reszty 15. Równanie nie ma rozwiązania.

17. $x^2 + y^2 = x + y + 2$.

Rozwiązanie. Mnożymy obie strony równania przez 4 i przekształcamy je do postaci

$$(2x - 1)^2 + (2y - 1)^2 = 10.$$

Ponieważ 10 można przedstawić jako sumę dwóch kwadratów tylko na jeden sposób: $10 = 1^2 + 3^2$, więc mamy 8 układów równań:

$$\begin{cases} 2x - 1 = \pm 3 \\ 2y - 1 = \pm 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x - 1 = \pm 1 \\ 2y - 1 = \pm 3 \end{cases}$$

Równanie ma 8 rozwiązań. Są to następujące pary (x, y):

$$(1,2), \quad (1,-1), \quad (0,2), \quad (0,-1), \quad (2,1), \quad (2,0), \quad (-1,1), \quad (-1,0).$$

18. $x^2 + y^2 = 9x + 1$.

Rozwiązanie. Mnożymy obie strony przez 4 i doprowadzamy równanie do postaci

$$(2x-9)^2 + (2y)^2 = 85.$$

Liczbę 85 możemy przedstawić w postaci sumy dwóch kwadratów na dwa sposoby:

$$85 = 81 + 4 = 49 + 36.$$

Ponieważ $2x - 9$ jest liczbą nieparzystą oraz $2y$ jest liczbą parzystą, więc mamy dwa rodzaje układów równań:

$$\begin{cases} 2x - 9 = \pm 9 \\ \quad\;\; 2y = \pm 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x - 9 = \pm 7 \\ \quad\;\; 2y = \pm 6 \end{cases}$$

Równanie ma 8 rozwiązań; są to następujące pary (x, y):

$$(1,3), \quad (1,-3), \quad (8,3), \quad (8,-3), \quad (0,1), \quad (0,-1), \quad (-1,1), \quad (-1,-1).$$

19. $x^2 + 4x - 8y = 11$.

Rozwiązanie. Doprowadzamy równanie do postaci $(x+2)^2 = 8y+15$, skąd $(x+2)^2 \equiv 3 \pmod 4$. Równanie nie ma rozwiązania.

20. $x^2 + 5xy - y^2 = 6$.

Rozwiązanie. Jeśli obie liczby x i y są parzyste, to lewa strona dzieli się przez 4, a prawa nie. Jeśli co najmniej jedna liczba jest nieparzysta, to lewa strona jest nieparzysta, a prawa parzysta. Równanie nie ma rozwiązania.

21. $x^2 - xy + y^2 = x + y$.

Rozwiązanie. Mnożymy obie strony przez 2 i doprowadzamy równanie do postaci

$$(x-y)^2 + (x-1)^2 + (y-1)^2 = 2.$$

Teraz mamy skończoną liczbę możliwości i znajdujemy 6 rozwiązań:

$$(0,0), \quad (1,0), \quad (0,1), \quad (2,1), \quad (1,2), \quad (2,2).$$

22. $x^3 - 2y^3 - 4z^3 = 0$.

Rozwiązanie. Łatwo dostrzegamy jedno rozwiązanie: $(0,0,0)$. Przypuśćmy, że istnieje inne rozwiązanie (x, y, z), w którym nie wszystkie liczby x, y i z są zerami. Przypuśćmy, że $x \neq 0$ (rozwiązanie w pozostałych przypadkach jest identyczne). Wybierzmy rozwiązanie (x, y, z), w którym wartość bezwzględna x jest najmniejsza (i różna od zera). Wówczas

$$x^3 = 2(y^3 + 2z^3),$$

więc x jest liczbą parzystą. Niech $x = 2a$. Mamy wówczas

$$8a^3 - 2y^3 - 4z^3 = 0,$$

czyli

$$y^3 = 4a^3 - 2z^3.$$

Stąd wynika, że y jest liczbą parzystą. Niech $y = 2b$. Wówczas

$$8b^3 = 4a^3 - 2z^3,$$

czyli

$$z^3 = 2a^3 - 4b^3.$$

A więc z też jest liczbą parzystą. Niech $z = 2c$. Mamy wtedy

$$8c^3 = 2a^3 - 4b^3,$$

czyli

$$a^3 - 2b^3 - 4c^3 = 0.$$

Trójka liczb (a, b, c) jest więc rozwiązaniem naszego równania

$$x^3 - 2y^3 - 4z^3 = 0.$$

To jednak jest niemożliwe, gdyż wybraliśmy rozwiązanie (x, y, z) o najmniejszej wartości bezwzględnej x. Otrzymaliśmy zaś rozwiązanie (a, b, c), w którym $a = \frac{x}{2}$. Ponieważ $x \neq 0$, więc $|a| < |x|$, co daje sprzeczność. Stąd wynika, że równanie ma tylko rozwiązanie $(0, 0, 0)$.

Opisaną metodę rozwiązania można przedstawić nieco inaczej. Przypuśćmy, że mamy dane jakieś rozwiązanie niezerowe (x, y, z) naszego równania. Wtedy okazuje się, że mamy także mniejsze od niego rozwiązanie niezerowe, jeszcze mniejsze rozwiązanie niezerowe i tak dalej. Taka metoda nazywa się metodą nieskończonego zstępowania.

Uwaga. Przypuśćmy, że dane jest rozwiązanie naszego równania, w którym $x = 0$. Mamy zatem

$$-2y^3 - 4z^3 = 0,$$

czyli

$$y^3 = -2z^3.$$

Stąd wynika, że $y = z = 0$ lub

$$\sqrt[3]{2} = -\frac{y}{z},$$

a więc $\sqrt[3]{2}$ jest liczbą wymierną. To jednak jest nieprawdą. A więc, jeśli $x = 0$, to także $y = 0$ i $z = 0$. W taki sam sposób można udowodnić, że jeśli $y = 0$ lub $z = 0$, to wszystkie niewiadome są równe zeru. A więc, jeśli nasze równanie ma rozwiązanie niezerowe (tzn. takie, w którym co najmniej jedna liczba x, y lub z jest różna od zera), to w tym rozwiązaniu wszystkie niewiadome są różne od zera.

Zestaw 5.

Kombinatoryka — zliczanie

Ten zestaw zadań jest zestawem ćwiczeń na zastosowanie podstawowych metod zliczania: reguły mnożenia, reguły dodawania oraz obliczania liczby sposobów wyboru pary nieuporządkowanej (czyli obliczania współczynnika dwumianowego $\binom{n}{2}$). Te zadania nie wymagają żadnej początkowej wiedzy; mogą być dane uczniom w czasie warsztatów. W trakcie rozwiązywania zadań będą pojawiały się różne trudności — ujawnianie ich i wspólne przezwyciężanie w czasie zajęć jest bardzo kształcące. Jednocześnie wprowadzenie współczynnika dwumianowego $\binom{n}{2}$ jest dobrym wstępem do dalszej nauki kombinatoryki. Taki zestaw zadań może być z powodzeniem dany już uczniom II klasy, po wstępnych zajęciach z kombinatoryki. Tak więc idealnym czasem na warsztaty, w których ten zestaw będzie omawiany, jest koniec II klasy.

1. Ile jest liczb dziesięciocyfrowych, w których zapisie nie występuje zero i występuje dokładnie jedna cyfra parzysta?

Rozwiązanie. Jest to bardzo proste zadanie na zastosowanie reguły mnożenia. Dydaktycznie dobrym sposobem przedstawienia reguły mnożenia jest rozpisanie rozwiązania na kolejno wykonywane czynności. Wyobrażamy sobie, że konstruujemy żądaną liczbę dziesięciocyfrową, wpisując cyfry w 10 przygotowanych miejsc. Za każdym razem, tzn. przy wykonywaniu kolejnej czynności, zapisujemy liczbę możliwych wyników tej czynności; ostateczna odpowiedź będzie iloczynem tych liczb. A teraz popatrzmy, jak to wygląda w praktyce. Będziemy mieli trzy czynności. Oto one:

- wybieramy miejsce dla cyfry parzystej; ponieważ ta cyfra nie jest zerem, więc możemy wybrać każde z 10 miejsc;
- wybieramy tę cyfrę parzystą; mamy tu 4 możliwości: 2, 4, 6 i 8;
- na każdym z pozostałych 9 miejsc stawiamy jedną z pięciu cyfr nieparzystych; mamy tu 5^9 możliwości.

Teraz otrzymane liczby mnożymy.

Odpowiedź. Istnieje $10 \cdot 4 \cdot 5^9 = 78125000$ rozważanych liczb.

2. Ile jest liczb dziesięciocyfrowych, w których zapisie nie występuje zero i występuje dokładnie jedna cyfra nieparzysta?

Rozwiązanie. Znów rozpiszemy wykonywane czynności i otrzymane wyniki pomnożymy:

- wybieramy miejsce dla cyfry nieparzystej: mamy 10 możliwości,
- następnie wybieramy tę cyfrę: mamy 5 możliwości,
- wreszcie na każdym z 9 wolnych miejsc stawiamy jedną z 4 cyfr parzystych różnych od zera: mamy 4^9 możliwości.

Odpowiedź. Łącznie mamy zatem $10 \cdot 5 \cdot 4^9 = 13107200$ liczb.

3. Ile jest liczb dziesięciocyfrowych, w których zapisie występuje dokładnie jedna cyfra parzysta?

Rozwiązanie. To zadanie jest trudniejsze od poprzednich. Problem polega na tym, że na pierwszym miejscu nie może stać zero. Będziemy musieli zatem rozważać kilka przypadków i zastosować regułę dodawania. Pokażę trzy sposoby rozwiązania tego zadania.

Sposób pierwszy polega na wykorzystaniu wyniku zadania 1. Z zadania 1 wiemy, że istnieje $10 \cdot 4 \cdot 5^9$ liczb dziesięciocyfrowych, w których występuje dokładnie jedna cyfra parzysta różna od zera. Do tego wyniku dodamy teraz liczbę tych liczb dziesięciocyfrowych, w których występuje dokładnie jedno zero i 9 cyfr nieparzystych. Miejsce dla zera wybieramy na 9 sposobów. Pozostałe 9 wolnych miejsc zapełniamy cyframi nieparzystymi na 5^9 sposobów.

Odpowiedź. Łącznie mamy zatem $10 \cdot 4 \cdot 5^9 + 9 \cdot 5^9 = 49 \cdot 5^9 = 95703125$ liczb.

Sposób drugi polega na rozpatrzeniu dwóch przypadków, w zależności od tego, jaka cyfra stoi na pierwszym miejscu. Przypuśćmy najpierw, że na pierwszym miejscu stoi cyfra parzysta. Wybieramy ją na 4 sposoby (jest różna od zera). Na każdym z pozostałych 9 miejsc stawiamy jedną z pięciu cyfr nieparzystych; możemy to zrobić na 5^9 sposobów. W tym przypadku mamy zatem $4 \cdot 5^9$ liczb. Przypuśćmy teraz, że na pierwszym miejscu stoi cyfra nieparzysta. Miejsce dla cyfry parzystej wybieramy zatem na 9 sposobów. Tę cyfrę wybieramy na 5 sposobów. Wreszcie na każdym z pozostałych 9 miejsc (łącznie z pierwszym) stawiamy jedną z pięciu cyfr nieparzystych. Możemy to zrobić na $9 \cdot 5 \cdot 5^9$ sposobów. Otrzymane liczby dodajemy.

Odpowiedź. Łącznie mamy zatem $4 \cdot 5^9 + 9 \cdot 5 \cdot 5^9 = 49 \cdot 5^9 = 95703125$ liczb.

Trzeci sposób polega na policzeniu wszystkich „liczb”, w tym także liczb „złych”, tzn. zaczynających się od zera. Taką „złą” liczbą, spełniającą warunki zadania, jest na przykład 0133157193. Następnie odejmiemy liczbę właśnie tych „złych” liczb. Zliczamy zatem najpierw wszystkie „liczby”. Miejsce dla cyfry parzystej możemy wybrać na 10 sposobów, tę cyfrę na 5 sposobów. Następnie na każdym z 9 pozostałych miejsc stawiamy jedną z pięciu cyfr nieparzystych; możemy to zrobić na 5^9 sposobów. Mamy zatem $10 \cdot 5 \cdot 5^9$ wszystkich „liczb”. Liczba „zła” ma na początku zero. To jest jej jedyna cyfra parzysta. Mamy zatem 5^9 takich liczb. Teraz otrzymane liczby odejmujemy.

Odpowiedź. Mamy zatem $10 \cdot 5 \cdot 5^9 - 5^9 = 49 \cdot 5^9 = 95703125$ liczb.

4. Ile jest liczb dziesięciocyfrowych, w których zapisie występuje dokładnie jedna cyfra nieparzysta?

Rozwiązanie. Tym razem pokażę dwa sposoby rozwiązania zadania.

Sposób pierwszy polega na rozważeniu dwóch przypadków w zależności od tego, jaka cyfra stoi na pierwszym miejscu. Przypuśćmy najpierw, że na pierwszym miejscu stoi cyfra nieparzysta. Tę cyfrę wybieramy na 5 sposobów, a następnie na każdym z 9 wolnych miejsc ustawiamy dowolną cyfrę parzystą. Takich liczb mamy zatem $5 \cdot 5^9 = 5^{10}$.

Teraz zliczamy liczby, w których na pierwszym miejscu stoi cyfra parzysta. Miejsce dla jedynej cyfry nieparzystej wybieramy zatem na jeden z 9 sposobów, cyfrę nieparzystą zaś na jeden z 5 sposobów. Następnie na pierwszym miejscu stawiamy jedną z czterech cyfr parzystych różnych od zera i na każdym z pozostałych 8 miejsc stawiamy jedną z 5 cyfr parzystych. Takich liczb mamy zatem $9 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 5^8 = 36 \cdot 5^9$.

Odpowiedź. Łącznie mamy zatem $5^{10} + 36 \cdot 5^9 = 41 \cdot 5^9 = 80078125$ liczb.

Nieco inne sformułowanie tego zadania polega na tym, że rozważane dwa przypadki definiujemy inaczej. W przypadku pierwszym zliczamy liczby, w których jedyna cyfra nieparzysta stoi na pierwszym miejscu, w przypadku drugim te liczby, w których ta cyfra nieparzysta stoi na którymś z dalszych miejsc.

Drugi sposób rozwiązania polega na tym, by policzyć najpierw także „złe liczby”, a potem od otrzymanego wyniku odjąć liczbę tych „złych liczb”. Najpierw wszystkie „liczby”: cyfrę nieparzystą ustawiamy na jednym z 10 miejsc, tę cyfrę wybieramy na jeden z 5 sposobów, pozostałe miejsca zapełniamy cyframi parzystymi na 5^9 sposobów. Łącznie mamy

zatem $10 \cdot 5 \cdot 5^9$ „liczb”. Teraz odejmujemy „liczby” zaczynające się od zera. Cyfrę nieparzystą ustawiamy na jednym z 9 miejsc, tę cyfrę wybieramy na jeden z pięciu sposobów. Wreszcie na pozostałych ośmiu miejscach stawiamy cyfry parzyste. Mamy 5^8 możliwości. W tym przypadku mamy $9 \cdot 5 \cdot 5^8$ „złych” liczb.
Odpowiedź. Ostatecznie mamy zatem $10 \cdot 5 \cdot 5^9 - 9 \cdot 5 \cdot 5^9 = 41 \cdot 5^9 = 80078125$ liczb.

W tym miejscu warto zastanowić się, dlaczego nie podałem rozwiązania podobnego do drugiego sposobu poprzedniego zadania, tzn. rozwiązania wykorzystującego wynik zadania 2. Otóż w zadaniu 2 obliczyliśmy, ile jest poszukiwanych liczb, w których nie występuje cyfra zero. Teraz musielibyśmy policzyć te liczby, w których występuje co najmniej jedno zero. W zadaniu poprzednim mieliśmy tylko jedną cyfrę parzystą. Musieliśmy zatem policzyć liczby z dokładnie jednym zerem. To jest ogromna różnica. Problem ze zliczaniem liczb, w których występuje co najmniej jedna dana cyfra (na przykład co najmniej jedno zero lub co najmniej jedna dziewiątka), omówiłem w rozdziale o kombinatoryce i rachunku prawdopodobieństwa. Pokazałem 5 sposobów rozwiązania zadania 8 (ile jest nieparzystych liczb naturalnych trzycyfrowych, w których co najmniej jedna cyfra jest dziewiątką). Niektóre pokazane tam sposoby rozwiązania w obecnym zadaniu będą całkowicie nieprzydatne, gdyż liczba zer może być duża. Pozostanie tak naprawdę jeden sposób rozwiązania, sprowadzający się do pokazanego wyżej sposobu drugiego.

Czytelnik cierpliwy, który jednak zechce zliczyć oddzielnie liczby mające co najmniej jedno zero, może spróbować jeszcze innego sposobu polegającego na rozpatrywaniu przypadków w zależności od miejsca, na którym występuje pierwsze (licząc od lewej strony) zero.

- Na pierwszym miejscu nie może być zera. Pierwsze zero może zatem stać na drugim miejscu. Pozostawię jako ćwiczenie sprawdzenie, że takich liczb jest $37 \cdot 5^8$.
- Liczb, w których pierwsze zero jest na trzecim miejscu, jest $152 \cdot 5^7$.
- I tak dalej; szczegóły obliczeń pozostawię jako ćwiczenie.

Ogólnie: liczb, w których pierwsze zero jest na miejscu $k+1$ (gdzie $k = 1, 2, \ldots, 9$) oraz jedyna cyfra nieparzysta poprzedza to pierwsze zero, jest $5k \cdot 4^{k-1} \cdot 5^{9-k}$. Natomiast liczb, w których pierwsze zero jest na miejscu $k+1$ i jest poprzedzone wyłącznie cyframi parzystymi, jest $4(9-k) \cdot 4^{k-1} \cdot 5^{9-k}$. Łącznie zatem liczb, w których pierwsze zero jest na miejscu $k+1$, jest $4^{k-1} \cdot 5^{9-k} \cdot (k+36)$. Stąd wynika, że wszystkich liczb, w których występuje co najmniej jedno zero, jest

$$\sum_{k=1}^{9} \left(4^{k-1} \cdot 5^{9-k} \cdot (k+36)\right) = 66970925.$$

Po dodaniu wyniku zadania 2, otrzymamy znany wynik:

$$66970925 + 13107200 = 80078125.$$

5. Ile jest liczb dziesięciocyfrowych, w których zapisie nie występuje zero i każda cyfra parzysta różna od zera występuje dokładnie jeden raz?

Rozwiązanie. Najpierw wybieramy miejsce dla dwójki: mamy 10 możliwości. Potem wybieramy miejsce dla czwórki. Mamy 9 możliwości: czwórka może stać na każdym miejscu z wyjątkiem miejsca zajętego przez dwójkę. Potem wybieramy miejsce dla szóstki. Tym razem mamy 8 możliwości — szóstka może stać na każdym miejscu z wyjątkiem obu miejsc zajętych przez dwójkę i czwórkę. Podobnie przy wyborze miejsca dla ósemki mamy 7 możliwości. Łącznie — cyfry parzyste możemy ustawić na czterech miejscach na $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7$ sposobów.

Następnie zauważamy, że mamy sześć wolnych miejsc i na każdym może stać dowolna cyfra nieparzysta. Na każdym miejscu możemy zatem ustawić cyfrę nieparzystą na 5 sposobów. Stąd wynika, że mamy łącznie 5^6 sposobów ustawienia cyfr nieparzystych.

Odpowiedź. To łącznie daje $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 5^6 = 78750000$ liczb.

6. Ile jest liczb dziesięciocyfrowych, w których zapisie nie występuje zero i każda cyfra nieparzysta występuje dokładnie jeden raz?

Rozwiązanie. Będziemy naśladować rozwiązanie poprzedniego zadania. Najpierw wybieramy miejsca dla cyfr nieparzystych. Jedynkę możemy ustawić na 10 sposobów, trójkę na 9 sposobów, piątkę na 8 sposobów, siódemkę na 7 sposobów i dziewiątkę na 6 sposobów. Łącznie mamy zatem $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6$ sposobów ustawienia cyfr nieparzystych. Teraz mamy 5 wolnych miejsc i na każdym z nich możemy ustawić dowolną cyfrę parzystą, różną od zera. Mamy 4^5 możliwości ustawienia cyfr parzystych.

Odpowiedź. Łącznie mamy zatem $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 4^5 = 30965760$ liczb.

7. Ile jest liczb dziesięciocyfrowych, w których zapisie każda cyfra parzysta występuje dokładnie jeden raz?

Rozwiązanie. Najpierw wybieramy miejsce dla zera — mamy 9 możliwości, gdyż zero nie może stać na pierwszym miejscu. Potem wybieramy miejsce dla dwójki. Mamy także 9 możliwości — dwójka może stać na każdym miejscu z wyjątkiem miejsca zajętego przez zero. Potem wybieramy miejsce dla czwórki. Tym razem mamy 8 możliwości — czwórka może stać na każdym miejscu z wyjątkiem obu miejsc zajętych przez zero i dwójkę. Podobnie przy wyborze miejsca dla szóstki — mamy 7 możliwości i przy wyborze miejsca dla ósemki — mamy 6 możliwości. Łącznie — cyfry parzyste możemy ustawić na pięciu miejscach na $9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6$ sposobów.

Następnie zauważamy, że mamy pięć wolnych miejsc i na każdym może stać dowolna cyfra nieparzysta. Na każdym miejscu możemy zatem ustawić cyfrę nieparzystą na 5 sposobów. Stąd wynika, że mamy łącznie 5^5 sposobów ustawienia cyfr nieparzystych.

Odpowiedź. To łącznie daje $9^2 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5^5 = 85050000$ liczb.

8. Ile jest liczb dziesięciocyfrowych, w których zapisie każda cyfra nieparzysta występuje dokładnie jeden raz?

Rozwiązanie. Spróbujmy naśladować rozwiązanie poprzedniego zadania. Najpierw wybieramy miejsca dla cyfr nieparzystych. Jedynkę możemy ustawić na 10 sposobów, trójkę na 9 sposobów, piątkę na 8 sposobów, siódemkę na 7 sposobów i dziewiątkę na 6 sposobów. Łącznie mamy zatem $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6$ sposobów ustawienia cyfr nieparzystych. Teraz mamy 5 wolnych miejsc i chcielibyśmy na każdym z nich móc ustawić dowolną cyfrę parzystą. Tu jednak dostrzegamy znany nam już kłopot — nie wiemy, czy pierwsze miejsce jest zajęte czy wolne. Jeśli jest już zajęte, to na każdym z wolnych miejsc możemy postawić dowolną cyfrę parzystą. Jeśli jest wolne, to na nim nie możemy postawić zera. W tym miejscu rozwiązanie się komplikuje. Pokażę dwa sposoby ominięcia tej trudności.

Sposób I. W tym sposobie nie będziemy przejmować się tym, że na pierwszym miejscu wystąpi zero. Zatem rozmieszczamy cyfry nieparzyste tak jak wyżej: mamy $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6$ sposobów wyboru miejsc dla cyfr nieparzystych. Zostało 5 wolnych miejsc i na każdym z nich możemy postawić dowolną cyfrę parzystą. Cyfry parzyste możemy ustawić na 5^5 sposobów. Łącznie mamy zatem $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5^5$ „liczb”.

Ale w ten sposób policzyliśmy także „liczby” z zerem na początku, na przykład „liczbę” 0345401789. Musimy od otrzymanego wyniku odjąć liczbę takich „złych liczb”. Zliczamy zatem liczby z zerem na początku, w których każda cyfra nieparzysta wystąpi dokładnie jeden raz. Miejsce dla jedynki wybieramy tym razem na 9 sposobów (pierwsze miejsce jest zajęte przez zero). Miejsce dla trójki wybieramy na 8 sposobów i tak dalej. Łącznie miejsca dla cyfr nieparzystych wybieramy na $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5$ sposobów. Teraz mamy cztery miejsca wolne (pięć miejsc zajęły cyfry nieparzyste, pierwsze miejsce jest zajęte przez zero). Te cztery miejsca zapełniamy cyframi parzystymi na 5^5 sposobów — na każdym miejscu może stać dowolna z pięciu cyfr parzystych. Mamy więc $9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot5^4 = 9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5^5$ „złych liczb”.

Otrzymane wyniki odejmujemy, trzymując szukaną liczbę liczb „dobrych”:

$$10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5^5 - 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5^5 = (10-1) \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5^5 = 9^2 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5^5.$$

Okazuje się, że w zadaniach 7 i 8 otrzymaliśmy tę samą odpowiedź. Czy jest to przypadek? Zanim odpowiemy sobie na to pytanie, popatrzmy na drugi sposób rozwiązania i na następne dwa zadania.

Sposób II. Tym razem oddzielnie zliczamy ustawienia, w których na pierwszym miejscu stoi cyfra nieparzysta i w których na pierwszym miejscu stoi cyfra parzysta. Potem otrzymane liczby dodajemy. Najpierw zliczamy liczby, w których na pierwszym miejscu stoi cyfra nieparzysta. Tę cyfrę wybieramy na jeden z pięciu sposobów. Następne cztery cyfry nieparzyste ustawiamy na czterech miejscach na $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6$ sposobów. Wreszcie pięć cyfr parzystych na pięciu wolnych miejscach ustawiamy na 5^5 sposobów. Łącznie takich liczb mamy $5 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5^5 = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5^6$.

Teraz liczby, w których na pierwszym miejscu stoi cyfra parzysta. Zaczynamy od rozmieszczenia cyfr nieparzystych, pamiętając o tym, żeby pierwsze miejsce pozostawić wolne. Te cyfry możemy rozmieścić na $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5$ sposobów. Pozostało 5 wolnych miejsc, w tym pierwsze miejsce. Na tym miejscu może stać jedna z czterech cyfr parzystych, na każdym z pozostałych jedna z pięciu cyfr parzystych. Łącznie mamy zatem $4\cdot5^4$ sposobów umieszczenia cyfr parzystych. To daje $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 5^4 = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 5^5$ liczb.

Teraz dodajemy liczby otrzymane w dwóch przypadkach:

$$9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5^6 + 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 5^5 = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5^5 \cdot (5+4) = 9^2 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5^5.$$

Otrzymaliśmy tę samą odpowiedź, co w sposobie I.

9. Ile jest liczb dwunastocyfrowych, w których zapisie każda cyfra parzysta występuje dokładnie jeden raz?

Rozwiązanie. Najpierw wybieramy miejsce dla zera — mamy 11 możliwości, gdyż zero nie może stać na pierwszym miejscu. Potem wybieramy miejsce dla dwójki. Mamy także 11 możliwości — dwójka może stać na każdym miejscu z wyjątkiem miejsca zajętego przez zero. Potem wybieramy miejsce dla czwórki. Tym razem mamy 10 możliwości — czwórka może stać na każdym miejscu z wyjątkiem obu miejsc zajętych przez zero i dwójkę. Podobnie przy wyborze miejsca dla szóstki — mamy 9 możliwości i przy wyborze miejsca dla ósemki — mamy 8 możliwości. Łącznie — cyfry parzyste możemy ustawić na pięciu miejscach na $11 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8$ sposobów.

Następnie zauważamy, że mamy siedem wolnych miejsc i na każdym z nich może stać dowolna cyfra nieparzysta. Na każdym miejscu możemy zatem ustawić cyfrę nieparzystą na 5 sposobów. Stąd wynika, że mamy 5^7 sposobów ustawienia cyfr nieparzystych. To łącznie daje $11^2 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 5^7 = 6806250000$ liczb.

10. Ile jest liczb dwunastocyfrowych, w których zapisie każda cyfra nieparzysta występuje dokładnie jeden raz?

Rozwiązanie. Powtórzymy oba sposoby rozwiązania zadania 8.

Sposób I. W tym sposobie nie będziemy przejmować się tym, że na pierwszym miejscu wystąpi zero. Zatem rozmieszczamy cyfry nieparzyste na $12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8$ sposobów. Zostało 7 wolnych miejsc i na każdym z nich możemy postawić dowolną cyfrę parzystą. Cyfry parzyste możemy ustawić na 5^7 sposobów. Łącznie mamy zatem $12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 5^7$ liczb.

Tak jak w zadaniu 2, policzyliśmy także „liczby" z zerem na początku. Musimy zatem od otrzymanego wyniku odjąć liczbę takich „złych liczb". Zliczamy zatem liczby z zerem na początku, w których każda cyfra nieparzysta wystąpi dokładnie jeden raz. Miejsce dla jedynki wybieramy tym razem na 11 sposobów (pierwsze miejsce jest zajęte przez zero). Miejsce dla trójki wybieramy na 10 sposobów i tak dalej. Łącznie miejsca dla cyfr nieparzystych wybieramy na $11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7$ sposobów. Teraz mamy sześć miejsc wolnych (pięć miejsc zajęły cyfry nieparzyste, pierwsze miejsce jest zajęte przez zero). Te sześć miejsc zapełniamy cyframi parzystymi na 5^6 sposobów — na każdym miejscu może stać dowolna z pięciu cyfr parzystych. Tak więc łącznie mamy $11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 5^6$ „złych liczb".

Ostatecznie szukana liczba liczb „dobrych" jest równa

$$12{\cdot}11{\cdot}10{\cdot}9{\cdot}8{\cdot}5^7 - 11{\cdot}10{\cdot}9{\cdot}8{\cdot}7{\cdot}5^6 = (12{\cdot}5-7){\cdot}11{\cdot}10{\cdot}9{\cdot}8{\cdot}5^6 = 53{\cdot}11{\cdot}10{\cdot}9{\cdot}8{\cdot}5^6 = 6558750000.$$

Okazuje się, że tym razem w zadaniach 9 i 10 otrzymaliśmy różne odpowiedzi. Widzimy zatem, że w zadaniach 7 i 8 był to przypadek. Wyjaśnię go po pokazaniu drugiego sposobu rozwiązania.

Sposób II. Tym razem oddzielnie zliczymy ustawienia, w których na pierwszym miejscu stoi cyfra nieparzysta i w których na pierwszym miejscu stoi cyfra parzysta. Potem otrzymane liczby dodamy. Najpierw zliczamy liczby, w których na pierwszym miejscu stoi cyfra nieparzysta. Tę cyfrę wybieramy na jeden z pięciu sposobów. Następne cztery cyfry nieparzyste ustawiamy na czterech miejscach na $11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8$ sposobów. Wreszcie pięć cyfr parzystych na siedmiu wolnych miejscach ustawiamy na 5^7 sposobów. Łącznie mamy $5 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 5^7 = 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 5^8$ takich liczb.

Teraz rozpatrujemy liczby, w których na pierwszym miejscu stoi cyfra parzysta. Zaczynamy od rozmieszczenia cyfr nieparzystych, pamiętając o tym, żeby pierwsze miejsce pozostawić wolne. Te cyfry możemy rozmieścić na $11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7$ sposobów. Pozostało 5 wolnych miejsc, w tym pierwsze miejsce. Na pierwszym miejscu może stać jedna z czterech cyfr parzystych, na każdym z pozostałych jedna z pięciu cyfr parzystych. Łącznie mamy zatem $4 \cdot 5^6$ sposobów umieszczenia cyfr parzystych. To daje $11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 4 \cdot 5^6$ liczb.

Teraz dodajemy liczby otrzymane w dwóch przypadkach:

$$11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 5^8 + 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 4 \cdot 5^6 = 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 5^6 \cdot (5 \cdot 5 + 4 \cdot 7) = 53 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 5^6.$$

Otrzymaliśmy tę samą odpowiedź, co w sposobie I.

Uwaga. Dlaczego w zadaniach 7 i 8 otrzymaliśmy tę samą odpowiedź? Zdefiniujmy dwa zbiory:

- zbiór P składa się ze wszystkich liczb dziesięciocyfrowych, w których każda cyfra parzysta występuje dokładnie jeden raz;
- zbiór N składa się ze wszystkich liczb dziesięciocyfrowych, w których każda cyfra nieparzysta występuje dokładnie jeden raz.

Teraz każdą liczbę dziesięciocyfrową, z wyjątkiem liczb zaczynających się cyfrą 1, łączymy w parę z liczbą utworzoną w następujący sposób:

- każdą cyfrę parzystą danej liczby zwiększamy o 1;
- każdą cyfrę nieparzystą danej liczby zmniejszamy o 1.

Na przykład liczbę 2310558230 łączymy w parę z liczbą 3201449321. Nietrudno zauważyć, że każda liczba (z wyjątkiem liczb zaczynających się cyfrą 1) jest w parze z dokładnie jedną liczbą różną od niej. Zauważmy także, że jeśli liczba należy do zbioru P, to liczba, z którą jest w parze, należy do zbioru N i na odwrót. To pokazuje, że w zbiorach P i N jest tyle samo liczb zaczynających się cyfrą różną od 1. Sprawdzimy teraz, czy jest też tyle samo liczb zaczynających się cyfrą 1. Nietrudno zauważyć, że w zbiorze P jest $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 5^4$ takich liczb, a w zbiorze N jest ich $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5^5$. Te dwie liczby są oczywiście równe. Ogólnie — przypuśćmy, że mamy daną liczbę naturalną $n \geq 5$ i definiujemy następujące dwa zbiory:

- zbiór P_n składa się ze wszystkich liczb n-cyfrowych, zaczynających się cyfrą 1, w których każda cyfra parzysta występuje dokładnie jeden raz;
- zbiór N_n składa się ze wszystkich liczb n-cyfrowych, zaczynających się cyfrą 1, w których każda cyfra nieparzysta występuje dokładnie jeden raz.

W zbiorze P_n znajduje się

$$(n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot (n-4) \cdot (n-5) \cdot 5^{n-6}$$

liczb. W zbiorze N_n znajduje się

$$(n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot (n-4) \cdot 5^{n-5}$$

liczb. Oczywiście

$$(n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot (n-4) \cdot (n-5) \cdot 5^{n-6} = (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot (n-4) \cdot 5^{n-5}$$

wtedy i tylko wtedy, gdy $n-5=5$, tzn. wtedy i tylko wtedy, gdy $n=10$.

11. Na okręgu wybrano n punktów i poprowadzono wszystkie cięciwy o końcach w tych punktach. Ile jest takich cięciw?

Rozwiązanie. Zauważmy, że z każdego punktu wychodzi $n-1$ cięciw. Mamy zatem $n \cdot (n-1)$ cięciw. Należy jednak zwrócić uwagę na to, że każdą cięciwę policzyliśmy dwukrotnie. Na przykład cięciwę AB policzyliśmy raz jako cięciwę wychodzącą z punktu A i drugi raz jako cięciwę wychodzącą z punktu B. Inaczej mówiąc, zliczaliśmy końce cięciw — a każda cięciwa ma dwa końce. Otrzymany wynik musimy zatem podzielić przez 2, otrzymując ostatecznie liczbę $\frac{n(n-1)}{2}$ cięciw.

12. W turnieju szachowym uczestniczy n graczy. Każdy gracz gra dokładnie jedną grę z każdym innym. W każdej grze gracz, który wygrał, otrzymuje 1 punkt. Gracz, który przegrał, otrzymuje 0 punktów. W przypadku remisu obaj gracze dostają po pół punktu. Ile wynosi suma punktów zdobytych przez wszystkich graczy po zakończeniu turnieju?

Rozwiązanie. W każdej grze obaj gracze otrzymują łącznie 1 punkt. Zatem szukana suma jest równa liczbie rozegranych gier. Tak jak w poprzednim zadaniu, stwierdzamy, że każdy gracz rozegrał $n-1$ gier, a więc łączna liczba gier jest równa $\frac{n(n-1)}{2}$.

13. Udowodnij, że

$$1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}.$$

Rozwiązanie. Popatrzmy na turniej, w którym uczestniczy $n+1$ graczy. Z poprzedniego zadania wynika, że łączna liczba rozegranych gier jest równa $\frac{n(n+1)}{2}$. Tyle też jest równa łączna liczba punktów zdobytych przez wszystkich graczy, niezależnie od wyników poszczególnych gier. Teraz ustawmy graczy w szeregu:

$$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, x_{n+1}.$$

Będziemy zliczać wszystkie gry w następujący sposób. Przypuśćmy, że gracz x_i wygrał z graczem x_j wtedy i tylko wtedy, gdy $i<j$. Wówczas:

- gracz x_1 zdobył n punktów,
- gracz x_2 zdobył $n-1$ punktów,
- gracz x_3 zdobył $n-2$ punkty,
- ...
- gracz x_n zdobył 1 punkt,
- gracz x_{n+1} zdobył 0 punktów.

Dodając liczby punktów zdobytych przez poszczególnych graczy i korzystając z poprzedniego zadania, otrzymujemy żądany wzór.

Uwaga. Otrzymany wzór ma wiele zastosowań. Istnieją też inne sposoby udowodnienia tego wzoru. Jeden z nich polega na wypisaniu liczb od 1 do n dwukrotnie, raz w kolejności rosnącej, drugi raz w kolejności malejącej:

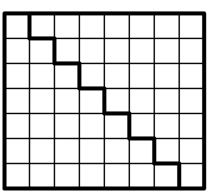
$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & \ldots & n-2 & n-1 & n \\ n & n-1 & n-2 & \ldots & 3 & 2 & 1 \end{array}$$

Zauważmy, że suma liczb w każdej kolumnie jest równa $n+1$. Zatem suma wszystkich wypisanych liczb jest równa $n\cdot(n+1)$ (liczba kolumn pomnożona przez sumę w każdej kolumnie). Oznaczmy szukaną sumę przez S:

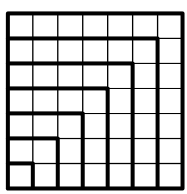
$$S=1+2+\ldots+n.$$

Wtedy $2S=n(n+1)$, skąd $S=\frac{n(n+1)}{2}$.

Ten sposób ma ładną interpretację geometryczną (na rysunku 20.31 — dla $n=7$).



Rys. 20.31



Rys. 20.32

Inny dowód polega na zastosowaniu wzoru skróconego mnożenia:

$$\begin{array}{ccccccc}
(1+1)^2 & = & 1^2 & + & 2\cdot 1\cdot 1 & + & 1^2\\
(2+1)^2 & = & 2^2 & + & 2\cdot 2\cdot 1 & + & 1^2\\
(3+1)^2 & = & 3^2 & + & 2\cdot 3\cdot 1 & + & 1^2\\
\dots & & & & \dots & & \\
(n+1)^2 & = & n^2 & + & 2\cdot n\cdot 1 & + & 1^2
\end{array}$$

Dodajmy teraz otrzymane równości kolumnami:

$$(2^2+3^2+\ldots+n^2)+(n+1)^2 = 1^2+(2^2+3^2+\ldots+n^2)+2\cdot(1+2+3+\ldots+n)+n\cdot 1^2,$$

$$(n+1)^2 = 1^2+2\cdot S+n.$$

Stąd

$$2S = (n+1)^2-n-1 = n^2+2n+1-n-1 = n^2+n = n(n+1).$$

Po podzieleniu obu stron przez 2, otrzymujemy znany wzór.

Z tego wzoru wynikają łatwo dwa inne ważne wzory. Najpierw wzór na sumę n początkowych liczb parzystych:

$$2+4+6+\ldots+(2n) = 2\cdot(1+2+3+\ldots+n) = 2\cdot\frac{n(n+1)}{2} = n(n+1).$$

Następnie wzór na sumę n początkowych liczb nieparzystych:

$$\begin{aligned}
1+3+5+\ldots+(2n-1) &= (2\cdot 1-1)+(2\cdot 2-1)+(2\cdot 2-1)+\ldots+(2\cdot n-1) =\\
&= 2\cdot(1+2+3+\ldots+n)-n\cdot 1 = 2\cdot\frac{n(n+1)}{2}-n =\\
&= n(n+1)-n = n^2+n-n = n^2.
\end{aligned}$$

Ostatni wzór także ma ładną interpretację geometryczną (na rysunku 20.32 dla $n=7$).

14. Ile jest liczb dziesięciocyfrowych o sumie cyfr równej 2?

Rozwiązanie. Jedną z takich liczb jest 2000000000. Następne 9 liczb otrzymujemy w następujący sposób: 1000000001, 1000000010, 1000000100, ..., 1100000000. Łącznie mamy zatem 10 takich liczb.

15. Ile jest liczb dziesięciocyfrowych o sumie cyfr równej 3?

Rozwiązanie. Jedną z takich liczb jest 3000000000. Następne 18 liczb otrzymamy w następujący sposób:

2000000001, 2000000010, 2000000100, ..., 2100000000,
1000000002, 1000000020, 1000000200, ..., 1200000000.

Wreszcie ostatnie $\frac{9\cdot 8}{2}=36$ liczb otrzymamy stawiając na pierwszym miejscu jedynkę i wybierając z pozostałych dziewięciu miejsc dwa na następne dwie jedynki. Pozostałe miejsca zapełniamy zerami. Te liczby możemy wypisać w następującej kolejności:

- najpierw mamy 8 liczb zaczynających się od dwóch jedynek

  1100000001, 1100000010, 1100000100, ..., 1110000000;

- następnie mamy 7 liczb zaczynających się od cyfr 101

$$1010000001, \quad 1010000010, \quad 1010000100, \quad \ldots, \quad 1011000000;$$

- następnie mamy 6 liczb zaczynających się od cyfr 1001

$$1001000001, \quad 1001000010, \quad 1001000100, \quad \ldots, \quad 1001100000;$$

- i tak dalej
- aż wreszcie mamy 2 liczby zaczynające się od cyfr 10000001

$$1000000101, \quad 1000000110$$

- i jakp ostatnią, liczbę 1000000011.

Łącznie mamy $1+2+3+4+5+6+7+8 = \frac{8\cdot 9}{2} = 36$ liczb z trzema jedynkami. Wszystkich liczb o sumie 3 mamy zatem $1 + 18 + 36 = 55$.

16. Ile jest liczb n-cyfrowych o sumie cyfr równej 2?

Rozwiązanie. Jedną z tych liczb jest $2\underbrace{00\ldots0}_{n-1}$. Pozostałe $n-1$ liczb otrzymujemy stawiając na pierwszym miejscu jedynkę, wybierając na $n-1$ sposobów miejsce na drugą jedynkę i wypełniając wolne miejsca zerami. Łącznie mamy zatem n takich liczb.

17. Ile jest liczb n-cyfrowych o sumie cyfr równej 3?

Rozwiązanie. Jedną z takich liczb jest $3\underbrace{00\ldots0}_{n-1}$. Następne $n-1$ liczb otrzymamy stawiając na pierwszym miejscu cyfrę 2, wybierając na $n-1$ sposobów miejsce na jedynkę i wypełniając pozostałe miejsca zerami. Jeśli zamienimy teraz jedynkę z dwójką, to otrzymamy kolejne $n-1$ liczb. Wreszcie ostatnie $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ liczby otrzymamy stawiając na pierwszym miejscu jedynkę, wybierając spośród następnych $n-1$ miejsc dwa miejsca na jedynki i wypełniając pozostałe miejsca zerami. Takich liczb jest więc

$$1 + 2(n-1) + \frac{(n-1)(n-2)}{2} = \frac{2 + 4(n-1) + (n-1)(n-2)}{2} =$$
$$= \frac{2 + 4n - 4 + n^2 - 2n - n + 2}{2} = \frac{n^2+n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}.$$

18. Ile jest liczb dziesięciocyfrowych, w których zapisie nie występuje zero i występują dokładnie dwie cyfry parzyste?

Rozwiązanie. Najpierw z dziesięciu miejsc wybieramy dwa miejsca na cyfry parzyste. Możemy to zrobić na $\frac{10\cdot 9}{2} = 45$ sposobów. Następnie na tych dwóch miejscach umieszczamy dwie cyfry parzyste: na każdym jedną z czterech cyfr. Możemy to zrobić na 4^2 sposobów. Wreszcie na pozostałych ośmiu miejscach ustawiamy cyfry nieparzyste — możemy to zrobić na 5^8 sposobów. Łącznie mamy $45 \cdot 4^2 \cdot 5^8 = 281250000$ liczb.

19. Ile jest liczb dziesięciocyfrowych, w których zapisie nie występuje zero i występują dokładnie dwie cyfry nieparzyste?

Rozwiązanie. Tak jak w zadaniu poprzednim, miejsca na cyfry nieparzyste wybieramy na 45 sposobów. Następnie dwie cyfry nieparzyste ustawiamy na tych miejscach na 5^2

sposobów. Wreszcie na każdym z ośmiu wolnych miejsc stawiamy jedną z czterech cyfr parzystych różnych od zera. Możemy to zrobić na 4^8 sposobów. Łącznie mamy zatem $45 \cdot 5^2 \cdot 4^8 = 73728000$ liczb.

20. Ile jest liczb dziesięciocyfrowych, w których zapisie występują dokładnie dwie cyfry parzyste?

Rozwiązanie. W tym zadaniu znów mamy problem związany z zerem na pierwszym miejscu. Najpierw wybieramy dwa miejsca na cyfry parzyste i ustawiamy dwie cyfry na wybranych miejscach. Tu mamy dwa przypadki. Jeśli wybierzemy dwa miejsca oprócz pierwszego (na $\frac{9 \cdot 8}{2} = 36$ sposobów), to na tych miejscach możemy ustawić cyfry parzyste na $5^2 = 25$ sposobów. Jeśli natomiast wybierzemy pierwsze miejsce (i jakieś inne) — tu mamy 9 sposobów wyboru miejsc, to na tych miejscach możemy ustawić cyfry parzyste na $4 \cdot 5 = 20$ sposobów. Łącznie mamy $36 \cdot 25 + 9 \cdot 20 = 1080$ sposobów ustawienia cyfr parzystych. Teraz ustawiamy 8 cyfr nieparzystych na 5^8 sposobów.

Łącznie mamy $1080 \cdot 5^8 = 421875000$ liczb.

21. Ile jest liczb dziesięciocyfrowych, w których zapisie występują dokładnie dwie cyfry nieparzyste?

Rozwiązanie. W tym zadaniu także musimy zmierzyć się z problemem zera na pierwszym miejscu.

Najpierw, w pierwszym przypadku, wybieramy dwa miejsca (oprócz pierwszego) dla liczb nieparzystych. Możemy to zrobić na 36 sposobów. Następnie na tych miejscach ustawiamy dwie cyfry nieparzyste. Możemy to zrobić na $5^2 = 25$ sposobów. Wreszcie cyfry parzyste ustawiamy na $4 \cdot 5^7$ spsosobów. Łącznie mamy $36 \cdot 5^2 \cdot 4 \cdot 5^7 = 144 \cdot 5^9$ liczb.

Następnie, w drugim przypadku, wybieramy dla cyfr nieparzystych miejsce pierwsze i jeszcze jakieś inne miejsce. Możemy to zrobić na 9 sposobów. Teraz na tych dwóch miejscach ustawiamy cyfry nieparzyste na 5^2 sposobów. Teraz cyfry parzyste możemy ustawić na 5^8 sposobów. W tym przypadku mamy łącznie $9 \cdot 5^2 \cdot 5^8 = 45 \cdot 5^9$ liczb.

Dodając wyniki otrzymane w obu przypadkach, dostajemy $189 \cdot 5^8 = 73828125$ liczb.

22. Prostokąt o wymiarach 10×1 podzielono na 10 kwadratów. W każdy z tych kwadratów chcemy wpisać jedną liczbę: 1, 2 lub 3. Chcemy przy tym, by każda liczba wystąpiła co najmniej jeden raz. Ponadto chcemy, by wpisane liczby tworzyły ciąg niemalejący, tzn. wszystkie liczby 1 mają znajdować się na lewo od liczb 2 i wszystkie liczby 3 mają występować na prawo od liczb 2. Jeden przykład takiego wpisania liczb widzimy na rysunku 20.16:

1	1	1	1	1	2	2	3	3	3

Rys. 20.16

Na ile sposobów można wpisać te liczby do naszego prostokąta, spełniając powyższe warunki?

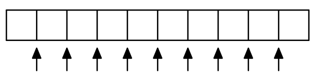
Rozwiązanie. Pierwszy sposób rozwiązania polega na zliczaniu sposobów wpisania liczb w zależności od liczby wpisanych jedynek. Jeśli wpiszemy jedną jedynkę, to będziemy mieli 8 sposobów wpisania dwójek: musimy wpisać co najmniej jedną dwójkę i możemy wpisać co najwyżej 8 dwójek, by zostawić co najmniej jedno miejsce dla trójek. Jeśli wpiszemy dwie jedynki, to będziemy mieli 7 sposobów wpisania dwójek i tak dalej. Łączna liczba sposobów wpisania liczb jest zatem równa

$$8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 36.$$

Te wszystkie sposoby wpisania liczb możemy wypisać:

1 :	1	2	3	3	3	3	3	3	3	3	19 :	1	1	1	2	2	2	2	3	3	3
2 :	1	2	2	3	3	3	3	3	3	3	20 :	1	1	1	2	2	2	2	2	3	3
3 :	1	2	2	2	3	3	3	3	3	3	21 :	1	1	1	2	2	2	2	2	2	3
4 :	1	2	2	2	2	3	3	3	3	3	22 :	1	1	1	1	2	3	3	3	3	3
5 :	1	2	2	2	2	2	3	3	3	3	23 :	1	1	1	1	2	2	3	3	3	3
6 :	1	2	2	2	2	2	2	3	3	3	24 :	1	1	1	1	2	2	2	3	3	3
7 :	1	2	2	2	2	2	2	2	3	3	25 :	1	1	1	1	2	2	2	2	3	3
8 :	1	2	2	2	2	2	2	2	2	3	26 :	1	1	1	1	2	2	2	2	2	3
9 :	1	1	2	3	3	3	3	3	3	3	27 :	1	1	1	1	1	2	3	3	3	3
10 :	1	1	2	2	3	3	3	3	3	3	28 :	1	1	1	1	1	2	2	3	3	3
11 :	1	1	2	2	2	3	3	3	3	3	29 :	1	1	1	1	1	2	2	2	3	3
12 :	1	1	2	2	2	2	3	3	3	3	30 :	1	1	1	1	1	2	2	2	2	3
13 :	1	1	2	2	2	2	2	3	3	3	31 :	1	1	1	1	1	1	2	3	3	3
14 :	1	1	2	2	2	2	2	2	3	3	32 :	1	1	1	1	1	1	2	2	3	3
15 :	1	1	2	2	2	2	2	2	2	3	33 :	1	1	1	1	1	1	2	2	2	3
16 :	1	1	1	2	3	3	3	3	3	3	34 :	1	1	1	1	1	1	1	2	3	3
17 :	1	1	1	2	2	3	3	3	3	3	35 :	1	1	1	1	1	1	1	2	2	3
18 :	1	1	1	2	2	2	3	3	3	3	36 :	1	1	1	1	1	1	1	1	2	3

Drugi sposób rozwiązania polega na zliczaniu sposobów podziału tablicy złożonej z 10 pól na trzy niepuste bloki. Mamy do wyboru 9 możliwych miejsc, w których bloki liczb ze sobą graniczą (rys. 20.33).



Rys. 20.33

Z tych 9 miejsc mamy wybrać dwa. Możemy to zrobić na

$$\frac{9 \cdot 8}{2} = 9 \cdot 4 = 36$$

sposobów.

23. Prostokąt o wymiarach 10×1 podzielono na 10 kwadratów. W każdy z tych kwadratów mamy wpisać jedną liczbę: 1, 2 lub 3. Chcemy, by wpisane liczby tworzyły ciąg niemalejący, tzn. na początku występuje blok liczb 1, potem blok liczb 2 i na końcu blok liczb 3. Nie wymagamy przy tym, by każda liczba wystąpiła co najmniej jeden raz, tzn. niektóre bloki liczb mogą nie wystąpić. Dwa przykłady takiego wpisania liczb widzimy na rysunkach 20.17 i 20.18:

1	1	1	2	2	2	2	2	3	3

Rys. 20.17

1	1	1	1	1	1	3	3	3	3

Rys. 20.18

Na ile sposobów można wpisać te liczby do naszego prostokąta, spełniając powyższe warunki?

Rozwiązanie. Pokażemy cztery sposoby rozwiązania zadania. Sposób pierwszy polega na bezpośrednim zliczaniu wszystkich możliwości podziału 10 pól naszej tablicy na trzy bloki. Będziemy zliczać podziały tablicy w zależności od liczby jedynek. Blok jedynek może mieć długość od 0 do 10. Przyjrzyjmy się możliwościom podziału:

- jeśli blok jedynek ma długość 0, to mamy 11 możliwości podziału pozostałych pól na bloki dwójek i trójek — blok dwójek może mieć długość od zera do 10;
- jeśli blok jedynek ma długość 1, to mamy 10 możliwości podziału pozostałych pól na bloki dwójek i trójek — blok dwójek może mieć długość od zera do 9;
- jeśli blok jedynek ma długość 2, to mamy 9 możliwości podziału pozostałych pól na bloki dwójek i trójek — blok dwójek może mieć długość od zera do 8;
- jeśli blok jedynek ma długość 3, to mamy 8 możliwości podziału pozostałych pól na bloki dwójek i trójek — blok dwójek może mieć długość od zera do 7;
- jeśli blok jedynek ma długość 4, to mamy 7 możliwości podziału pozostałych pól na bloki dwójek i trójek — blok dwójek może mieć długość od zera do 6;
- jeśli blok jedynek ma długość 5, to mamy 6 możliwości podziału pozostałych pól na bloki dwójek i trójek — blok dwójek może mieć długość od zera do 5;
- jeśli blok jedynek ma długość 6, to mamy 5 możliwości podziału pozostałych pól na bloki dwójek i trójek — blok dwójek może mieć długość od zera do 4;
- jeśli blok jedynek ma długość 7, to mamy 4 możliwości podziału pozostałych pól na bloki dwójek i trójek — blok dwójek może mieć długość od zera do 3;
- jeśli blok jedynek ma długość 8, to mamy 3 możliwości podziału pozostałych pól na bloki dwójek i trójek — blok dwójek może mieć długość od zera do 2;
- jeśli blok jedynek ma długość 9, to mamy 2 możliwości podziału pozostałych pól na bloki dwójek i trójek — blok dwójek może mieć długość od zera do 11;
- jeśli blok jedynek ma długość 10, to mamy 1 możliwość podziału pozostałych pól na bloki dwójek i trójek — blok dwójek musi mieć długość zero.

Łącznie mamy 66 możliwości podziału 10 pól na bloki jedynek, dwójek i trójek.

Drugi sposób rozwiązania polega na zliczaniu sposobów wyboru granic między blokami. Różnica między tym zadaniem i poprzednim polega na tym, że teraz granice podziału mogą znajdować się koło siebie. Narysujmy 10 czarnych kółek oznaczających pola naszej tablicy.

$$\bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet$$

Musimy dorysować dwie granice między blokami. Mogą one być wpisane w dowolny sposób w 11 wolnych miejsc. Pamiętajmy przy tym, że można wpisać kilka granic w to samo wolne miejsce. Oznaczmy te granice białymi kółkami. Każdy układ 10 czarnych i 2 białych kółek jednoznacznie wyznacza podział tablicy na bloki. Na przykład układ

$$\bullet\ \bullet\ \bullet\ \circ\ \bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet\ \circ\ \bullet\ \bullet$$

wyznacza podział z pierwszego przykładu z treści zadania. Natomiast układ

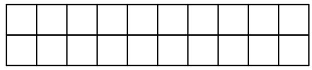
$$\bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet\ \circ\ \circ\ \bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet$$

wyznacza podział z drugiego przykładu. Musimy zatem policzyć wszystkie układy 10 czarnych i 2 białych kółek. Mamy łącznie 12 kółek i wystarczy wskazać miejsca, na których stoją białe kółka. Ponieważ istnieje

$$\frac{12 \cdot 11}{2} = 66$$

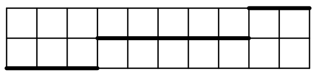
możliwości wskazania tych dwóch miejsc, więc istnieje 66 możliwości wpisania liczb do tablicy w kolejności niemalejącej.

Trzeci sposób rozwiązania polega na wyborze innej reprezentacji graficznej podziału. Narysujmy pokratkowany prostokąt o wymiarach 10×2 (rys. 20.34).



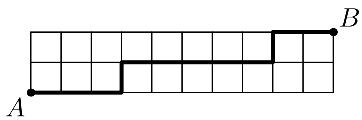
Rys. 20.34

Na pierwszej linii (licząc od dołu) pogrubimy tyle kratek, ile mamy jedynek w tablicy, na drugiej linii tyle kratek, ile mamy dwójek i wreszcie na trzeciej pogrubimy tyle kratek, ile mamy trójek. Dla tablicy z pierwszego przykładu otrzymamy w ten sposób następujące pogrubione linie (rys. 20.35).



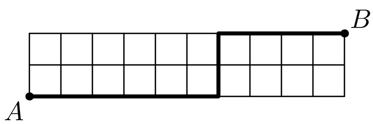
Rys. 20.35

Połączymy je następnie liniami pionowymi, otrzymując w ten sposób drogę prowadzącą z punktu A do punktu B, czyli z lewego dolnego do prawego górnego wierzchołka prostokąta (rys. 20.36).



Rys. 20.36

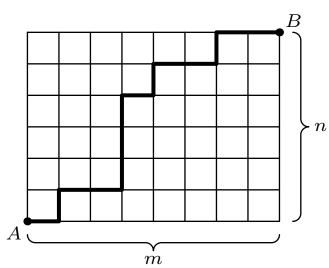
Zauważmy, że po tej drodze poruszamy się od A do B, idąc zawsze tylko w prawo lub do góry. Inaczej mówiąc, nie możemy się cofać. Każdy układ liczb wpisanych do tablicy odpowiada jednej takiej drodze i odwrotnie, każda taka droga wyznacza jednoznacznie jeden układ liczb w tablicy. Na przykład drugiej tablicy z treści zadania odpowiada droga (rys. 20.37).



Rys. 20.37

Zadanie polega więc na policzeniu wszystkich dróg z A do B. Zauważmy w tym celu, że każda droga jest wyznaczona jednoznacznie przez ciąg 12 odcinków — 10 poziomych i 2 pionowych. Taki ciąg jest z kolei wyznaczony jednoznacznie przez wskazanie miejsc, na których znajdują się odcinki pionowe. Mamy 12 miejsc i musimy wskazać 2 miejsca. Można to uczynić na $\frac{12 \cdot 11}{2} = 66$ sposobów.

Uwaga. Można zauważyć, że w pokratkowanym prostokącie o wymiarach $m \times n$ istnieje $\binom{m+n}{m} = \binom{m+n}{n}$ najkrótszych dróg z A do B, tzn. takich, że idziemy zawsze w prawo lub do góry (czyli takich jak na rysunku 20.38):



Rys. 20.38

Zauważmy bowiem, że każdą taką drogę możemy zakodować za pomocą ciągu zer i jedynek — odcinek poziomy kodujemy za pomocą zera, pionowy za pomocą jedynki. Drogę przedstawioną na rysunku 20.38 kodujemy zatem za pomocą ciągu

$$(0,1,0,0,1,1,1,0,1,0,0,1,0,0).$$

Trzeba jeszcze zauważyć, że każda rozważana droga składa się z dokładnie m odcinków poziomych i n odcinków pionowych.

Popatrzmy wreszcie na czwarty sposób rozwiązania zadania. Zliczamy sposoby wpisania liczb do tablicy. Liczby te tworzą ciąg

$$(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6,a_7,a_8,a_9,a_{10})$$

o wyrazach ze zbioru $\{1,2,3\}$. Ciąg ten jest przy tym niemalejący:

$$a_1 \le a_2 \le a_3 \le a_4 \le a_5 \le a_6 \le a_7 \le a_8 \le a_9 \le a_{10}.$$

Z ciągu tego tworzymy nowy ciąg rosnący

$$b_1 < b_2 < b_3 < b_4 < b_5 < b_6 < b_7 < b_8 < b_9 < b_{10}.$$

Przyjmujemy w tym celu:

$$\begin{aligned} b_1 &= a_1, & b_6 &= a_6+5,\\ b_2 &= a_2+1, & b_7 &= a_7+6,\\ b_3 &= a_3+2, & b_8 &= a_8+7,\\ b_4 &= a_4+3, & b_9 &= a_9+8,\\ b_5 &= a_5+4, & b_{10} &= a_{10}+9. \end{aligned}$$

Nietrudno zauważyć, że ciąg $(b_1,b_2,\ldots,b_{10})$ rzeczywiście jest rosnący, jego wyrazy należą do zbioru $\{1,2,\ldots,12\}$ oraz każdy ciąg rosnący o wyrazach należących do tego zbioru powstaje z jednego ciągu niemalejącego o wyrazach ze zbioru $\{1,2,3\}$. Wystarczy zatem policzyć ciągi rosnące o wyrazach ze zbioru $\{1,2,\ldots,12\}$. W tym celu zauważamy, że każdy ciąg rosnący jest wyznaczony jednoznacznie przez 10 liczb będących jego wyrazami. Muszą one być uporządkowane w tym ciągu od najmniejszej do największej. Inaczej mówiąc, taki ciąg jest wyznaczony jednoznacznie przez 2 liczby, które nie są jego wyrazami. Zatem liczba takich ciągów rosnących jest równa liczbie sposobów wyboru 2 liczb spośród 12 liczb, czyli jest równa

$$\frac{12\cdot 11}{2} = 66.$$

Zatem istnieje 66 sposobów wpisania liczb do tablicy.

24. Sześcioro rodzeństwa (czterech chłopców i dwie dziewczynki) kupiło bilety do kina na miejsca od 1 do 6 w tym samym rzędzie. Na ile sposobów mogą oni wybrać miejsca tak, by dziewczynki nie siedziały obok siebie?

Rozwiązanie. Najpierw wybieramy miejsca, na których mogą usiąść chłopcy i dziewczęta. Mamy następujących 10 sposobów podziału miejsc (kółka czarne oznaczają miejsca dla chłopców, białe dla dziewcząt):

1 :	○ ● ○ ● ● ●	6 :	● ○ ● ● ○ ●
2 :	○ ● ● ○ ● ●	7 :	● ○ ● ● ● ○
3 :	○ ● ● ● ○ ●	8 :	● ● ○ ● ○ ●
4 :	○ ● ● ● ● ○	9 :	● ● ○ ● ● ○
5 :	● ○ ● ○ ● ●	10 :	● ● ● ○ ● ○

Następnie na każdym z czterech miejsc przeznaczonych dla chłopców możemy ich posadzić na $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ sposoby. Podobnie, dziewczęta możemy posadzić na wybranych dla nich miejscach na $2 \cdot 1 = 2$ sposoby. Łącznie, korzystając z reguły mnożenia, otrzymujemy

$$10 \cdot 24 \cdot 2 = 480$$

sposobów posadzenia dziewcząt i chłopców.

Liczbę sposobów wyboru miejsc dla chłopców i dziewczynek można także obliczyć następującym sposobem. Rysujemy cztery czarne kółeczka oznaczające miejsca dla chłopców.

● ● ● ●

Dziewczęta mogą zająć pięć miejsc: dwa miejsca skrajne i trzy miejsca między chłopcami. Te miejsca zaznaczone są strzałkami.

↑ ● ↑ ● ↑ ● ↑ ● ↑

Dziewczęta mają wybrać dla siebie dwa miejsca spośród tych pięciu. Mogą to zrobić na

$$\frac{5 \cdot 4}{2} = 10$$

sposobów.

25. Ile istnieje trójek uporządkowanych (x, y, z) liczb całkowitych dodatnich takich, że

$$x + y + z = 10?$$

A ile istnieje takich trójek liczb całkowitych nieujemnych? A ile (w obu wariantach) jest rozwiązań równania

$$x + y + z = n,$$

gdzie n jest daną liczbą całkowitą dodatnią?

Rozwiązanie. Niech x oznacza liczbę jedynek wpisanych do tablicy, y liczbę dwójek i z liczbę trójek. To zadanie okazuje się być inaczej sformułowanym zadaniem o wpisywaniu liczb do tablicy. Jeśli mamy do czynienia z liczbami dodatnimi, to jest to zadanie 22; jeśli z liczbami nieujemnymi, to jest to zadanie 23.

W przypadku liczb dodatnich odpowiedź ogólna to $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$. W przypadku liczb nieujemnych odpowiedź to $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$.

Zestaw 6.
Zasada szufladkowa Dirichleta

1. Udowodnij, że:

a) wśród dowolnych 3 osób co najmniej dwie są tej samej płci;
b) wśród dowolnych 13 osób co najmniej dwie urodziły się w tym samym miesiącu;
c) prosta nieprzechodząca przez wierzchołek trójkąta nie może przeciąć 3 boków;
d) płaszczyzna nieprzechodząca przez wierzchołek czworościanu może przeciąć co najwyżej 4 krawędzie;
e) wśród 5 punktów leżących w trójkącie równobocznym o boku 2 co najmniej dwa są oddalone nie więcej niż o 1;
f) wśród 17 punktów leżących w trójkącie równobocznym o boku 2 co najmniej dwa są oddalone nie więcej niż o $\frac{1}{2}$;
g) spośród 12 liczb dwucyfrowych można wybrać dwie, których różnica jest liczbą o dwóch jednakowych cyfrach;
h) wśród liczb postaci 10^n (dla $n = 1, 2, 3, \ldots$) istnieje nieskończenie wiele liczb dających tę samą resztę z dzielenia przez 17.

Rozwiązanie.

a) Szufladki — dwie płcie. Piłeczki — trzy osoby.

b) Szufladki — 12 miesięcy. Piłeczki — 13 osób.

c) Szufladki — dwie półpłaszczyzny, na które dana prosta podzieliła płaszczyznę. Piłeczki — wierzchołki trójkąta. Trzeba zauważyć, że odcinek łączący dwa punkty leżące w tej samej półpłaszczyźnie jest cały zawarty w tej półpłaszczyźnie (półpłaszczyzna jest figurą wypukła).

d) Szufladki — dwie półprzestrzenie, na które dana płaszczyzna podzieliła przestrzeń. Piłeczki — wierzchołki czworościanu. Trzeba skorzystać z tego, że półprzestrzeń jest figurą wypukłą.

e) Szufladki — 4 trójkąty równoboczne o boku 1, na które dzielimy dany trójkąt, łącząc środki boków. Piłeczki — 5 punktów. Trzeba udowodnić, że dwa punkty leżące wewnątrz lub na brzegu trójkąta równobocznego o boku a są odległe co najwyżej o a.

f) Szufladki — 16 trójkątów równobocznych o boku $\frac{1}{2}$, na które można podzielić dany trójkąt. Piłeczki — 17 punktów.

g) Szufladki — 11 reszt z dzielenia przez 11. Piłeczki — 12 liczb.

h) Szufladki — 17 reszt z dzielenia przez 17 (a nawet tylko 16 reszt, bo żadna z rozważanych liczb nie daje reszty 0). Piłeczki — nieskończenie wiele liczb.

2. Z ciągu liczb $1, 4, 7, 10, \ldots, 94, 97, 100$ wybrano 20 liczb. Udowodnij, że wśród nich są co najmniej dwie różne liczby o sumie równej 104.

Rozwiązanie. Szufladkami są zbiory liczb:

$$\{1\}, \{4, 100\}, \{7, 97\}, \{10, 94\}, \ldots, \{43, 61\}, \{46, 58\}, \{49, 55\}, \{52\}.$$

Piłeczkami są dane liczby. Trzeba zauważyć, że do co najmniej jednego zbioru dwuelementowego wpadną dwie piłeczki.

3. Udowodnij, że wśród dowolnie wybranych $n + 1$ liczb całkowitych znajdują się co najmniej dwie takie, że ich różnica jest podzielna przez n.

Rozwiązanie. Szufladki — n reszt z dzielenia przez n. Piłeczkami jest $n + 1$ liczb.

4. Udowodnij, że wśród $n+1$ liczb wybranych ze zbioru $\{1, 2, \ldots, 2n\}$ znajdują się dwie, z których jedna jest dzielnikiem drugiej.

Rozwiązanie. Każdą z tych $n+1$ liczb przedstawiamy w postaci $2^k \cdot l$, gdzie l jest liczbą nieparzystą ze zbioru $\{1, 3, \ldots, 2n-1\}$. Szufladkami są te liczby nieparzyste l, piłeczkami — dane liczby.

5. Liczba a nie dzieli się ani przez 2, ani przez 5. Udowodnij, że pewna jej wielokrotność ma w zapisie dziesiętnym same jedynki.

Rozwiązanie. Szufladkami jest a reszt z dzielenia przez a, piłeczkami są liczby postaci

$$1, 11, 111, 1111, 11111, 111111, \ldots$$

Z zasady szufladkowej wynika, że co najmniej dwie liczby tej postaci dają tę samą resztę z dzielenia przez a. Zatem różnica tych dwóch liczb jest podzielna przez a. Ta różnica ma postać $111\ldots11000\ldots00$, czyli $\underbrace{11\ldots1}_{m} \cdot 10^n$ dla pewnych m i n. Teraz wystarczy skorzystać z tego, że $\mathrm{NWD}(a, 10) = 1$. Mianowicie, jeśli $a \mid \underbrace{11\ldots1}_{m} \cdot 10^n$ oraz $\mathrm{NWD}(a, 10) = 1$, to $a \mid \underbrace{11\ldots1}_{m}$.

6. Liczby od 1 do 101 wypisano na tablicy w dowolnej kolejności. Udowodnij, że można wytrzeć 90 z nich w taki sposób, by pozostałe tworzyły ciąg rosnący lub malejący.

Rozwiązanie. To zadanie jest bardzo trudne i trudno oczekiwać, by uczniowie samodzielnie je rozwiązali. Jednak, z drugiej strony, jest to bardzo dobre zadanie szkoleniowe. W ogólnej postaci (spośród n^2+1 liczb można wybrać podciąg rosnący lub malejący długości $n+1$) to zadanie jest znane jako twierdzenie Erdösa-Szekeresa. Pod każdą liczbą wypisujemy długość najdłuższego ciągu rosnącego, kończącego się tą liczbą. Jeśli wśród wypisanych liczb wystąpi liczba 11, to mamy ciąg rosnący żądanej długości. Jeśli nie, to z zasady szufladkowej wynika, że któraś liczba wystąpi co najmniej 11 razy. Nietrudno wykazać, że liczby, nad którymi ona wystąpi, tworzą ciąg malejący. Popatrzmy na przykład 17 liczb. Szukamy ciągu rosnącego lub malejącego długości 5:

16	7	13	9	5	8	12	4	10	1	3	6	2	17	15	14	11
1	1	2	2	1	2	3	1	3	1	2	3	2	4	4	4	4

Liczby 16, 7, 5, 4, 1, pod którymi wystąpiła jedynka (a także 13, 9, 8, 3, 2 — pod którymi wystąpiła liczba 2), tworzą ciąg malejący.

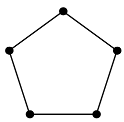
7. Na przyjęciu znalazło się n osób. Udowodnij, że co najmniej dwie z nich mają wśród obecnych tę samą liczbę znajomych.
Uwaga. Zakładamy, że nikt nie zalicza siebie samego do grona swoich znajomych, oraz że osoba A zna osobę B wtedy i tylko wtedy, gdy B zna A.

Rozwiązanie. Szufladki — liczby znajomych poszczególnych osób na przyjęciu. Piłeczki — osoby na przyjęciu. Z pozoru zasada szufladkowa nie daje się zastosować, bo mamy n szufladek (liczba znajomych może być dowolną liczbą od 0 do $n-1$) i n piłeczek. Zauważmy jednak, że liczby znajomych 0 i $n-1$ nie mogą wystąpić jednocześnie; mamy zatem tylko $n-1$ możliwych szufladek (liczby od 0 do $n-2$ lub od 1 do $n-1$).

8. Udowodnij, że wśród 6 dowolnych osób albo są trzy, które się znają, albo są trzy takie, że żadne dwie z nich się nie znają.

Rozwiązanie. Wybieramy jedną osobę. Albo istnieją trzy osoby, które ona zna, albo trzy osoby, których ona nie zna. Rozpatrzmy przypadek, gdy wybrana osoba A zna trzy osoby: B, C i D (drugi przypadek rozpatruje się analogicznie). Jeśli któreś dwie spośród osób B, C i D znają się, to wraz z osobą A tworzą trójkę znajomych. Jeśli żadne się nie znają, to tworzą trójkę nieznajomych.

Uwaga. Analogiczne zadanie dla 5 osób nie jest prawdziwe. Przypuśćmy, że mamy osoby $A_1, \ldots, A_5$. Pary znajomych, to:



Rys. 20.39

$$\{A_1, A_2\}, \quad \{A_1, A_2\}, \quad \{A_1, A_2\}, \quad \{A_1, A_2\}, \quad \{A_1, A_2\}.$$

Inaczej mówiąc, graf znajomości ma postać taką jak na rysunku 20.39. Nietrudno przekonać się, że wówczas w każdej trójce osób jakaś para się zna i jakaś para się nie zna.

9. Mamy danych 5 liczb całkowitych. Udowodnij, że istnieją wśród nich 3 liczby, których suma jest podzielna przez 3.

Rozwiązanie. Szufladkami będą reszty z dzielenia przez 3. Mamy zatem 3 szufladki. Możliwe są 2 przypadki.

- W każdej szufladce znajduje się co najmniej jedna liczba. Bierzemy po jednej liczbie z każdej szufladki i zauważamy, że ich suma dzieli się przez 3.
- Co najmniej jedna szufladka jest pusta. Wtedy w którejś szufladce znajdują się co najmniej 3 liczby. Wybieramy 3 liczby z tej szufladki i znów zauważamy, że ich suma dzieli się przez 3.

10. Mamy danych 17 liczb całkowitych. Udowodnij, że istnieje wśród nich 9 liczb, których suma jest podzielna przez 9.

Rozwiązanie. Bierzemy dowolne 5 liczb. Wśród nich znajdują się 3 liczby a_1, a_2, a_3, których suma dzieli się przez 3: $a_1 + a_2 + a_3 = 3k_1$. Te 3 liczby odkładamy na bok. Pozostało 14 liczb. Powtarzamy tę konstrukcję: bierzemy dowolne 5 liczb i wśród nich znajdujemy 3 liczby a_4, a_5, a_6, których suma dzieli się przez 3: $a_4 + a_5 + a_6 = 3k_2$. W podobny sposób znajdujemy jeszcze 3 takie trójki liczb:

$$a_7 + a_8 + a_9 = 3k_3, \quad a_{10} + a_{11} + a_{12} = 3k_4, \quad a_{13} + a_{14} + a_{15} = 3k_5.$$

Wśród pięciu liczb k_1, k_2, k_3, k_4, k_5 znajdują się 3 liczby, których suma dzieli się przez 3. Bez straty ogólności (bowiem możemy te liczby przenumerować) możemy założyć, że

$$k_1 + k_2 + k_3 = 3m.$$

Wówczas

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_9 = 3k_1 + 3k_2 + 3k_3 = 3(k_1 + k_2 + k_3) = 3 \cdot 3m = 9m.$$

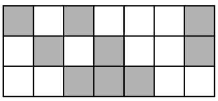
11. Mamy danych 68 liczb całkowitych wybranych ze zbioru liczb od 1 do 100. Udowodnij, że istnieją wśród nich dwie liczby a i b takie, że $2a = b$.

Rozwiązanie. Stworzymy 67 szufladek. Piłeczkami będą dane liczby. Wówczas w co najmniej jednej szufladce znajdą się 2 piłeczki. A oto te szufladki:

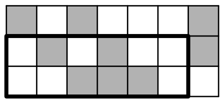
- pierwsze 25 szufladek ma postać $\{k\}$, gdzie k jest liczbą nieparzystą większą od 50;
- następne 25 szufladek ma postać $\{k, 2k\}$, gdzie k jest liczbą nieparzystą mniejszą od 50;
- następne 7 szufladek ma postać $\{k\}$, gdzie $k = 4m$ dla $m = 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25$;
- następne 6 szufladek ma postać $\{k, 2k\}$, gdzie $k = 4m$ dla $m = 1, 3, 5, 7, 9, 11$;
- ostatnie 4 szufladki to: $\{16, 32\}, \{48, 96\}, \{64\}, \{80\}$.

Nietrudno zauważyć, że każda liczba ze zbioru liczb od 1 do 100 trafiła do którejś szufladki oraz że jeśli 2 liczby znalazły się w tej samej szufladce, to jedna jest dwa razy większa od drugiej.

12. Prostokąt o wymiarach 3×7 podzielono na 21 kwadratów. Każdy z tych kwadratów pomalowano na biało lub szaro. Przykład takiego kolorowania widzimy na rysunku 20.19. Udowodnij, że istnieje prostokąt, którego boki zawierają się w liniach podziału, mający cztery narożne pola tego samego koloru (rys. 20.20).

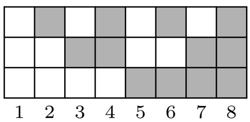


Rys. 20.19



Rys. 20.20

Rozwiązanie. Popatrzmy na kolumny naszego prostokąta. Każda składa się z trzech kwadratów, a więc istnieje dokładnie 8 rodzajów kolumn (rys. 20.40).



Rys. 20.40

Możliwe są trzy przypadki:

- W rozważanym prostokącie występuje kolumna typu 1.
  Wówczas jeśli wystąpi którakolwiek z kolumn mających co najmniej 2 kwadraty białe (czyli kolumna typu 1, 2, 3 lub 5), to znajdziemy prostokąt o 4 rogach białych. Jeśli natomiast nie wystąpi kolumna żadnego z tych 4 typów, to każda z pozostałych 6 kolumn ma jeden z czterech typów: 4, 6, 7 lub 8. Jeden typ się powtórzy i znajdziemy prostokąt o 4 rogach czarnych.
- W rozważanym prostokącie występuje kolumna typu 8.
  Prowadzimy rozumowanie analogiczne do poprzedniego.
- W rozważanym prostokącie nie występują kolumny typu 1 i 8.
  Zatem mamy 7 kolumn 6 typów. Z zasady szufladkowej wynika, że 2 kolumny mają ten sam typ i wtedy łatwo znajdujemy prostokąt o 4 rogach tego samego koloru.

13. Prostokąt o wymiarach 4×28 podzielono na 112 kwadratów. Każdy z tych kwadratów pomalowano na jeden z trzech kolorów: czerwony, niebieski i zielony. Udowodnij, że istnieje prostokąt, którego boki zawierają się w liniach podziału, mający cztery narożne pola tego samego koloru.

Rozwiązanie. Ponumerujmy wiersze (licząc na przykład od dołu) liczbami od 1 do 4 oraz kolumny (licząc od lewej strony) liczbami od 1 do 28. Popatrzmy najpierw na pierwszy wiersz. Jest w nim 28 kwadratów, każdy jest pomalowany jednym z trzech kolorów. Z zasady szufladkowej wynika, że jeden kolor wystąpi co najmniej 10 razy. Bez zmniejszenia ogólności możemy założyć, że jest to kolor czerwony. Zauważmy następnie, że zamiana kolumn nie zmienia tezy: jeśli przed zamianą był prostokąt o jednokolorowych rogach to po zamianie też będzie taki prostokąt (i oczywiście na odwrót). Możemy zatem zamienić kolumny tak, by w pierwszych 10 kolumnach pole w pierwszym wierszu było czerwone. Od tej pory zajmujemy się tylko tymi 10 kolumnami, pozostałe możemy usunąć.

Popatrzmy na kolejne 3 wiersze. Jeśli w którymś znajdują się co najmniej 2 pola czerwone, to będziemy mieli prostokąt z 4 rogami czerwonymi. Przypuśćmy zatem, że w każdym z pozostałych 3 wierszy jest co najwyżej jedno pole czerwone. Kolumny, w których znajdują się te pola czerwone, przeniesiemy na koniec i usuniemy z naszego prostokąta. Pozostanie 7 kolumn takich, że w 3 wierszach (poza pierwszym) każde pole jest jednego z dwóch pozostałych kolorów. Teraz wystarczy skorzystać z poprzedniego zadania.

Uwaga. Interesującym ćwiczeniem może być **ułożenie** następnych zadań tego samego typu. Chodzi o znalezienie liczby n takiej, by prostokąt o wymiarach $5 \times n$ pokolorowany 4 kolorami zawierał prostokąt o jednokolorowych rogach. Ogólnie można pokusić się o znalezienie wzoru rekurencyjnego dla ciągu k_n, takiego, że prostokąt o wymiarach $n \times k_n$, pokolorowany za pomocą $n-1$ kolorów, zawiera prostokąt o jednokolorowych rogach. Początkowe wartości tego ciągu znamy: $k_3 = 7$, $k_4 = 28$. Pozostaje oczywiście pytanie, czy znalezione wartości są optymalne, to znaczy, czy nie można znaleźć mniejszych liczb o tej samej własności. Nietrudno pokazać, że liczba $k_3 = 7$ jest optymalna.

14. Siedemnaście osób wymienia pomiędzy sobą listy, przy czym każda osoba koresponduje z każdą z pozostałych. Przedmiotem korespondencji są trzy różne zagadnienia, a każda para osób omawia korespondencyjnie tylko jedno z tych zagadnień. Udowodnij, że są takie trzy osoby, których wzajemna korespondencja dotyczy jednego i tego samego zagadnienia.

Rozwiązanie. Wybierzmy jedną osobę A. Ta osoba koresponduje z 16 osobami. Tematami korespondencji są 3 różne zagadnienia. Z zasady szufladkowej wynika, że z co najmniej 6 osobami osoba A koresponduje na ten sam temat T. Jeśli wśród tych 6 osób znajduje się para osób korespondujących na temat T, to wraz z osobą A utworzą one szukaną trójkę osób. Jeśli zaś każda para w tej szóstce koresponduje na inny temat, to wystarczy skorzystać z zadania 8.

15. W turnieju szachowym uczestniczy 66 zawodników, każdy z każdym rozgrywa jedną partię, rozgrywki odbywają się w czterech miastach. Udowodnij, że pewna trójka zawodników rozgrywa wszystkie partie między sobą w tym samym mieście.

Rozwiązanie. Wybierzmy zawodnika A. Rozgrywa on 65 partii w czterech miastach. Z zasady szufladkowej wynika, że z co najmniej 17 osobami rozgrywa on partie w tym samym mieście M. Jeśli wśród tych 17 osób znajdą się 2 osoby rozgrywające swoją partię w mieście M, to razem z zawodnikiem A tworzą oni żądaną trójkę. W przeciwnym przypadku mamy 17 zawodników rozgrywających swoje mecze w trzech miastach i wystarczy skorzystać z poprzedniego zadania.

Uwaga. Zadania 8, 14 i 15 są szczególnymi przypadkami następującego ogólnego problemu. Mamy dany graf pełny (to znaczy taki, w którym każde dwa wierzchołki są połączone krawędzią), którego krawędzie pokolorowano — każdą krawędź jednym z n kolorów. Zadanie polega na znalezieniu liczby M_n takiej, że jeśli dany graf ma co najmniej M_n wierzchołków, to wśród nich istnieją 3 wierzchołki takie, że wszystkie trzy krawędzie łączące te wierzchołki, są jednego koloru (takie 3 wierzchołki nazywamy trójkątem jednokolorowym). Inaczej mówiąc, chodzi o znalezienie trzyelementowej kliki, w której wszystkie krawędzie są jednego koloru. Te trzy zadania pokazują, że wystarczy przyjąć

$M_2 = 6$, $M_3 = 17$ oraz $M_4 = 66$. Oczywiście, także $M_1 = 3$. Dość łatwo dowodzi się, że liczby M_n można zdefiniować wzorem rekurencyjnym

$$M_n = n \cdot M_{n-1} - n + 2 \quad \text{dla } n > 1.$$

Okazuje się, że istnieje zaskakujący wzór ogólny (nierekurencyjny) na M_n. Mianowicie $M_n = [n!\cdot \mathrm{e}]+1$, gdzie $[x]$ oznacza część całkowitą liczby rzeczywistej x oraz e jest podstawą logarytmu naturalnego. Oczywiście dowód tego faktu wykracza poza program szkolny.

16. Udowodnij, że wśród 10 dowolnych osób albo są trzy, które się znają, albo są cztery takie, że żadne dwie z nich się nie znają.

Rozwiązanie. Wybierzmy osobę A. Możliwe są dwa przypadki.

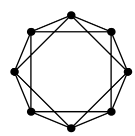
- Osoba A zna co najmniej cztery osoby. Jeśli któreś dwie z tych czterech osób znają się, to razem z osobą A tworzą trójkę osób, w której wszyscy się znają. Jeśli natomiast wśród tych czterech osób żadne dwie się nie znają, to te osoby tworzą czwórkę nieznajomych.
- Osoba A zna co najwyżej trzy osoby. Wtedy nie zna co najmniej 6 osób. Do tych 6 osób zastosujmy zadanie 8. Jeśli wśród tych 6 osób są trzy, wśród których każde dwie się znają, to mamy już żądaną trójkę znajomych. Jeśli natomiast są trzy, wśród których żadne dwie się nie znają, to wraz z osobą A tworzą one czwórkę nieznajomych.

Uwaga. Zadania 8 i 16 są szczególnymi przypadkami tzw. twierdzenia Ramseya. Mówi ono, że dla dowolnych liczb naturalnych m i n istnieje liczba k o następującej własności: jeśli każdą krawędź grafu pełnego mającego k wierzchołków pokolorujemy jednym z dwóch kolorów (na przykład czarnym lub czerwonym), to albo istnieje w tym grafie m wierzchołków takich, że każda krawędź między tymi wierzchołkami jest czarna, albo istnieje n wierzchołków takich, że każda krawędź między tymi wierzchołkami jest czerwona. Inaczej mówiąc, chodzi o to, by w grafie pełnym, którego każda krawędź jest pokolorowana jednym z dwóch kolorów, istniała klika m-elementowa, w której wszystkie krawędzie są czarne lub istniała klika n-elementowa, w której wszystkie krawędzie są czerwone. Najmniejszą taką liczbę k nazywamy liczbą Ramseya (dla parametrów m i n) i oznaczamy symbolem $R(m,n)$. Zadanie 8, wraz z uwagą po tym zadaniu, pokazuje, że $R(3,3) = 6$. Zadanie 16 pokazuje, że $R(3,4) \le 10$. Można udowodnić, że dla dowolnych liczb naturalnych $m, n \ge 2$:

- $R(m,n) = R(n,m)$;
- $R(m,2) = m$;
- $R(m,n) \le R(m,n-1) + R(m-1,n)$ dla $m, n \ge 3$;
- $R(m,n) < R(m,n-1) + R(m-1,n)$, jeśli obie liczby $R(m,n-1)$ i $R(m-1,n)$ są parzyste.

W szczególności, stąd wynika, że

$$R(4,3) < R(4,2) + R(3,3),$$


Rys. 20.41

gdyż $R(4,2) = 4$ oraz $R(3,3) = 6$. Zatem $R(4,3) \le 9$. Graf na rysunku 20.41 (pokazane są tylko krawędzie czarne) dowodzi, że $R(4,3) > 8$. Zatem $R(4,3) = 9$. Zaledwie dla kilku par $m, n \ge 3$ znamy dokładne wartości liczb Ramseya. Oto one:

$$R(3,3) = 6, \qquad R(6,3) = 18, \qquad R(9,3) = 36,$$
$$R(4,3) = 9, \qquad R(7,3) = 23, \qquad R(4,4) = 18,$$
$$R(5,3) = 14, \qquad R(8,3) = 28, \qquad R(5,4) = 25.$$

Ostatnia z tych wartości została znaleziona za pomocą bardzo długich obliczeń komputerowych. Słynny matematyk węgierski Paul Erdös powiedział kiedyś, że gdyby na Ziemię przylecieli wrogo nastawieni kosmici i zażądali od nas obliczenia liczby Ramseya $R(5,5)$, bo w przeciwnym razie nas zniszczą, to prawdopodobnie udałoby się nam przeżyć. Użycie wszystkich komputerów świata i zaangażowanie do pracy najlepszych matematyków prawdopodobnie zakończyłoby się sukcesem. Gdyby jednak ci kosmici zażądali od nas obliczenia liczby $R(6,6)$, to jedynym naszym wyjściem musiałoby być zgładzenie ich.

17. Niech $x_1, x_2, x_3, \dots$ będzie takim ciągiem liczb naturalnych, że

$$x_1 = 1 \quad \text{oraz} \quad x_n < x_{n+1} \leq 2n \ \text{ dla } n = 1, 2, 3, \dots$$

Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej k istnieją takie liczby r i s, że $x_r - x_s = k$.

Rozwiązanie. Ustalmy liczbę k. Piłeczkami będą wyrazy $x_1, x_2, \dots, x_k, x_{k+1}$ naszego ciągu. Mamy zatem $k+1$ piłeczek. Zauważamy następnie, że wszystkie te wyrazy ciągu są niewiększe od $2k$. Definiujemy teraz k szufladek:

$$\{1, k+1\}, \quad \{2, k+2\}, \quad \{3, k+3\}, \quad \dots, \quad \{k-1, 2k-1\}, \quad \{k, 2k\}.$$

Co najmniej 2 piłeczki x_r i x_s (gdzie $r > s$) trafiają do tej samej szufladki. Wówczas $x_r = x_s + k$, co kończy dowód.

18. Udowodnij, że wśród dowolnych 7 liczb naturalnych istnieją dwie takie, że różnica ich kwadratów jest podzielna przez 10.

Rozwiązanie. Zauważamy, że ostatnia cyfra kwadratu liczby naturalnej jest jedną z cyfr: 0, 1, 4, 5, 6, 9. Mamy zatem 6 szufladek i 7 piłeczek.

19. Udowodnij, że wśród dowolnych 12 liczb całkowitych istnieją takie dwie, których suma lub różnica dzieli się przez 20.

Rozwiązanie. Tworzymy 11 szufladek. Są one wyznaczone przez reszty z dzielenia przez 20. Do danej szufladki trafiają te liczby, które przy dzieleniu przez 20 dają resztę należącą do zbioru wyznaczającego tę szufladkę. Oto te 11 zbiorów:

$$\{0\}, \quad \{1, 19\}, \quad \{2, 18\}, \quad \{3, 17\}, \quad \dots, \quad \{8, 12\}, \quad \{9, 11\}, \quad \{10\}.$$

Z zasady szufladkowej wynika, że co najmniej 2 liczby trafią do tej samej szufladki. Jeśli dają one tę samą resztę przy dzieleniu przez 20, to ich różnica dzieli się przez 20. Jeśli natomiast dają różne reszty, to ich suma dzieli się przez 20.

20. W grupie $n \geq 3$ osób każda ma parzystą (być może zerową) liczbę znajomych. Udowodnij, że istnieją trzy osoby mające tę samą liczbę znajomych.
Uwaga. Zakładamy, że nikt nie zalicza siebie samego do grona swoich znajomych, oraz że osoba A zna osobę B wtedy i tylko wtedy, gdy B zna A.

Rozwiązanie. Szufladkami są liczby znajomych, piłeczkami są osoby. Mamy zatem n piłeczek. Rozważamy dwa przypadki.
Przypadek 1. Liczba n jest parzysta. Istnieje zatem $\frac{n}{2}$ szufladek:

$$0, 2, 4, \dots, n-4, n-2.$$

Z zasady szufladkowej wynika, że mamy dwie możliwości.

- We wszystkich szufladkach będą po 2 piłeczki. Wtedy istnieją 2 osoby, które nie mają ani jednego znajomego oraz istnieją 2 osoby mające po $n-2$ znajomych. To jednak jest niemożliwe, gdyż każda osoba zna co najwyżej $n-3$ osoby (nie zna siebie i dwóch osób, które nie mają znajomych).
- W co najmniej jednej szufladce są co najmniej 3 piłeczki. To jest właśnie teza zadania.

Przypadek 2. Liczba n jest nieparzysta. Tym razem istnieje $n+1$ szufladek:

$$0, 2, 4, \ldots, n-3, n-1.$$

Znów mamy dwie możliwości.

- W jednej szufladce znajduje się jedna piłeczka, w pozostałych po 2 piłeczki. Wtedy istnieje jednak co najmniej jedna osoba, która nie zna nikogo i co najmniej jedna, która zna wszystkie pozostałe osoby (bo zna $n-1$ osób). To jest niemożliwe.
- W co najmniej jednej szufladce są co najmniej 3 piłeczki. To znów jest teza zadania.

21. Do obrad przy okrągłym stole zasiadła parzysta liczba osób. Po przerwie obiadowej uczestnicy zajęli miejsca przy stole w sposób dowolny. Udowodnij, że istnieją dwie osoby przedzielone tą samą, co przed przerwą, liczbą osób.

Rozwiązanie. Przypuśćmy, że przy okrągłym stole zasiadło n osób, gdzie n jest liczbą parzystą. Ponumerujmy miejsca przy okrągłym stole liczbami od 1 do n, zgodnie z ruchem wskazówek zegara. Ponumerujmy także osoby, przypisując każdej osobie numer miejsca, które zajmowała przed przerwą obiadową. Następnie niech po przerwie obiadowej osoba i przesunie się o d_i miejsc zgodnie z ruchem wskazówek zegara. Zauważmy, że dla każdego i zachodzą nierówności: $0 \leq d_i \leq n-1$. Zauważmy następnie, że jeśli $d_i = d_j$, to osoby o numerach i oraz j przesunęły się o tyle samo miejsc, a więc po przerwie były przedzielone tą samą liczbą osób, co przed przerwą. Możemy spróbować zastosować teraz zasadę szufladkową. Piłeczkami są osoby, szufladkami są liczby d_i. Niestety, liczba szufladek jest równa liczbie osób. Musimy zatem pokazać, że liczby $d_1, \ldots, d_n$ nie mogą być wszystkimi liczbami od 0 do $n-1$.

Przypuśćmy zatem, że jest przeciwnie. Popatrzmy na numer miejsca, które po przerwie obiadowej zajmuje osoba o numerze i. Przed przerwą zajmowała miejsce i oraz przesunęła się o d_i miejsc. Zajmuje zatem miejsce $i+d_i$. Jednak tu musimy zwrócić uwagę na to, że liczba $i+d_i$ może być większa od n. W takim przypadku musimy od tej liczby odjąć n. Ten nowy numer możemy zatem zapisać wzorem $i+d_i-k_in$, gdzie k_i jest jedną z liczb 0 lub 1. Dodajmy tak otrzymane numery miejsc:

$$(1+d_1-k_1n)+(2+d_2-k_2n)+\ldots+(n+d_n-k_nn) =$$
$$= (1+2+\ldots+n)+(d_1+d_2+\ldots+d_n)-(k_1+k_2+\ldots+k_n)\cdot n.$$

Ta suma jest oczywiście równa $1+2+\ldots+n$:

$$(1+2+\ldots+n)+(d_1+d_2+\ldots+d_n)-(k_1+k_2+\ldots+k_n)\cdot n = 1+2+\ldots+n,$$

czyli $(d_1+d_2+\ldots+d_n) = (k_1+k_2+\ldots+k_n)\cdot n$. Ponieważ liczby $d_1, d_2, \ldots, d_n$ są wszystkimi liczbami od 0 do $n-1$, więc mamy równość

$$(k_1+k_2+\ldots+k_n)\cdot n = \frac{n(n-1)}{2},$$

czyli

$$k_1+k_2+\ldots+k_n = \frac{n-1}{2}.$$

Otrzymaliśmy sprzeczność: po lewej stronie mamy oczywiście liczbę całkowitą, a po prawej niecałkowitą, gdyż n jest liczbą parzystą.

Uwaga. Dla liczb nieparzystych teza zadania nie jest prawdziwa. Na przykład dla $n = 5$ osoby o numerach od 1 do 5 mogą po przerwie obiadowej zająć odpowiednio miejsca 1, 3, 5, 2, 4. Wówczas osoba o numerze i przesunęła się o $i - 1$ miejsc.

22. Wokół okrągłego stołu postawiono 15 krzeseł. Naprzeciwko każdego krzesła położono kartkę z nazwiskiem osoby, dla której to miejsce jest przeznaczone. Osoby te jednak usiadły przy stole, nie zwracając uwagi na kartki. Wiadomo, że żadna osoba nie usiadła na miejscu przeznaczonym dla niej. Udowodnij, że można przekręcić okrągły stół w taki sposób, że co najmniej dwie osoby będą siedziały na właściwych miejscach.

Rozwiązanie. Piłeczkami są osoby. Mamy więc 15 piłeczek. Definiujemy 14 szufladek numerowanych liczbami od 1 do 14. Osoba trafia do szufladki o numerze i, jeśli po przekręceniu stołu zgodnie z ruchem wskazówek zegara o i miejsc ta osoba będzie siedziała na swoim miejscu. Z zasady szufladkowej wynika, że co najmniej 2 osoby trafią do tej samej szufladki. Jeśli jest to szufladka o numerze i, to po przekręceniu stołu o i miejsc te 2 osoby będą siedziały na właściwych miejscach.

23. Na płaszczyźnie wybrano 5 punktów kratowych (to znaczy punktów o obu współrzędnych całkowitych). Udowodnij, że istnieją wśród nich takie dwa punkty, że środek odcinka o tych końcach jest punktem kratowym.

Rozwiązanie. Patrzymy na współrzędne tych punktów. Wśród 5 punktów istnieją co najmniej trzy, w których pierwsze współrzędne są tej samej parzystości (tzn. wszystkie są parzyste lub wszystkie nieparzyste). Wśród tych 3 punktów są co najmniej dwa, w których drugie współrzędne są tej samej parzystości. Niech będą to punkty $A = (x_1, y_1)$ oraz $B = (x_2, y_2)$. Wówczas liczby $x_1 + x_2$ i $y_1 + y_2$ są parzyste, bowiem suma dwóch liczb tej samej parzystości jest liczbą parzystą. Stąd wynika, że środek odcinka AB, czyli punkt S o współrzędnych

$$S = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$$

jest punktem kratowym.

24. W konferencji międzynarodowej oczestniczyło 1985 osób. Każda z nich zna co najwyżej 5 języków. W każdej trójce osób znajdują się co najmniej dwie znające ten sam język. Udowodnij, że co najmniej 200 osób zna ten sam język.

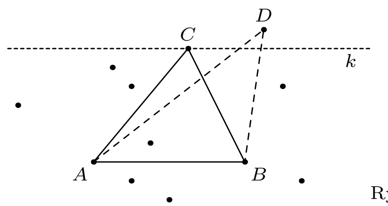
Rozwiązanie. Niech A będzie jedną z osób uczestniczących w konferencji. Przypuśćmy najpierw, że osoba A może porozumieć się ze wszystkimi pozostałymi osobami. Ponieważ osoba A zna co najwyżej 5 języków, więc z zasady szufladkowej wynika, że co najmniej 397 osób zna jeden z tych języków (bowiem $1984 = 5 \cdot 396 + 4$). Zatem w tym przypadku znacznie więcej niż 200 osób zna ten sam język.

Przypuśćmy zatem, że osoba A nie umie porozumieć się ze wszystkimi osobami i niech B będzie osobą, z którą osoba A nie może się porozumieć. Niech C będzie dowolną osobą (różną od A i B). W trójce osób A, B i C któreś dwie znają ten sam język. Zatem osoba C może porozumieć się z A lub z B. Pokazaliśmy, że każda osoba różna od A i B może porozumieć się z A lub z B. Z zasady szufladkowej wynika, że co najmniej 992 osoby mogą porozumieć się z jedną z osób A lub B (bowiem $1983 = 2 \cdot 991 + 1$). Bez zmniejszenia ogólności możemy założyć, że co najmniej 992 osoby mogą porozumieć się z osobą A. Jeszcze raz korzystamy z zasady szufladkowej. Ponieważ $992 = 5 \cdot 198 + 2$, więc co najmniej 199 osób zna jeden z 5 języków, które zna osoba A. Te osoby, wraz z osobą A, tworzą szukany zbiór 200 osób znających ten sam język.

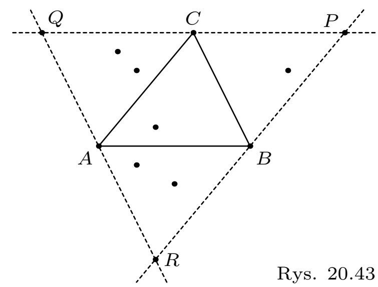
Zestaw 7.
Kombinatoryka — zasada ekstremum, grafy

1. Na płaszczyźnie danych jest n punktów. Każde trzy punkty są wierzchołkami trójkąta o polu ≤ 1. Udowodnij, że te punkty leżą w pewnym trójkącie o polu ≤ 4.

Rozwiązanie. Wybieramy trójkąt o wierzchołkach wybranych spośród danych n punktów, mający największe pole. Niech będzie to trójkąt ABC. Przez punkt C prowadzimy prostą k równoległą do boku AB (rys. 20.42).



Rys. 20.42



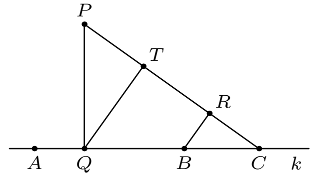
Rys. 20.43

Pokazujemy, że żaden z pozostałych punktów nie może leżeć powyżej prostej k (tzn. po przeciwnej jej stronie niż punkty A i B). Gdyby bowiem punkt D leżał powyżej tej prostej, to pole trójkąta ABD byłoby większe od pola trójkąta ABC. W analogiczny sposób pokazujemy, że wszystkie punkty muszą leżeć wewnątrz (lub na obwodzie) trójkąta PQR (rys. 20.43) — gdzie $PQ \parallel AB$, $QR \parallel BC$ i $PR \parallel CA$. Do zakończenia dowodu wystarczy zauważyć, że pole trójkąta PQR jest 4 razy większe od pola trójkąta ABC. Mianowicie, nietrudno zauważyć, że

$$\triangle\, ABC \equiv \triangle\, PCB \equiv \triangle CQA \equiv \triangle\, BAR.$$

2. Dany jest skończony zbiór S punktów płaszczyzny o tej własności, że każda prosta przechodząca przez dwa punkty ze zbioru S, przechodzi też przez trzeci punkt ze zbioru S. Udowodnij, że wszystkie te punkty są współliniowe.

Rozwiązanie. Przypuśćmy, że nie wszystkie punkty zbioru S leżą na jednej prostej. Rozważamy niepusty i skończony zbiór par (X, l), gdzie l jest prostą przechodzącą przez jakieś dwa punkty zbioru S, zaś X jest dowolnym punktem zbioru S, nieleżącym na prostej l. Wybieramy tę parę (X, l), dla której odległość punktu X od prostej l jest najmniejsza. Niech będzie to para (P, k), gdzie prosta k przechodzi przez punkty A i B ze zbioru S. Z założenia wynika, że na prostej k leży jeszcze jeden punkt C ze zbioru S. Niech Q będzie rzutem punktu P na prostą k. Punkt Q dzieli prostą k na dwie półproste. Na jednej z nich leżą co najmniej dwa punkty spośród trzech punktów A, B, C. Na rysunku 20.44 widzimy sytuację, w której punkt A leży na jednej z tych półprostych, a punkty B i C (w tej kolejności) leżą na drugiej. Inne sytuacje rozpatrujemy podobnie i zostawię to jako ćwiczenie. Niech wreszcie punkty R i T będą rzutami punktów B i Q na prostą PC. Wówczas nietrudno zauważyć, że $BR < QT < PQ$, skąd wynika, że w parze (B, PC) odległość punktu B od



Rys. 20.44

prostej PC jest mniejsza niż odległość punktu P od prostej k. Jest to sprzeczność z wyborem pary (P, k). Ta sprzeczność dowodzi, że przyjęte na początku dowodu założenie było niemożliwe. Zatem wszystkie punkty zbioru S są współliniowe.

Uwaga. To zadanie zostało sformułowane po raz pierwszy w roku 1893 przez znanego angielskiego matematyka Sylvestera. Pierwsze rozwiązanie podał Gallai w roku 1933. Pokazane tu rozwiązanie zostało znalezione przez Kellyego w roku 1948. To pokazuje, jak trudne jest to zadanie. Oczywiście nie można oczekiwać, by uczniowie sami je rozwiązali. Jest to zadanie, którego rozwiązanie musi być zaprezentowane uczniom na początku warsztatów lub na zajęciach przygotowujących do warsztatów. Jednak jest to zadanie bardzo szkoleniowe. Dowody geometryczne są bowiem dla uczniów bardzo przekonujące przez swoją wizualność. Interesujące jest również pokazanie uczniom, że pozornie proste zadanie może sprawić nawet bardzo dobrym matematykom spore trudności i zdarza się, że na rozwiązanie musimy czekać wiele lat.

3. Każdemu wierzchołkowi 100-kąta foremnego trzeba przyporządkować pewną dodatnią liczbę rzeczywistą. Czy możliwe jest takie przyporządkowanie, w którym każda liczba jest równa wartości bezwzględnej różnicy liczb, które z nią sąsiadują?

Rozwiązanie. Wybieramy ten wierzchołek A, któremu przyporządkowano największą liczbę. Niech będzie to liczba a. Oznaczmy literami b i c liczby przyporządkowane wierzchołkom, które sąsiadują z A. Możemy przy tym tak wybrać oznaczenia, by $b \geq c$. Wówczas $a = |b - c| = b - c$. Ponieważ $c > 0$, więc $b - c < b$, skąd wynika, że $a < b$. To jednak jest sprzeczne z wyborem wierzchołka A. Zatem takie przyporządkowanie, o jakie chodzi w zadaniu, jest niemożliwe.

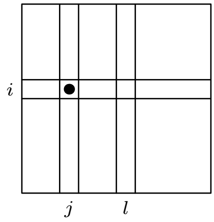
4. Na szachownicy o wymiarach $n \times n$ ustawiono pewną liczbę wież w taki sposób, że jeśli pole o współrzędnych (i, j) jest wolne, to w wierszu i-tym i w kolumnie j-tej znajduje się razem co najmniej n wież. Udowodnij, że na szachownicy znajduje się co najmniej $n^2/2$ wież.

Rozwiązanie. Wybieramy rząd (tzn. wiersz lub kolumnę) z najmniejszą liczbą wież. Niech np. będzie to wiersz, w którym znajduje się k wież. To znaczy, że w każdym wierszu i w każdej kolumnie znajduje się co najmniej k wież. Mamy dwa przypadki.

Przypadek 1. $k \geq \frac{n}{2}$. Wtedy w każdym wierszu znajduje się co najmniej $\frac{n}{2}$ wież. Sumując teraz liczby wież we wszystkich wierszach, przekonamy się, że liczba wież znajdujących się na całej szachownicy jest równa co najmniej

$$n \cdot \frac{n}{2} = \frac{n^2}{2}.$$

Przypadek 2. $k < \frac{n}{2}$. Załóżmy, że w wierszu i-tym znajduje się k wież. Popatrzmy na dwie przykładowe kolumny — kolumnę j-tą, w której na przecięciu z i-tym wierszem stoi wieża, oraz kolumnę l-tą, w której na przecięciu z i-tym wierszem nie ma wieży (rys. 20.45). W kolumnie j-tej znajduje się co najmniej k wież. Takich kolumn jest dokładnie k (bo w wierszu i-tym znajduje się dokładnie k wież). Zatem w takich kolumnach znajduje się łącznie co najmniej k^2 wież. Pole o współrzędnych (l, i) jest wolne. Z założenia wynika, że w wierszu i-tym i w kolumnie l-tej znajduje się łącznie co najmniej n wież. Ponieważ w wierszu i-tym znajduje się dokładnie k wież, więc w kolumnie l-tej



Rys. 20.45

znajduje się co najmniej $n-k$ wież. Takich kolumn jest dokładnie $n-k$. Zatem w takich kolumnach znajduje się łącznie $(n-k)^2$ wież.

Stąd wynika, że na całej szachownicy znajduje się łącznie co najmniej $k^2+(n-k)^2$ wież. Musimy więc pokazać, że dla dowolnej liczby k takiej, że $1 \le k \le n$ zachodzi nierówność

$$k^2+(n-k)^2 \ge \frac{n^2}{2}.$$

Przekształcamy tę nierówność w sposób równoważny:

$$\begin{gathered} k^2+n^2-2nk+k^2 \ge \frac{n^2}{2}, \\ 2n^2-4nk+4k^2 \ge n^2, \\ n^2-4nk+k^2 \ge 0, \\ (n-2k)^2 \ge 0. \end{gathered}$$

Ponieważ ostatnia nierówność jest prawdziwa dla dowolnych n i k, więc dowodzona nierówność jest też prawdziwa, co kończy dowód.

5. Udowodnij, że w każdym turnieju, w którym grało n zawodników, wszystkich zawodników można ustawić w ciąg $v_1, v_2, \ldots, v_n$ tak, by $v_1 \to v_2 \to \ldots \to v_n$.

Rozwiązanie. Wybieramy ze zbioru zawodników najdłuższy ciąg $v_1, v_2, \ldots, v_m$ taki, że

$$v_1 \to v_2 \to \ldots \to v_m.$$

Pokażemy, że $m=n$, tzn. w wybranym ciągu znajdują się wszyscy zawodnicy turnieju. Przypuśćmy zatem, że istnieje jakiś inny zawodnik v. Gdyby v wygrał z v_1, to moglibyśmy przedłużyć wybrany ciąg

$$v \to v_1 \to v_2 \to \ldots \to v_m,$$

co jest sprzeczne z założeniem o maksymalności tego ciągu. Zatem $v_1 \to v$. Przypuśćmy teraz, że zawodnik v wygrał z którymś zawodnikiem z wybranego ciągu. Weźmy takiego zawodnika o najmniejszym numerze, tzn. takiego zawodnika v_i, że $v \to v_i$ oraz liczba i jest najmniejszą możliwą taką liczbą. Wtedy oczywiście $i \ne 1$. Zatem $v_{i-1} \to v$. Tym razem też możemy przedłużyć wybrany ciąg:

$$v_1 \to v_2 \to \ldots \to v_{i-1} \to v \to v_i \to \ldots \to v_m.$$

Znów otrzymaliśmy sprzeczność z założeniem o maksymalności. Zatem zawodnik v nie mógł wygrać z żadnym zawodnikiem z naszego ciągu. W szczególności $v_m \to v$, co znów pozwala przedłużyć wybrany ciąg:

$$v_1 \to v_2 \to \ldots \to v_m \to v.$$

Otrzymujemy jeszcze raz sprzeczność z założeniem o maksymalności wybranego ciągu. Ta sprzeczność dowodzi, że przyjęte na początku dowodu założenie o istnieniu zawodnika v było niemożliwe, a więc w wybranym ciągu znajdują się wszyscy zawodnicy turnieju. To kończy dowód.

6. Zawodnik v wygrał w turnieju z zawodnikiem w **bezpośrednio**, jeśli $v \to w$, oraz wygrał **pośrednio**, jeśli istnieje taki zawodnik u, że $v \;\to\; u \;\to w$. Udowodnij, że w każdym turnieju istnieje zawodnik, który z każdym innym wygrał bezpośrednio lub pośrednio.

Rozwiązanie. Wybieramy zawodnika v, który wygrał najwięcej gier. Niech S będzie zbiorem zawodników, którzy przegrali z v. Jeśli są to wszyscy pozostali zawodnicy (oprócz zawodnika v), to zawodnik v jest tym zawodnikiem, którego szukamy. Wygrał on bowiem z każdym innym bezpośrednio. Jeśli zaś istnieje jakiś inny zawodnik w, to oczywiście $w \to v$. Gdyby zawodnik w wygrał z każdym zawodnikiem ze zbioru S, to miałby większą od v liczbę wygranych gier — wygrałby bowiem z tymi samymi zawodnikami co v i jeszcze wygrałby z v. Zatem istnieje w zbiorze S zawodnik u, który wygrał z w. Mamy więc $v \to u \to w$. Pokazaliśmy, że zawodnik v wygrał pośrednio z każdym zawodnikiem spoza zbioru S; wygrał więc z każdym bezpośrednio lub pośrednio.

7. W pewnym kraju jest skończona liczba miast, które połączono siecią dróg jednokierunkowych. Wiadomo, że każde dwa miasta łączy pewna droga jednokierunkowa. Udowodnij, że istnieje miasto, z którego można odbyć podróż do każdego innego miasta.

Rozwiązanie. Wybieramy miasto A, z którego wychodzi najwięcej dróg. Niech S będzie zbiorem wszystkich miast, do których można dojechać z miasta A bezpośrednią drogą. Jeśli każde miasto (oprócz A) należy do zbioru S, to A jest szukanym miastem. W przeciwnym razie bierzemy dowolne miasto B nienależące do zbioru S. Pokażemy, że w zbiorze S istnieje miasto C, z którego prowadzi bezpośrednia droga do B (a więc z miasta A można dojechać do B przez miasto C). Gdyby bowiem tak nie było, to z miasta B prowadziłaby bezpośrednia droga do każdego miasta ze zbioru S oraz do miasta A, wbrew temu, że z miasta A wychodzi najwięcej dróg.

8. W turnieju uczestniczy n graczy i każdych dwóch gra ze sobą co najwyżej raz. Udowodnij, że jeśli nie istnieje trójka graczy, którzy rozegrali ze sobą wszystkie trzy mecze, to łączna liczba rozegranych meczów jest niewiększa od $\frac{n^2}{4}$.

Rozwiązanie. Inaczej mówiąc, jeśli w grafie mającym n wierzchołków nie ma trójelementowej kliki, to liczba krawędzi jest niewiększa od $\frac{n^2}{4}$. Wybieramy wierzchołek v największego stopnia. Niech $d(v) = k$ i niech S będzie zbiorem wierzchołków połączonych krawędzią z wierzchołkiem v oraz niech T będzie zbiorem wierzchołków różnych od v i niepołączonych krawędzią z v. Zliczamy teraz krawędzie. Zauważmy, że każda krawędź ma jeden koniec w wierzchołku v lub w którymś wierzchołku ze zbioru T. Zbiór T ma $n-k-1$ elementów. Z każdego wierzchołka zbioru T wychodzi co najwyżej k krawędzi. Zatem łączna liczba krawędzi jest niewiększa od $k + (n - k - 1) \cdot k$. Mamy więc udowodnić, że

$$k + (n - k - 1)k \leq \frac{n^2}{4}.$$

Przekształcamy tę nierówność w sposób równoważny:

$$\begin{gathered} 4k + 4k(n - k - 1) \leq n^2, \\ 4kn - 4k^2 \leq n^2, \\ n^2 - 4kn + 4k^2 \geq 0, \\ (n - 2k)^2 \geq 0. \end{gathered}$$

To kończy dowód.

Uwaga. Zadanie to jest znane w teorii grafów jako twierdzenie Mantela. Zostało ono udowodnione w 1906 roku. Znamy wiele jego dowodów, kilka szczególnie pomysłowych można znaleźć w [Księga]. Tam też znajduje się dowód twierdzenia Turána, będącego uogólnieniem twierdzenia Mantela. Przyjrzyjmy się nieco dokładniej twierdzeniu Mantela. Przypuśćmy zatem, że graf G mający n wierzchołków nie ma trójkątów (tzn. trójelementowych klik). Jeśli n jest liczbą parzystą, $n = 2m$, to liczba k krawędzi spełnia nierówność $k \leq \frac{n^2}{4} = m^2$. Powstaje pytanie, czy nie można udowodnić twierdzenia mocniejszego, to znaczy, czy tej liczby krawędzi nie można bardziej ograniczyć. Okazuje się, że nie. Wyobraźmy sobie, że wierzchołki grafu G dzielą się na dwa rozłączne zbiory A i B, mające po m wierzchołków. Niech następnie każdy wierzchołek zbioru A będzie połączony krawędzią z każdym wierzchołkiem zbioru B; niech to będą wszystkie krawędzie naszego grafu. Wówczas w tak skonstruowanym grafie G nie ma trójkątów i istnieje m^2 krawędzi.

Przypuśćmy teraz, że n jest liczbą nieparzystą: $n = 2m + 1$. Wtedy liczba k krawędzi spełnia nierówność

$$k \leq \frac{n^2}{4} = \frac{(2m+1)^2}{4} = \frac{4m^2 + 4m + 1}{4} = m^2 + m + \frac{1}{4}.$$

Ponieważ k jest liczbą całkowitą, więc $k \leq m^2 + m$. Znów skonstruujemy graf G bez trójkątów, mający $2m+1$ wierzchołków i m^2+m krawędzi. Powtarzamy powyższą konstrukcję, z tym tylko, że tym razem zbiór A ma $m+1$ elementów, a zbiór B ma m elementów. W dalszym ciągu graf G nie ma trójkątów. Ma $2m+1$ wierzchołków i $(m+1)m = m^2+m$ krawędzi.

9. W każdej z trzech szkół uczy się n uczniów. Każdy uczeń ma w pozostałych dwóch szkołach razem co najmniej $n+1$ znajomych. Udowodnij, że z każdej szkoły można wybrać po jednym uczniu, tak, że wszyscy wybrani uczniowie się znają.

Rozwiązanie. Wybieramy ucznia mającego największą liczbę znajomych w jednej z pozostałych szkół. Przypuśćmy, że tym uczniem jest uczeń A ze szkoły S_1. Zakładamy, że w szkole S_2 zna on k uczniów, przy czym liczba k jest wspomnianą największą liczbą znajomych. Ponieważ uczeń A nie może znać $n+1$ uczniów w szkole S_2, więc zna co najmniej jednego ucznia w szkole S_3. Niech tym uczniem będzie B. Uczeń B zna co najwyżej k osób w szkole S_1, a więc zna co najmniej $n+1-k$ uczniów w szkole S_2. Gdyby znajomi uczniów A i B w szkole S_2 tworzyli dwa zbiory rozłączne, to szkoła S_2 musiałaby mieć co najmniej $k+n+1-k = n+1$ uczniów, co jest sprzeczne z założeniem. Zatem w szkole S_2 istnieje uczeń znający zarówno A jak i B. Wraz z uczniami A i B tworzy on szukaną trójkę uczniów.

10. W turnieju uczestniczyło n zawodników. Każdy z nich rozegrał jedną partię z każdym innym zawodnikiem, nie było remisów. Udowodnij, że albo można podzielić uczestników turnieju na takie dwie grupy A i B, że każdy zawodnik z grupy A wygrał z każdym zawodnikiem z grupy B, albo można ustawić uczestników w ciąg $u_1, u_2, \ldots, u_n$ tak, że u_1 wygrał z u_2, u_2 wygrał z u_3, …, u_{n-1} wygrał z u_n, u_n wygrał z u_1.

Rozwiązanie. Rozpatrujemy następujące przypadki.

Przypadek 1. Nie istnieje żaden cykl długości $m \geq 3$. Udowodnimy, że wtedy istnieje zawodnik u, który wygrał ze wszystkimi innymi zawodnikami. Niech bowiem u będzie zawodnikiem, który wygrał największą liczbę partii. Jeśli zawodnik u nie wygrał ze wszystkimi innymi zawodnikami, to istnieje zawodnik v, który wygrał z u, czyli $v \to u$. Niech teraz w będzie dowolnym zawodnikiem, z którym u wygrał, czyli $u \to w$. Gdyby w wygrał z v, to mielibyśmy cykl długości 3, mianowicie $v \to u \to w \to v$. Zatem v wygrał z w.

Udowodniliśmy, że zawodnik v wygrał ze wszystkimi zawodnikami, z którymi wygrał u oraz wygrał też z samym zawodnikiem u. Zatem zawodnik v wygrał więcej partii niż zawodnik u, co jest sprzeczne z założeniem, że u wygrał najwięcej partii. Ta sprzeczność wynikła z przypuszczenia, że zawodnik u nie wygrał ze wszystkimi innymi zawodnikami. Pokazaliśmy w ten sposób, że zawodnik u rzeczywiście wygrał ze wszystkimi zawodnikami. Szukany podział zbioru zawodników na dwie grupy otrzymujemy, biorąc grupę A składającą się tylko z zawodnika u i grupę B składającą się z pozostałych zawodników.

Istnienia takiego podziału zbioru zawodników w tym przypadku można dowieść w inny sposób. Z zadania 5 wynika, że wszystkich zawodników można ustawić w taki ciąg $u_1, u_2, \ldots, u_n$, że

$$u_1 \to u_2 \to \ldots \to u_n.$$

Pokażemy, że jeśli $i < j$, to $u_i \to u_j$. Jeśli $j = i+1$, to jest to oczywiste. Jeśli zaś $i+1 < j$ oraz $u_j \to u_i$, to otrzymalibyśmy cykl

$$u_i \to \ldots \to u_j \to u_i.$$

Teraz dla dowolnego $i = 1, 2, \ldots, n-1$ wystarczy przyjąć, że zbiór A składa się z zawodników $u_1, \ldots, u_i$, a zbiór B z pozostałych zawodników.

Przypadek 2. Istnieje cykl długości n. Wtedy oczywiście wszystkich zawodników można ustawić w ciąg $u_1, u_2, \ldots, u_n$ tak, że $u_1 \to u_2 \to \ldots \to u_n \to u_1$.

Przypadek 3. Istnieją cykle długości $m > 1$, ale nie istnieje cykl długości n. Niech wtedy

$$u_1 \to u_2 \to \ldots \to u_m \to u_1$$

będzie najdłuższym cyklem. Oczywiście $m < n$. Niech v będzie zawodnikiem, który nie występuje w tym cyklu. Przypuśćmy, że $u_1 \to v$. Gdyby $v \to u_2$, to otrzymalibyśmy dłuższy cykl:

$$u_1 \to v \to u_2 \to \ldots \to u_n \to u_1.$$

Zatem $u_2 \to v$. Gdyby $v \to u_3$, to znów mielibyśmy dłuższy cykl:

$$u_1 \to u_2 \to v \to u_3 \to \ldots \to u_n \to u_1.$$

Zatem $u_3 \to v$. W podobny sposób pokazujemy kolejno, że każdy zawodnik z cyklu wygrał z v. W taki sam sposób pokazujemy, że jeśli $v \to u_1$, to zawodnik v wygrał ze wszystkimi zawodnikami z cyklu.

Zbiór zawodników niewystępujących w cyklu $\{u_1, \ldots, u_n\}$ dzielimy na dwa zbiory:

$$A_0 = \{v: \ v \to u_1\}, \quad B_0 = \{v: \ u_1 \to v\}.$$

Każdy zawodnik ze zbioru A_0 wygrał ze wszystkimi zawodnikami z cyklu, a każdy zawodnik ze zbioru B_0 przegrał ze wszystkimi zawodnikami z cyklu. Pokażemy następnie, że każdy zawodnik ze zbioru A_0 wygrał z każdym zawodnikiem ze zbioru B_0. Niech bowiem $u \in A_0$ i $v \in B_0$. Gdyby $v \to u$, to mielibyśmy cykl

$$u \to u_1 \to u_2 \to \ldots \to u_n \to v \to u,$$

długości większej od m. Zatem rzeczywiście $u \to v$.

Teraz wreszcie możemy zdefiniować podział na zbiory A i B. Jeśli zbiór B_0 jest niepusty, to do zbioru A zaliczamy wszystkich zawodników ze zbioru A_0 i wszystkich zawodników z cyklu, a do zbioru B zaliczamy wszystkich zawodników ze zbioru B_0. Jeśli zaś zbiór B_0 jest pusty, to przyjmujemy $A = A_0$ oraz $B = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$.

11. Dany jest graf mający $n \geq 3$ wierzchołków i co najmniej n krawędzi. Udowodnij, że w tym grafie istnieje cykl, to znaczy ciąg $v_1, v_2, \ldots, v_m$ wierzchołków takich, że v_1 sąsiaduje z v_2, v_2 sąsiaduje z v_3, $\ldots$, v_{m-1} sąsiaduje z v_m oraz v_m sąsiaduje z v_1.

Rozwiązanie. Wybieramy najdłuższą drogę w grafie, to znaczy najdłuższy ciąg wierzchołków $v_1, v_2, \ldots, v_k$ takich, że v_1 sąsiaduje z v_2, v_2 sąsiaduje z $v_3, \ldots, v_{k-1}$ sąsiaduje z v_k. Popatrzmy na wierzchołek v_1. Jest on połączony z v_2. Mamy teraz następujące przypadki.

Przypadek 1. Wierzchołek v_1 jest połączony z jeszcze jednym wierzchołkiem v_i (gdzie $i > 2$) wybranej drogi. Wówczas mamy cykl $v_1, v_2, \ldots, v_i$.

Przypadek 2. Wierzchołek v_1 jest połączony z jeszcze jednym wierzchołkiem v, nienależącym do wybranej drogi. Wówczas mamy drogę $v, v_1, v_2, \ldots, v_k$ dłuższą od wybranej drogi, co jest niemożliwe.

Przypadek 3. Wierzchołek v_1 jest połączony wyłącznie z wierzchołkiem v_2. Usuwamy teraz z grafu wierzchołek v_1 i krawędź łączącą go z wierzchołkiem v_2. Usunęliśmy jeden wierzchołek i jedną krawędź, więc w otrzymanym grafie nadal liczba krawędzi jest równa co najmniej liczbie wierzchołków. Powtarzamy powyższe rozumowanie w nowym grafie. Albo znajdziemy cykl, albo znów usuniemy jeden wierzchołek i jedną krawędź. Powtarzamy to rozumowanie dotąd, aż znajdziemy cykl lub otrzymamy graf mający 3 wierzchołki i 3 krawędzie. Oczywiście w tym grafie istnieje cykl trójelementowy.

12. W konferencji bierze udział $2n$ osób. Każdy uczestnik konferencji ma wśród pozostałych uczestników co najmniej n znajomych. Udowodnij, że wszystkich uczestników konferencji można zakwaterować w pokojach dwuosobowych tak, by każdy uczestnik mieszkał ze swoim znajomym.

Rozwiązanie. Wybieramy największą liczbę rozłącznych par znajomych:

$$\{a_1, b_1\}, \{a_2, b_2\}, \ldots, \{a_m, b_m\}.$$

Jeśli $m = n$, to te pary kwaterujemy w oddzielnych pokojach. Niech więc $m < n$. Z maksymalności m wynika, że żadne dwie pozostałe osoby nie znają się. Wybieramy dwie z nich: x i y. W każdej parze $\{a_i, b_i\}$ zliczamy znajomych x i y. Jeśli w każdej parze osoby x i y znają co najwyżej 2 osoby, to mają łącznie co najwyżej $2m$ znajomych, wbrew założeniu. Istnieje zatem para, w której znają łącznie co najmniej 3 osoby. Bez zmniejszenia ogólności możemy założyć, że osoba x zna obie osoby a_i i b_i, a osoba y zna osobę a_i. Zastępując parę $\{a_i, b_i\}$ parami $\{x, b_i\}$ oraz $\{y, a_i\}$, otrzymujemy $m + 1$ rozłącznych par znajomych, wbrew wyborowi liczby m. Otrzymana sprzeczność dowodzi, że $m = n$.

Uwaga. Można udowodnić więcej. Istnieje mianowicie twierdzenie mówiące, że uczestników konferencji można posadzić przy okrągłym stole w taki sposób, by każdy uczestnik siedział między swoimi znajomymi (jest to tzw. twierdzenie Diraca, zob. [Wilson]). Jeśli zakwaterujemy teraz w oddzielnych pokojach kolejne pary siedzących obok siebie osób, to każdy uczestnik konferencji będzie mieszkał ze swoim znajomym.

13. W pewnej grupie kn osób każda osoba zna więcej niż $(k-1)n$ innych. Udowodnij, że można z tej grupy wybrać $k+1$ osób, z których każde dwie się znają.

Rozwiązanie. Wybieramy największą liczbę m taką, że istnieje zbiór $\{A_1, \ldots, A_m\}$ osób, w którym każde dwie osoby znają się (tzn. wybieramy największą klikę). Niech P będzie zbiorem pozostałych osób. Niech następnie Z_i będzie zbiorem osób, które zna osoba A_i i niech N_i będzie zbiorem osób, różnych od A_i, których osoba A_i nie zna (dla $i = 1, \ldots, m$). Wtedy:

$$|Z_i| + |N_i| + 1 = kn,$$

czyli

$$|Z_i| = kn - 1 - |N_i|.$$

Ponieważ $|Z_i| > (k-1)n$, więc $kn - 1 - |N_i| > (k-1)n$. Stąd wynika, że

$$|N_i| < kn - 1 - (k-1)n = kn - 1 - kn + n = n - 1.$$

Ponadto zbiory $N_1, \ldots, N_m$ wyczerpują cały zbiór P. Mamy więc

$$kn = m + |P| \leq m + |N_1| + \ldots + |N_m| < m + m(n-1) = mn.$$

Zatem $k < m$, czyli $k+1 \leq m$, co kończy dowód.

Uwaga. Jeśli przyjmiemy $k = 3$ oraz $n = 33$, to otrzymamy następujące zadanie:

W pewnej grupie 99 osób każda osoba zna więcej niż 66 innych (to znaczy co najmniej 67 innych). Udowodnij, że można z tej grupy wybrać cztery osoby, z których każde dwie się znają.

W zbiorze zadań [Straszewicz] (tom IV, str. 13) znajduje się następujące zadanie:

14. Na sali znajduje się 100 osób, z których każda zna co najmniej 67 innych. Udowodnij, że jest na tej sali taka czwórka osób, w których każde dwie osoby się znają. Zakładamy, że jeśli osoba A zna osobę B, to osoba B zna osobę A.

Rozwiązanie. Rozwiążemy zadanie ogólniejsze, będące innym wariantem zadania 13.

15. W pewnej grupie $kn+1$ osób każda osoba zna więcej niż $(k-1)n$ innych. Udowodnij, że można z tej grupy wybrać $k+1$ osób, z których każde dwie się znają.

Powtarzamy rozwiązanie zadania 13. Wybieramy największą liczbę m taką, że istnieje zbiór $\{A_1, \ldots, A_m\}$ osób, w którym każde dwie osoby się znają (tzn. wybieramy największą klikę). Niech P będzie zbiorem pozostałych osób. Niech następnie Z_i będzie zbiorem osób, które zna osoba A_i i niech N_i będzie zbiorem osób, różnych od A_i, których osoba A_i nie zna (dla $i = 1, \ldots, m$). Wtedy:

$$|Z_i| + |N_i| + 1 = kn + 1,$$

czyli

$$|Z_i| = kn + 1 - 1 - |N_i| = kn - |N_i|.$$

Ponieważ $|Z_i| > (k-1)n$, więc $kn - |N_i| > (k-1)n$. Stąd wynika, że

$$|N_i| < kn - (k-1)n = kn - kn + n = n,$$

czyli $|N_i| \leq n-1$. Ponadto zbiory $N_1, \ldots, N_m$ wyczerpują cały zbiór P. Mamy więc

$$kn+1 = m+|P| \leq m+|N_1|+\ldots+|N_m| \leq m+m(n-1) = mn.$$

Stąd

$$m \geq \frac{kn+1}{n} = k+\frac{1}{n} > k.$$

Zatem $m \geq k+1$, co kończy dowód.

Przyjmując teraz $k=3$ i $n=33$ otrzymujemy rozwiązanie zadania 14.

W zbiorze zadań olimpijskich [Straszewicz] (tom IV, str. 13) znajduje się także następujące zadanie:

16. Na sali znajduje się 100 osób, z których każda zna co najmniej 66 osób spośród pozostałych 99 osób. Zakładamy, że jeśli osoba A zna osobę B, to również osoba B zna osobę A. Udowodnij, że możliwa jest wtedy taka sytuacja, że w każdej czwórce owych osób któreś dwie osoby się nie znają.

Rozwiązanie. Rozważmy grupę 100 osób, składającą się z trzech rozłącznych grup A, B i C. Grupy A i B liczą po 33 osoby, w grupie C są 34 osoby. Załóżmy następnie, że każda osoba nie zna nikogo ze swojej grupy i zna wszystkie osoby spoza swojej grupy. Wtedy każda osoba zna co najmniej 66 osób (osoby z grup A i B znają nawet po 67 osób). Ponadto nie istnieje czwórka osób, w której wszyscy by się znali: w każdej czwórce osób znajdują się bowiem co najmniej dwie osoby z tej samej grupy.

Uwaga. Zadanie 16 pokazuje, że zadania 14 nie można wzmocnić przez osłabienie założeń (i zachowanie tej samej tezy). Pokażemy teraz, że w ten sposób nie można także wzmocnić zadań 13 i 15.

17. W pewnej grupie kn osób każda osoba zna co najmniej $(k-1)n$ innych. Wykaż, że możliwa jest sytuacja, iż w każdym zbiorze $k+1$ osób wybranych z tej grupy, jakieś dwie się nie znają. Inaczej mówiąc, w tej grupie może nie istnieć klika składająca się z $k+1$ osób.

Rozwiązanie. Rozważmy grupę kn osób składającą się z k parami rozłącznych grup po n osób. Załóżmy, że każda osoba nie zna nikogo ze swojej grupy i zna wszystkie osoby z pozostałych grup. Wtedy każda osoba zna dokładnie $(k-1)n$ osób i oczywiście nie istnieje klika składająca się z $k+1$ osób. Jeśli bowiem wybierzemy dowolnie $k+1$ osób, to wśród wybranych osób znajdą się dwie osoby z tej samej grupy i te dwie osoby się nie znają.

18. W pewnej grupie $kn+1$ osób każda osoba zna co najmniej $(k-1)n$ innych. Wykaż, że możliwa jest sytuacja, iż w każdym zbiorze $k+1$ osób wybranych z tej grupy, jakieś dwie się nie znają. Inaczej mówiąc, w tej grupie może nie istnieć klika składająca się z $k+1$ osób.

Rozwiązanie. Rozważmy grupę kn osób składającą się z k parami rozłącznych grup; w jednej grupie jest $n+1$ osób, w pozostałych po n osób. Załóżmy, że każda osoba nie zna nikogo ze swojej grupy i zna wszystkie osoby z pozostałych grup. Wtedy każda osoba zna co najmniej $(k-1)n$ osób (osoby spoza największej grupy znają nawet po $(k-1)n+1$ osób) i oczywiście nie istnieje klika składająca się z $k+1$ osób. Jeśli bowiem wybierzemy dowolnie $k+1$ osób, to wśród wybranych osób znajdą się dwie osoby z tej samej grupy i te dwie osoby się nie znają.

Pokażemy, że w zadaniu 13 nie można wzmocnić tezy (przy zachowaniu tych samych założeń). Mamy bowiem następujące zadanie.

19. W pewnej grupie kn osób każda osoba zna więcej niż $(k-1)n$ innych. Wykaż, że możliwa jest sytuacja, iż w każdym zbiorze $k+2$ osób wybranych z tej grupy, jakieś dwie się nie znają. Inaczej mówiąc, w tej grupie może nie istnieć klika składająca się z $k+2$ osób.

Rozwiązanie. Przypuśćmy, że $n = k+1$. Rozważmy grupę $kn = k(k+1)$ osób składającą się z $k+1$ grup po k osób: $G_1, G_2, \ldots, G_{k+1}$. Załóżmy następnie, że każda osoba zna wszystkie osoby spoza swojej grupy i nie zna nikogo z grupy, do której należy. Wówczas każda osoba zna dokładnie k^2 osób. Mamy ponadto

$$(k-1)n = (k-1)(k+1) = k^2 - 1 < k^2.$$

Zatem każda osoba zna więcej niż $(k-1)n$ innych osób. Nie istnieją natomiast $k+2$ osoby, z których każde dwie się znają — wśród dowolnych $k+2$ osób zawsze znajdują się co najmniej dwie z jednej grupy i te dwie się nie znają.

Uwaga. W rozwiązaniu powyższego zadania do jednej z tych $k+1$ grup możemy dołączyć jedną osobę. Założenia i teza zadania pozostaną spełnione. To pokazuje, że w zadaniu 15 także nie można wzmocnić tezy.

20. Na przyjęciu spotkało się co najmniej $m+1$ osób (przy czym $m \geq 3$). Każda grupa licząca dokładnie m uczestników spotkania ma wśród obecnych dokładnie jednego wspólnego znajomego.

a) Udowodnij, że wśród obecnych nie istnieje grupa licząca więcej niż $m+1$ osób, w której wszyscy się znają.
b) Udowodnij, że każda osoba zna co najmniej jedną osobę wśród obecnych.
c) Udowodnij, że wśród obecnych istnieje grupa licząca trzy osoby, w której każde dwie się znają.
d) Udowodnij, że wśród obecnych istnieje grupa licząca $m+1$ osób, w której wszyscy się znają.
e) Udowodnij, że na przyjęciu było dokładnie $m+1$ osób i wszyscy się znali.

Inaczej mówiąc, naszym celem jest wykazanie, że wszyscy uczestnicy przyjęcia tworzą graf pełny mający dokładnie $m+1$ wierzchołków.

Rozwiązanie. a) Mamy pokazać, że nie istnieje klika składająca się z więcej niż $m+1$ osób. Przypuśćmy zatem, że istnieje $(m+2)$-osobowa klika, w skład której wchodzą osoby $A_1, A_2, \ldots, A_m, A_{m+1}, A_{m+2}$. Wtedy jednak osoby $A_1, A_2, \ldots, A_m$ mają dwóch wspólnych znajomych: A_{m+1} i A_{m+2}, co przeczy założeniu.

b) Niech osoba A będzie dowolnym uczestnikiem spotkania. Weźmy następnie dowolne $m-1$ osób $A_1, A_2, \ldots, A_{m-1}$ różnych od A. Wtedy osoby $A, A_1, A_2, \ldots, A_{m-1}$ mają wspólnego znajomego B. W szczególności osoby A i B się znają.

c) Weźmy dwie osoby A i B, które się znają. Weźmy następnie dowolne $m-2$ osoby $A_1, A_2, \ldots, A_{m-2}$, różne od osób A i B. Wtedy osoby $A, B, A_1, A_2, \ldots, A_{m-2}$ mają wspólnego znajomego C. W szczególności osoby A, B i C tworzą grupę, w której każde dwie się znają.

d) Weźmy teraz klikę mającą najwięcej osób. Niech będzie to klika k-osobowa, składająca się z osób $A_1, A_2, \ldots, A_k$. Jeśli $k \leq m$, to dodajmy do tej kliki dowolne $m-k$ osób $B_1, B_2, \ldots, B_{m-k}$. Otrzymana grupa m osób $A_1, A_2, \ldots, A_k, B_1, B_2, \ldots, B_{m-k}$ ma wspólnego znajomego C. Ale wtedy osoby $A_1, A_2, \ldots, A_k, C$ tworzą klikę liczącą $k+1$

osób, wbrew założeniu o maksymalności k. Zatem niemożliwe jest, by $k \leq m$, skąd wynika, że $k \geq m+1$. Istnieje zatem klika licząca co najmniej $m+1$ osób. Wraz z punktem a) pokazuje to, że największa klika liczy dokładnie $m+1$ osób.

e) Wiemy już, że wśród obecnych na przyjęciu znajduje się klika licząca $m+1$ osób, tzn. grupa $m+1$ osób $A_1, A_2, \ldots, A_m, A_{m+1}$, wśród których każde dwie się znają. Pokażemy, że są to wszystkie osoby na tym przyjęciu. Przypuśćmy zatem, że istnieje osoba B poza tą kliką. Wiemy już z punktu a), że osoba B nie może znać wszystkich osób z tej kliki. Przypuśćmy zatem, że nie zna osoby A_{m+1}. Gdyby znała wszystkie inne osoby, to grupa osób $A_1, A_2, \ldots, A_m$ miałaby dwóch wspólnych znajomych: A_{m+1} i B. Zatem osoba B nie zna co najmniej dwóch osób z kliki. Możemy przyjąć, że są to osoby A_m i A_{m+1}. Grupa m osób $A_1, A_2, \ldots, A_{m-1}, B$ ma wspólnego znajomego C. Nie może to być żadna z osób A_m i A_{m+1}, bo te osoby nie znają B. Zatem osoba C nie jest w naszej klice. Ale wówczas grupa m osób $A_3, A_4, \ldots, A_{m-1}, A_m, A_{m+1}, C$ ma dwóch wspólnych znajomych — A_1 i A_2. Jest to jednak sprzeczne z założeniem. Otrzymana sprzeczność była wynikiem przyjętego założenia, że poza kliką $A_1, A_2, \ldots, A_m, A_{m+1}$ na przyjęciu były jakieś inne osoby. Tak więc na przyjęciu było tylko $m+1$ osób i wszystkie się znały.

21. Dany jest graf G taki, że każde dwa wierzchołki tego grafu mają nieparzystą liczbę wspólnych sąsiadów. Udowodnij, że wtedy stopień każdego wierzchołka tego grafu jest liczbą parzystą.

Rozwiązanie. Przypuśćmy, że stopień wierzchołka v jest nieparzysty. Niech S będzie zbiorem wszystkich sąsiadów wierzchołka v. W zbiorze S każdy wierzchołek ma nieparzystą liczbę sąsiadów:. Jeśli bowiem wierzchołek w należy do zbioru S (to znaczy jest sąsiadem wierzchołka v), to sąsiedzi wierzchołka w w zbiorze S są wspólnymi sąsiadami wierzchołków v i w. Potraktujmy zbiór S wraz z krawędziami z grafu G jako nowy graf. Ma on nieparzystą liczbę wierzchołków i wszystkie są nieparzystego stopnia. To jednak przeczy lematowi o uściskach dłoni. Ta sprzeczność dowodzi, że stopień wierzchołka v musiał być parzysty. To kończy dowód.

22. W pewnej grupie $2n$ osób każda osoba zna parzystą liczbę osób. Udowodnij, że dla każdej osoby A istnieje osoba B taka, że osoby A i B mają parzystą liczbę (być może zerową) wspólnych znajomych.

Rozwiązanie. Niech osoby $A_1, A_2, \ldots, A_{2m}$ będą znajomymi osoby A. Ponieważ w rozważanej grupie jest parzysta liczba osób, więc istnieje nieparzysta liczba osób, których A nie zna. Niech będą to osoby $B_1, B_2, \ldots, B_{2n-2m-1}$. W szczególności istnieje co najmniej jedna taka osoba. Oznaczmy literą S grupę tych osób, których A nie zna. Niech teraz d_i będzie liczbą znajomych osoby B_i wśród pozostałych osób ze zbioru S. Gdyby wszystkie liczby d_i były nieparzyste, to ich suma $d_1 + d_2 + \ldots + d_{2n-2m-1}$ też byłaby nieparzysta: suma nieparzystej liczby liczb nieparzystych jest liczbą nieparzystą. Jednakże ta suma jest podwojoną liczbą par znajomych w zbiorze S — każdą taką parę liczyliśmy bowiem dwukrotnie. Stąd wynika, że w grupie S istnieje osoba B_j mająca parzystą liczbę znajomych w tej grupie, ma zatem także parzystą liczbę znajomych wśród osób $A_1, A_2, \ldots, A_{2m}$. Osoby A i B_j mają więc parzystą liczbę wspólnych znajomych.

23. Dany jest graf G, w którym stopień każdego wierzchołka jest równy k. Ponadto dowolne dwa wierzchołki mają dokładnie dwóch wspólnych sąsiadów. Udowodnij, że liczba wierzchołków tego grafu jest równa $\frac{k^2-k+2}{2}$.

Rozwiązanie. Niech n będzie liczbą wierzchołków naszego grafu. Weźmy dowolny wierzchołek v naszego grafu i zdefiniujmy następujące dwa zbiory wierzchołków: zbiór A jest to zbiór sąsiadów wierzchołka v, zbiór B jest to zbiór wierzchołków różnych od v i niesąsiednich z v. Wówczas

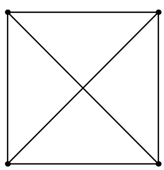
$$|A| = k \quad \text{oraz} \quad |B| = n - k - 1.$$

Zliczamy na dwa sposoby krawędzie łączące wierzchołki zbiorów A i B.

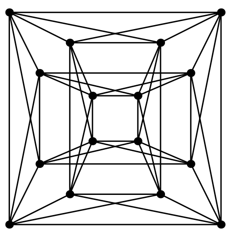
- Każdy wierzchołek w ze zbioru A jest połączony z wierzchołkiem v i z dwoma innymi wierzchołkami ze zbioru A (bo ma dwóch wspólnych sąsiadów z wierzchołkiem v). Zatem z wierzchołka w wychodzą $k - 3$ krawędzie do wierzchołków zbioru B. Stąd wynika, że liczba krawędzi łączących wierzchołki zbiorów A i B jest równa $k(k - 3)$.
- Każdy wierzchołek u ze zbioru B ma dokładnie dwóch sąsiadów w zbiorze A, bo są to wspólni sąsiedzi z wierzchołkiem v. Zatem liczba krawędzi łączących wierzchołki zbiorów A i B jest równa $2(n - k - 1)$.

Stąd wynika, że $k(k - 3) = 2(n - k - 1)$. Po nietrudnych przekształceniach otrzymujemy $n = \frac{k^2-k+2}{2}$.

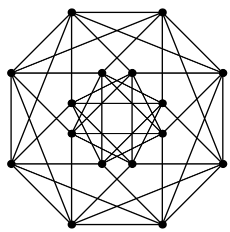
Uwaga. Można udowodnić (ale jest to bardzo trudne), że istnieją dokładnie trzy grafy spełniające warunki zadania. Pierwszym (dla $k = 3$) jest graf pełny mający 4 wierzchołki (rys. 20.46). Dwa następne istnieją dla $k = 6$. Mają one po 16 wierzchołków i 48 krawędzi. A oto one (rys. 20.47 i 20.48).



Rys. 20.46



Rys. 20.47



Rys. 20.48

24. Na przyjęciu spotkało się n osób. Wśród dowolnych czterech osób znajduje się co najmniej jedna znająca pozostałe trzy osoby. Udowodnij, że na przyjęciu jest osoba znająca wszystkie inne.

Rozwiązanie. Jeśli wszystkie osoby się znają, to każda z nich zna pozostałe. Przypuśćmy więc, że osoby A i B się nie znają. Weźmy dowolne dwie inne osoby C i D. W czwórce osób A, B, C i D co najmniej jedna zna pozostałe. Nie może to być ani osoba A, ani osoba B. Przypuśćmy, że C zna trzy pozostałe osoby. Pokażemy, że C zna wszystkie osoby obecne na przyjęciu. Niech E będzie dowolną osobą. Udowodnimy, że C zna E. W czwórce osób A, B, C i E co najmniej jedna zna pozostałe. Musi to być C lub E. W obu przypadkach osoby C i E się znają.

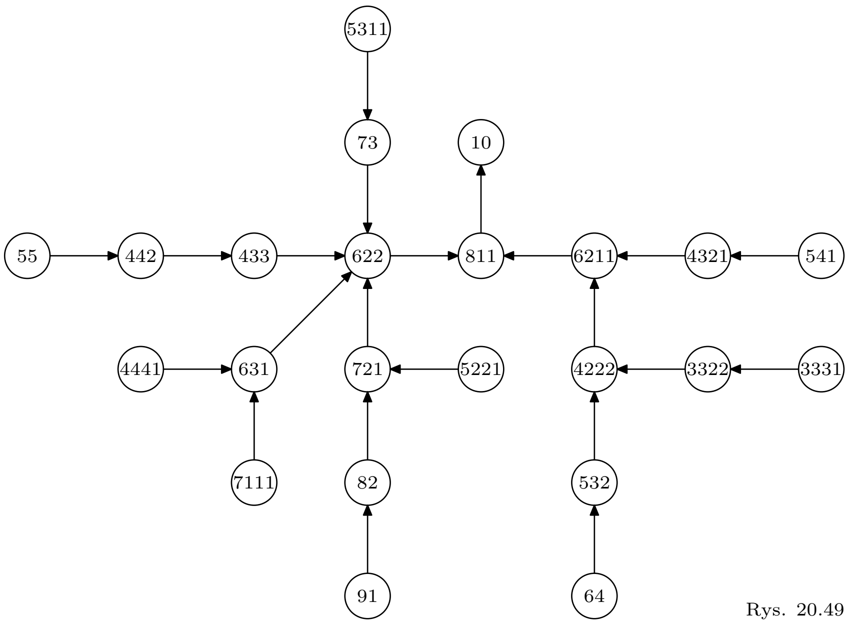
Uwaga. Można udowodnić, że co najmniej $n - 3$ osoby znają wszystkie pozostałe osoby obecne na przyjęciu. Dowód tego uogólnienia zadania pozostawię jako ćwiczenie.

25. W czterech pudełkach znajduje się 10 cukierków. W jednym ruchu możemy wziąć po jednym cukierku z dwóch różnych pudełek i włożyć je do trzeciego pudełka. Czy, wykonując takie ruchy, możemy przełożyć wszystkie cukierki do jednego pudełka?

Rozwiązanie. Są 23 podziały liczby 10 na sumę co najwyżej czterech składników:

10	$6+4$	$5+5$	$4+4+2$
$9+1$	$6+3+1$	$5+4+1$	$4+4+1+1$
$8+2$	$6+2+2$	$5+3+2$	$4+3+3$
$8+1+1$	$6+2+1+1$	$5+3+1+1$	$4+3+2+1$
$7+3$		$5+2+2+1$	$4+2+2+2$
$7+2+1$			$3+3+3+1$
$7+1+1+1$			$3+3+2+2$

Sposób dojścia z każdego podziału do 10 można przedstawić za pomocą grafu skierowanego pokazanego na rysunku 20.49.



Rys. 20.49

Inny sposób rozwiązania. Udowodnimy, że dla dowolnego rozmieszczenia $n \geq 4$ cukierków w co najmniej 4 pudełkach istnieje sposób przełożenia ich wszystkich do jednego pudełka. Zauważamy najpierw, że można przenieść do jednego pudełka dowolnie rozmieszczone cztery cukierki:

$$(1,1,1,1) \to (3,1,0,0) \to (2,0,2,0) \to (1,0,1,2) \to (0,0,0,4).$$

Mamy zatem co najmniej jedno pudełko, w którym znajdują się co najmniej 4 cukierki. Teraz następująca sekwencja ruchów pozwala przenieść jeden cukierek do pudełka, w którym znajdują się co najmniej 3 cukierki:

$$(n,1,0,0) \to (n-1,0,2,0) \to (n-2,2,1,0) \to (n-3,2,0,2) \to$$
$$\to (n-1,1,0,1) \to (n+1,0,0,0).$$

Powtarzając tę sekwencję wielokrotnie, przenosimy po kolei wszystkie cukierki do pudełka, w którym na początku zgromadziliśmy co najmniej 4 cukierki.

Zestaw 8.
Nierówności

1. Udowodnij, że jeśli liczby rzeczywiste a i b spełniają nierówności $0 \le a \le b \le 1$ (przy czym nie jest prawdą, że $ab = 1$), to

$$0 \le \frac{b-a}{1-ab} \le 1.$$

Rozwiązanie. Lewa nierówność jest oczywista: wynika stąd, że $a \le b$ oraz $ab < 1$. Prawą nierówność przekształcamy w sposób równoważny:

$$\begin{gathered} b - a \le 1 - ab, \\ 1 + a - b - ab \ge 0, \\ (1+a) - b(1+a) \ge 0, \\ (1+a)(1-b) \ge 0. \end{gathered}$$

Ta ostatnia nierówność jest oczywiście prawdziwa, co kończy dowód.

2. Udowodnij, że jeśli liczby rzeczywiste a i b spełniają nierówności $0 \le a \le b \le 1$, to

$$0 \le \frac{a}{1+b} + \frac{b}{1+a} \le 1.$$

Rozwiązanie. Znów lewa nierówność jest oczywista. Prawą przekształcamy w sposób równoważny:

$$\begin{gathered} a(1+a) + b(1+b) \le (1+a)(1+b), \\ 1 + ab - a^2 - b^2 \ge 0, \\ 1 - b^2 + a(b-a) \ge 0. \end{gathered}$$

Ta ostatnia nierówność jest prawdziwa, gdyż $1 \ge b^2$, $a \ge 0$ oraz $b \ge a$. To kończy dowód. Możemy także zauważyć, że $1 + a \le 1 + b$, czyli

$$\frac{1}{1+b} \le \frac{1}{1+a}.$$

Stąd wynika, że

$$\frac{a}{1+b} + \frac{b}{1+a} \le \frac{a}{1+b} + \frac{b}{1+b} = \frac{a+b}{1+b}.$$

Ponieważ $0 \le a + b \le 1 + b$, więc ostatni ułamek jest niewiększy od 1.

3. Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej $n \ge 1$ część ułamkowa liczby $\sqrt{4n^2+n}$ jest mniejsza od $\frac{1}{4}$.

Rozwiązanie. Najpierw zauważamy, że

$$(2n)^2 = 4n^2 < 4n^2 + n < 4n^2 + 4n + 1 = (2n+1)^2.$$

Stąd wynika, że

$$2n < \sqrt{4n^2+n} < 2n + 1,$$

czyli częścią całkowitą liczby $\sqrt{4n^2+n}$ jest $2n$. Zatem częścią ułamkową naszej liczby jest $\sqrt{4n^2+n}-2n$. Mamy więc udowodnić, że

$$\sqrt{4n^2+n}-2n<\frac{1}{4}.$$

Przekształcamy tę nierówność w sposób równoważny:

$$\sqrt{4n^2+n}<2n+\frac{1}{4},$$
$$4n^2+n<\left(2n+\frac{1}{4}\right)^2,$$
$$4n^2+n<4n^2+n+\frac{1}{16}.$$

Ta ostatnia nierówność jest oczywiście prawdziwa dla każdego $n\geq 1$. To kończy dowód.

Uwaga. Można oczywiście zapytać, skąd uczeń może się domyślić początkowych nierówności dowodzących, że częścią całkowitą liczby $\sqrt{4n^2+n}$ jest $2n$. Zauważenie tych nierówności nie jest trudne. Jest to kwestia pewnej wprawy. Można jednak do tego dojść w wyniku obserwacji (por. rozdział o wskazówkach heurystycznych). Uczeń może sporządzić następującą tabelkę:

n	n^2	$4n^2+n$	$\sqrt{4n^2+n}$	n	n^2	$4n^2+n$	$\sqrt{4n^2+n}$
1	1	5	2,23607	6	36	150	12,24745
2	4	18	4,24264	7	49	203	14,24781
3	9	39	6,24500	8	64	264	16,24808
4	16	68	8,24621	9	81	333	18,24829
5	25	105	10,24695	10	100	410	20,24846

Teraz nietrudno już dostrzec, że część całkowita jest równa $2n$. Dowód polega na udowodnieniu podwójnej nierówności

$$2n\leq\sqrt{4n^2+n}<2n+1.$$

Tej nierówności dowodzimy łatwo przez podniesienie do kwadratu:

$$4n^2\leq 4n^2+n<4n^2+4n+1,$$

czyli

$$0\leq n<4n+1.$$

Możemy także zauważyć następną interesującą własność rozważanych części ułamkowych — rosną one wraz ze wzrostem n. Inaczej mówiąc, przypuszczamy, że dla każdego $n\geq 1$ prawdziwa jest następująca nierówność:

$$\sqrt{4n^2+n}-2n<\sqrt{4(n+1)^2+(n+1)}-2(n+1).$$

Tej nierówności dowodzimy także przekształcając ją w sposób równoważny:

$$\begin{gathered}
\sqrt{4n^2+n}-2n<\sqrt{4(n^2+2n+1)+n+1}-2n-2,\\
\sqrt{4n^2+n}+2<\sqrt{4n^2+9n+5},\\
4n^2+n+4\sqrt{4n^2+n}+4<4n^2+9n+5,\\
4\sqrt{4n^2+n}<8n+1,\\
16(4n^2+n)<(8n+1)^2,\\
64n^2+16n<64n^2+16n+1.
\end{gathered}$$

Ta ostatnia nierówność jest oczywiście prawdziwa dla każdego n. To dowodzi naszego przypuszczenia. Można także łatwo stwierdzić, że te części ułamkowe są zbieżne do $\frac{1}{4}$, ale tego już gimnazjalistom nie mówię.

4. Dane są liczby dodatnie a, b i c. Udowodnij, że

$$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\geq a+b+c.$$

Rozwiązanie. Przekształcamy naszą nierówność w sposób równoważny (pamiętamy przy tym, że liczby a, b i c są dodatnie):

$$\begin{gathered}
a^3c+b^3a+c^3b\geq a^2bc+ab^2c+abc^2,\\
a^3c+b^3a+c^3b-a^2bc-ab^2c-abc^2\geq 0,\\
a^3c+b^3a+c^3b-2a^2bc-2ab^2c-2abc^2+a^2bc+ab^2c+abc^2\geq 0,\\
a^3c-2a^2bc+ab^2c+b^3a-2ab^2c+abc^2+c^3b-2abc^2+a^2bc\geq 0,\\
ac(a^2-2ab+b^2)+ab(b^2-2bc+c^2)+bc(c^2-2ac+a^2)\geq 0,\\
ac(a-b)^2+ab(b-c)^2+bc(c-a)^2\geq 0.
\end{gathered}$$

Ostatnia nierówność jest prawdziwa (przypominam, że $a,b,c>0$), co kończy dowód.

5. Udowodnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b, c i d zachodzi nierówność

$$a^2+b^2+c^2+d^2\geq(a+b+c)d.$$

Rozwiązanie. Przekształćmy rozważaną nierówność w sposób równoważny:

$$\begin{gathered}
a^2+b^2+c^2+d^2-(a+b+c)d\geq 0,\\
d^2-(a+b+c)d+a^2+b^2+c^2\geq 0.
\end{gathered}$$

Po lewej stronie mamy trójmian kwadratowy zmiennej d (ze współczynnikiem 1 przy d^2). Nierówność będzie prawdziwa, jeśli wyróżnik Δ tego trójmianu będzie niedodatni. Obliczmy zatem ten wyróżnik:

$$\begin{aligned}
\Delta &= \bigl(-(a+b+c)\bigr)^2-4(a^2+b^2+c^2)=(a+b+c)^2-4(a^2+b^2+c^2)=\\
&=2(ab+bc+ac)-3(a^2+b^2+c^2)=-3a^2+2(b+c)a-(3b^2-2bc+3c^2)=\\
&=-\bigl(3a^2-2(b+c)a+(3b^2-2bc+3c^2)\bigr).
\end{aligned}$$

Chcemy udowodnić, że $\Delta \leq 0$, czyli

$$3a^2 - 2(b+c)a + 3b^2 - 2bc + 3c^2 \geq 0.$$

Znów mamy trójmian kwadratowy zmiennej a (tym razem ze współczynnikiem 3 przy a^2). Chcemy zatem udowodnić, że jego wyróżnik Δ_1 jest niedodatni. Oto ten wyróżnik:

$$\begin{aligned}\Delta_1 &= \bigl(-2(b+c)\bigr)^2 - 12(3b^2 - 2bc + 3c^2) = 4(b+c)^2 - 12(3b^2 - 2bc + 3c^2) = \\ &= 4(b^2 + 2bc + c^2 - 9b^2 + 6bc - 9c^2) = 4(-8b^2 + 8bc - 8c^2) = -32(b^2 - bc + c^2).\end{aligned}$$

Aby wykazać, że $-\Delta_1 \leq 0$, musimy udowodnić nierówność

$$b^2 - bc + c^2 \geq 0.$$

Tę nierówność udowodniliśmy w rozdziale o algebrze: po lewej stronie mamy trójmian kwadratowy zmiennej b, którego wyróżnik $\Delta_2 = -3c^2$ jest niedodatni.

6. Udowodnij, że dla dowolnych liczb dodatnich a i b zachodzi nierówność

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2.$$

Rozwiązanie. Wystarczy skorzystać z nierówności między średnią geometryczną i średnią arytmetyczną:

$$\frac{\frac{a}{b} + \frac{b}{a}}{2} \geq \sqrt{\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a}} = \sqrt{1} = 1.$$

7. Dane są takie liczby dodatnie a i b, że $a + b = 1$. Udowodnij, że zachodzi nierówność

$$\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{b}\right)^2 \geq \frac{25}{2}.$$

Rozwiązanie. Przekształćmy rozważaną nierówność w sposób równoważny:

$$a^2 + 2 + \frac{1}{a^2} + b^2 + 2 + \frac{1}{b^2} \geq \frac{25}{2},$$

$$a^2 + b^2 + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \geq \frac{17}{2}.$$

Teraz skorzystamy z kilku nierówności między średnimi. Najpierw średnia arytmetyczna i kwadratowa:

$$\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} \geq \frac{a+b}{2} = \frac{1}{2},$$

czyli

$$\frac{a^2 + b^2}{2} \geq \frac{1}{4}.$$

Po pomnożeniu obu stron przez 2, otrzymamy nierówność

$$a^2 + b^2 \geq \frac{1}{2}.$$

Następnie skorzystamy z nierówności między średnią geometryczną i średnią arytmetyczną:

$$\sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2} = \frac{1}{2},$$

czyli

$$ab \le \frac{1}{4}.$$

Teraz skorzystamy z nierówności między średnią harmoniczną i średnią geometryczną liczb a^2 i b^2:

$$\frac{2}{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}} \le \sqrt{a^2 b^2},$$

czyli

$$\frac{2}{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}} \le ab.$$

Skorzystamy teraz z poprzedniej nierówności:

$$\frac{2}{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}} \le \frac{1}{4}.$$

Stąd otrzymujemy

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \ge 8.$$

Ostatecznie dostajemy

$$a^2 + b^2 + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \ge \frac{1}{2} + 8 = \frac{17}{2}.$$

To kończy dowód.

8. Udowodnij, że dla dowolnych dodatnich liczb rzeczywistych a, b i c zachodzi nierówność

$$(a+b+c) \cdot \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \ge 9.$$

Rozwiązanie. Możemy skorzystać z nierówności między średnią harmoniczną i średnią arytmetyczną. Skoro $H \le A$, więc także

$$A \cdot \frac{1}{H} \ge 1.$$

Zatem

$$\frac{a+b+c}{3} \cdot \frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}}{3} \ge 1,$$

skąd po pomnożeniu obu stron przez 9 otrzymujemy tezę. Możemy także przekształcić nierówność w sposób równoważny i skorzystać z zadania 6:

$$1 + \frac{a}{b} + \frac{a}{c} + \frac{b}{a} + 1 + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} + \frac{c}{b} + 1 \ge 9,$$
$$\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) + \left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a}\right) + \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right) \ge 6.$$

Ostatnia nierówność jest prawdziwa, co wynika z zadania 6. W taki sam sposób możemy udowodnić nierówność ogólniejszą:

$$(a_1+\ldots+a_n)\cdot\left(\frac{1}{a_1}+\ldots+\frac{1}{a_n}\right)\geq n^2.$$

Uwaga. W dowodzie tej ogólniejszej nierówności możemy skorzystać z nierówności między średnią harmoniczną i arytmetyczną. Okazuje się, że także i na odwrót — z tej nierówności natychmiast wynika nierówność między tymi średnimi:

$$\begin{gathered}(a_1+\ldots+a_n)\cdot\left(\frac{1}{a_1}+\ldots+\frac{1}{a_n}\right)\geq n^2,\\ \frac{a_1+\ldots+a_n}{n}\cdot\frac{\frac{1}{a_1}+\ldots+\frac{1}{a_n}}{n}\geq 1,\\ A\cdot\frac{1}{H}\geq 1,\\ A\geq H.\end{gathered}$$

Drugi sposób rozwiązania jest więc dowodem nierówności między średnią harmoniczną i średnią arytmetyczną dla n liczb. Pokażę jeszcze jeden dowód tej nierówności. Najpierw dla przykładu udowodnię, że jeśli dane są liczby dodatnie a, b i c takie, że $a+b+c=1$, to

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geq 9.$$

W tym celu zauważmy, że dla dowolnej liczby dodatniej x zachodzi nierówność

$$\frac{1}{x}\geq -9x+6.$$

Dla dowodu przekształćmy tę nierówność w sposób równoważny:

$$\begin{gathered}1\geq -9x^2+6x,\\ 9x^2-6x+1\geq 0,\\ (3x-1)^2\geq 0.\end{gathered}$$

Ta ostatnia nierówność jest oczywiście prawdziwa. Teraz skorzystamy trzykrotnie z udowodnionej nierówności:

$$\frac{1}{a}\geq -9a+6,\quad \frac{1}{b}\geq -9b+6,\quad \frac{1}{c}\geq -9c+6.$$

Dodajmy stronami te trzy nierówności:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geq -9(a+b+c)+3\cdot 6=-9+18=9.$$

Teraz dowodzimy nierówności między średnią harmoniczną i średnią arytmetyczną dla trzech liczb. Przypuśćmy, że dane są trzy liczby a, b i c. Niech

$$x=\frac{a}{a+b+c},\quad y=\frac{b}{a+b+c},\quad z=\frac{c}{a+b+c}.$$

Wówczas oczywiście $x+y+z=1$. Stąd

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\geq 9,$$

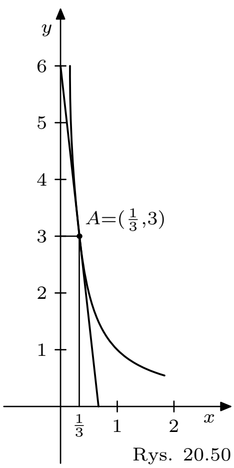
czyli

$$\frac{a+b+c}{a}+\frac{a+b+c}{b}+\frac{a+b+c}{c}\geq 9.$$

Dla zakończenia dowodu wystarczy teraz po lewej stronie nierówności wyłączyć $a+b+c$ przed nawias. To bardzo prosty dowód, ale jak można wymyślić tę nierówność

$$\frac{1}{x}\geq -9x+6?$$

Popatrzmy na wykresy funkcji stojących po obu stronach nierówności (rys. 20.50). Okazuje się, że prosta o równaniu $y=-9x+6$ jest styczna do hiperboli o równaniu $y=\frac{1}{x}$ w punkcie $A=(\frac{1}{3},3)$. Wówczas cała gałąź tej hiperboli dla $x>0$ leży nad tą styczną. Dlaczego bierzemy styczną w punkcie o współrzędnej x równej $\frac{1}{3}$? Dlatego, że nasza nierówność



Rys. 20.50

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geq 9$$

staje się równością dla $a=b=c=\frac{1}{3}$. Chcemy zatem, by wartości obu funkcji były równe w punkcie o współrzędnej $x=\frac{1}{3}$. Oczywiście równania stycznej do wykresu takiej funkcji nie wyznaczymy w gimnazjum metodami analizy matematycznej. To tylko intuicja. Szukamy jednak funkcji liniowej postaci $y=ax+b$ takiej, by

$$\frac{1}{x}\geq ax+b$$

dla wszystkich $x>0$, oraz by ta nierówność stawała się równością dla $x=\frac{1}{3}$. Mamy zatem

$$3\geq \frac{a}{3}+b,$$

skąd wynika, że $b=3-\frac{a}{3}$. Chcemy teraz tak dobrać a, by nierówność

$$\frac{1}{x}\geq ax+3-\frac{a}{3}$$

była spełniona przez wszystkie liczby dodatnie x. Przekształćmy ją w sposób równoważny:

$$1\geq ax^2+\left(3-\frac{a}{3}\right)x,$$
$$-ax^2-\left(3-\frac{a}{3}\right)x+1\geq 0.$$

Wiemy już, że dla $x = \frac{1}{3}$ ta nierówność staje się równością. Czy znamy nierówność kwadratową spełnioną przez wszystkie $x > 0$ (a może nawet przez wszystkie x), która staje się równością dla $x = \frac{1}{3}$? Oczywiście tak. Jest to nierówność:

$$(3x - 1)^2 \geq 0,$$

czyli

$$9x^2 - 6x + 1 \geq 0.$$

Teraz wystarczy przyjąć $a = -9$, by nierówność

$$-ax^2 - \left(3 - \frac{a}{3}\right)x + 1 \geq 0$$

stała się właśnie tą nierównością

$$9x^2 - 6x + 1 \geq 0.$$

Możemy również skorzystać z twierdzenia o wyróżniku trójmianu kwadratowego. Po pierwsze, chcemy, by $a < 0$, po to, by współczynnik przy x^2 był dodatni. Po drugie, chcemy, by wyróżnik był niedodatni. Obliczmy zatem ten wyróżnik:

$$\Delta = \left(3 - \frac{a}{3}\right)^2 + 4a = 9 - 2a + \frac{a^2}{9} + 4a = 9 + 2a + \frac{a^2}{9} = \left(3 + \frac{a}{3}\right)^2.$$

Ponieważ $\Delta \geq 0$, więc musimy dobrać a tak, by $\Delta = 0$. Stąd $a = -9$.

W podobny sposób postępujemy dla n liczb. Przypuśćmy, że mamy dane liczby dodatnie $a_1, \ldots, a_n$ takie, że $a_1 + \ldots + a_n = 1$. Udowodnimy, że

$$\frac{1}{a_1} + \ldots + \frac{1}{a_n} \geq n^2.$$

Nierówność między średnią harmoniczną i średnią arytmetyczną wyniknie z powyższej nierówności w sposób pokazany wyżej. Szczegóły dowodu pozostawię jako ćwiczenie. Przystąpmy zatem do dowodu. Szukamy funkcji liniowej postaci $y = ax + b$ takiej, by nierówność

$$\frac{1}{x} \geq ax + b$$

była spełniona przez każdą liczbę dodatnią x oraz by stawała się równością dla $x = \frac{1}{n}$. Mamy zatem

$$n = \frac{a}{n} + b,$$

skąd $b = n - \frac{a}{n}$. Chcemy teraz dobrać a tak, by nierówność

$$\frac{1}{x} \geq ax + n - \frac{a}{n}$$

była spełniona przez każdą liczbę dodatnią x. Pomnóżmy obie strony przez x i doprowadźmy naszą nierówność do postaci nierówności kwadratowej:

$$-ax^2 - \left(n - \frac{a}{n}\right)x + 1 \geq 0.$$

Tak jak wyżej, chcemy, by $a < 0$ oraz by wyróżnik był niedodatni. Zauważamy, że wyróżnik Δ jest równy

$$\Delta = \left(n + \frac{a}{n}\right)^2,$$

skąd — tak jak wyżej — otrzymujemy $a = -n^2$ oraz $b = 2n$. Możemy teraz sprawdzić, że nierówność

$$\frac{1}{x} \geq -n^2 x + 2n$$

jest rzeczywiście spełniona przez każdą liczbę $x > 0$. Przekształćmy ją bowiem w sposób równoważny:

$$\begin{gathered} 1 \geq -n^2x^2 + 2nx, \\ n^2x^2 - 2nx + 1 \geq 0, \\ (nx-1)^2 \geq 0. \end{gathered}$$

Teraz skorzystamy z udowodnionej nierówności. Podstawiając liczby $a_1, \ldots, a_n$ w miejsce x, otrzymamy następujące n nierówności:

$$\frac{1}{a_1} \geq -n^2 a_1 + 2n, \quad \ldots, \quad \frac{1}{a_1} \geq -n^2 a_1 + 2n.$$

Po dodaniu tych nierówności stronami, otrzymamy:

$$\frac{1}{a_1} + \ldots + \frac{1}{a_n} \geq -n^2(a_1 + \ldots + a_n) + n \cdot 2n = -n^2 + 2n^2 = n^2.$$

To kończy dowód. W ten sposób został także zakończony dowód nierówności między średnią harmoniczną i średnią arytmetyczną dla n liczb dodatnich.

9. Dane są liczby dodatnie $a_1, \ldots, a_n$ takie, że $a_1 + \ldots + a_n = 1$. Udowodnij, że

$$a_1^2 + \ldots + a_n^2 \geq \frac{1}{n}.$$

Rozwiązanie. Nierówność ta wynika natychmiast z nierówności między średnią arytmetyczną i średnią kwadratową:

$$\sqrt{\frac{a_1^2 + \ldots + a_n^2}{n}} \geq \frac{a_1 + \ldots + a_n}{n} = \frac{1}{n}.$$

Stąd

$$\frac{a_1^2 + \ldots + a_n^2}{n} \geq \frac{1}{n^2},$$

czyli

$$a_1^2 + \ldots + a_n^2 \geq \frac{1}{n}.$$

Uwaga. Tak jak w poprzednim zadaniu, tę nierówność też możemy udowodnić bezpośrednio, a następnie wyprowadzić z niej nierówność między średnią arytmetyczną i średnią kwadratową. Zauważmy najpierw, że dla dowolnej liczby dodatniej x zachodzi następująca nierówność pomocnicza:

$$x^2 \geq \frac{2}{n} \cdot x - \frac{1}{n^2}.$$

Dowód tej nierówności polega na przekształceniu jej w sposób równoważny:

$$n^2x^2 \geq 2nx - 1,$$
$$n^2x^2 - 2nx + 1 \geq 0,$$
$$(nx - 1)^2 \geq 0.$$

Teraz dodajemy stronami n nierówności

$$a_1^2 \geq \frac{2}{n} \cdot a_1 - \frac{1}{n^2}, \quad \ldots, \quad a_n^2 \geq \frac{2}{n} \cdot a_n - \frac{1}{n^2}.$$

Otrzymamy nierówność

$$a_1^2 + \ldots + a_n^2 \geq \frac{2}{n} \cdot (a_1 + \ldots + a_n) - n \cdot \frac{1}{n^2} = \frac{2}{n} \cdot 1 - \frac{1}{n} = \frac{1}{n}.$$

Teraz z udowodnionej nierówności wyprowadzimy nierówność między średnią arytmetyczną i średnią kwadratową. Przypuśćmy, że dane są liczby dodatnie $a_1, \ldots, a_n$. Niech A będzie średnią arytmetyczną tych liczb:

$$A = \frac{a_1 + \ldots + a_n}{n},$$

czyli

$$a_1 + \ldots + a_n = nA.$$

Definiujemy liczby $x_1, \ldots, x_n$ w następujący sposób:

$$x_1 = \frac{a_1}{nA}, \quad \ldots, \quad x_n = \frac{a_n}{nA}.$$

Wówczas oczywiście $x_1 + \ldots + x_n = 1$. Mamy zatem

$$x_1^2 + \ldots + x_n^2 \geq \frac{1}{n}.$$

Mnożymy obie strony otrzymanej nierówności przez $(nA)^2$ i przekształcamy otrzymaną nierówność:

$$(nA)^2 \cdot (x_1^2 + \ldots + x_n^2) \geq (nA)^2 \cdot \frac{1}{n},$$
$$(nAx_1)^2 + \ldots + (nAx_n)^2 \geq nA^2,$$
$$a_1^2 + \ldots + a_n^2 \geq nA^2,$$
$$\frac{a_1^2 + \ldots + a_n^2}{n} \geq A^2,$$
$$\sqrt{\frac{a_1^2 + \ldots + a_n^2}{n}} \geq A,$$
$$\sqrt{\frac{a_1^2 + \ldots + a_n^2}{n}} \geq \frac{a_1 + \ldots + a_n}{n}.$$

W ten sposób dowód nierówności między średnią arytmetyczną i średnią kwadratową jest zakończony.

Oczywiście — tak jak poprzednio — problemem jest znalezienie odpowiedniej nierówności pomocniczej. W tym przypadku:

$$x^2 \geq \frac{2}{n} \cdot x - \frac{1}{n^2}.$$

Znów szukamy nierówności postaci

$$x^2 \geq ax + b,$$

spełnionej przez każdą liczbę dodatnią x i stającą się równością dla $x = \frac{1}{n}$. Mamy zatem

$$\frac{1}{n^2} = \frac{a}{n} + b,$$

skąd dostajemy $b = \frac{1}{n^2} - \frac{a}{n}$. Teraz szukamy takiego a, by nierówność

$$x^2 \geq ax + \frac{1}{n^2} - \frac{a}{n},$$

czyli

$$x^2 - ax - \frac{1}{n^2} + \frac{a}{n}$$

była spełniona przez każdą liczbę dodatnią x. Jeszcze raz skorzystamy z twierdzenia o wyróżniku trójmianu kwadratowego. Mamy tym razem

$$\Delta = a^2 + \frac{4}{n^2} - \frac{4a}{n}.$$

Szukamy zatem takiego a, by

$$a^2 + \frac{4}{n^2} - \frac{4a}{n} \leq 0.$$

Przekształcamy tę nierówność

$$a^2n^2 + 4 - 4an \leq 0,$$
$$(an - 2)^2 \leq 0.$$

Stąd dostajemy $a = \frac{2}{n}$ i następnie $b = \frac{1}{n^2} - \frac{a}{n} = \frac{1}{n^2} - \frac{2}{n^2} = -\frac{1}{n^2}$.

10. Dane są liczby dodatnie a, b i c. Udowodnij, że

$$ab(a + b) + bc(b + c) + ca(c + a) \geq 6abc.$$

Rozwiązanie. Podzielmy obie strony nierówności przez abc. Po uporządkowaniu wyrazów otrzymamy nierówność prawdziwą

$$\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) + \left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a}\right) + \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right) \geq 6.$$

Możemy także skorzystać z nierówności między średnimi:

$$\frac{ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)}{6} = \frac{a^2b+ab^2+b^2c+bc^2+a^2c+ac^2}{6} \geq$$
$$\geq \sqrt[6]{a^2b\cdot ab^2\cdot b^2c\cdot bc^2\cdot a^2c\cdot ac^2} = \sqrt[6]{a^6b^6c^6} = abc.$$

11. Dane są liczby dodatnia a, b i c. Udowodnij, że

$$\frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a} \geq ab+bc+ca.$$

Rozwiązanie. Z nierówności między średnią geometryczną i arytmetyczną wynika, że

$$\frac{\frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+bc}{3} \geq \sqrt[3]{a^3b^3} = ab,$$

czyli

$$\frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+bc \geq 3ab.$$

Podobnie

$$\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a}+ca \geq 3bc$$

oraz

$$\frac{c^3}{a}+\frac{a^3}{b}+ab \geq 3ca.$$

Po dodaniu stronami tych trzech nierówności, redukcji wyrazów podobnych i podzieleniu obu stron przez 2, otrzymujemy żądaną nierówność.

12. Dane są takie liczby dodatnie a, b, c, że $abc = 1$. Udowodnij, że

$$ab^2+bc^2+ca^2 \geq ab+bc+ca.$$

Rozwiązanie. Trzy razy korzystamy z nierówności między średnią geometryczną i średnią arytmetyczną. Mamy:

$$\frac{ab^2+ab^2+ca^2}{3} \geq \sqrt[3]{ab^2\cdot ab^2\cdot ca^2} = \sqrt[3]{a^4b^4c} = \sqrt[3]{abc\cdot a^3b^3} = ab.$$

Stąd

$$2ab^2+bc^2 \geq 3ab.$$

W podobny sposób dowodzimy, że

$$2bc^2+ca^2 \geq 3bc \quad \text{oraz} \quad 2ca^2+ab^2 \geq 3ca.$$

Dodając otrzymane nierówności stronami, dostajemy nierówność

$$3ab^2+3bc^2+3ca^2 \geq 3ab+3bc+3ca,$$

czyli

$$ab^2+bc^2+ca^2 \geq ab+bc+ca.$$

13. Dane są liczby dodatnie a i b. Udowodnij, że

$$a^3 + b^3 \geq a^2b + ab^2.$$

Rozwiązanie. Ze względu na symetrię możemy założyć, że $a \leq b$. Wówczas $a^2 \leq b^2$, a więc ciągi (a, b) i (a^2, b^2) są uporządkowane zgodnie. Zatem

$$\begin{bmatrix} a & b \\ a^2 & b^2 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} a & b \\ b^2 & a^2 \end{bmatrix}, \qquad \text{czyli} \qquad a^3 + b^3 \geq ab^2 + a^2b.$$

Nierówność tę można udowodnić także metodą grupowania. Przekształcamy ją w sposób równoważny:

$$\begin{gathered} a^3 + b^3 \geq a^2b + ab^2, \\ a^3 + b^3 - a^2b - ab^2 \geq 0, \\ (a^3 - a^2b) + (b^3 - ab^2) \geq 0, \\ a^2(a-b) - b^2(a-b) \geq 0, \\ (a-b)(a^2 - b^2) \geq 0, \\ (a-b)^2(a+b) \geq 0. \end{gathered}$$

Ostatnia nierówność jest prawdziwa, bo $a + b > 0$. To kończy dowód.

14. Dane są różne od zera liczby rzeczywiste a i b. Udowodnij, że

$$a^4 + b^4 \leq \frac{a^6}{b^2} + \frac{b^6}{a^2}.$$

Rozwiązanie. Znów możemy założyć, że $|a| \leq |b|$. Wówczas $a^6 \leq b^6$ oraz $a^2 \leq b^2$. Mamy więc

$$\frac{1}{b^2} \leq \frac{1}{a^2}.$$

Stąd wynika, że ciągi (a^6, b^6) i $\left(\frac{1}{b^2}, \frac{1}{a^2}\right)$ są uporządkowane zgodnie. Zatem

$$\begin{bmatrix} a^6 & b^6 \\ \frac{1}{b^2} & \frac{1}{a^2} \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} a^6 & b^6 \\ \frac{1}{a^2} & \frac{1}{b^2} \end{bmatrix}, \qquad \text{czyli} \qquad \frac{a^6}{b^2} + \frac{b^6}{a^2} \geq a^4 + b^4.$$

15. Udowodnij, że jeśli liczby rzeczywiste a i b spełniają nierówności $0 \leq a \leq b \leq 1$, to

$$0 \leq ab^2 - a^2b \leq \frac{1}{4}.$$

Rozwiązanie. Lewa nierówność jest oczywista: $0 \leq ab(b-a)$. Dowodzimy teraz prawej nierówności. Najpierw zauważamy, że:

$$ab^2 - a^2b \leq ab^2 - a^2b^2.$$

Wystarczy bowiem odjąć ab^2 od obu stron, a następnie podzielić obie strony przez a^2b. Otrzymamy wtedy nierówność prawdziwą:

$$-1 \leq -b.$$

Mamy

$$ab^2 - a^2b \leq ab^2 - a^2b^2 = b^2(a - a^2) \leq a - a^2 \leq \frac{1}{4}.$$

Nierówność $b^2(a - a^2) \leq a - a^2$ jest prawdziwa, gdyż $b^2 \leq 1$ oraz $a - a^2 = a(1 - a) \geq 0$. Nierówność

$$a - a^2 \leq \frac{1}{4}$$

jest prawdziwa, gdyż

$$a^2 - a + \frac{1}{4} = \left(a - \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0.$$

16. Dane są liczby rzeczywiste a, b, c i d takie, że $a + d = b + c$. Udowodnij, że

$$(a - b)(c - d) + (a - c)(b - d) + (d - a)(b - c) \geq 0.$$

Rozwiązanie. Z założenia wynika, że $c - d = a - b$, a więc

$$(a - b)(c - d) = (a - b)^2.$$

Następnie

$$\begin{aligned}(a - c)(b - d) + (d - a)(b - c) &= ab - ad - bc + cd + bd - cd - ab + ac = \\ &= ac - ad - bc + bd = (a - b)(c - d) = (a - b)^2.\end{aligned}$$

Zatem

$$(a - b)(c - d) + (a - c)(b - d) + (d - a)(b - c) = 2(a - b)^2 \geq 0.$$

17. Niech $f(x, y, z, t)$ oznacza wyrażenie algebraiczne

$$(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - t)^2 + (t - x)^2.$$

Niech następnie a, b, c i d będą liczbami rzeczywistymi takimi, że $a < b < c < d$. Udowodnij, że

$$f(a, c, b, d) > f(a, b, c, d) > f(a, b, d, c).$$

Rozwiązanie. Z definicji wyrażenia f mamy:

$$\begin{aligned}f(a, c, b, d) &= (a - c)^2 + (c - b)^2 + (b - d)^2 + (d - a)^2, \\ f(a, b, c, d) &= (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - d)^2 + (d - a)^2, \\ f(a, b, d, c) &= (a - b)^2 + (b - d)^2 + (d - c)^2 + (c - a)^2.\end{aligned}$$

Zatem

$$\begin{aligned} f(a,c,b,d) - f(a,b,c,d) &= (a-c)^2 - (a-b)^2 + (b-d)^2 - (c-d)^2 = \\ &= \big((a-c)-(a-b)\big)\cdot\big((a-c)+(a-b)\big)+ \\ &\quad + \big((b-d)-(c-d)\big)\cdot\big((b-d)+(c-d)\big) = \\ &= (b-c)(2a-b-c) + (b-c)(b+c-2d) = \\ &= (b-c)(2a-2d) = 2(c-b)(d-a) > 0. \end{aligned}$$

Podobny dowód drugiej nierówności pozostawię jako ćwiczenie.

18. Dane są dowolne liczby rzeczywiste a, b i c. Udowodnij, że

$$a^2 + b^2 + c^2 + \frac{3}{4} \geq a + b + c.$$

Rozwiązanie. Jeden sposób rozwiązania polega na przekształceniu nierówności w sposób równoważny do postaci

$$(2a-1)^2 + (2b-1)^2 + (2c-1)^2 \geq 0.$$

Inny sposób polega na zastosowaniu twierdzenia o wyróżniku trójmianu kwadratowego. Mamy bowiem trójmian zmiennej a (ze współczynnikiem 1 przy a^2):

$$a^2 - a + \left(b^2 + c^2 - b - c + \frac{3}{4}\right).$$

Jego wyróżnik jest równy

$$\Delta = (-1)^2 - 4\cdot\left(b^2 + c^2 - b - c + \frac{3}{4}\right) = -4b^2 - 4c^2 + 4b + 4c - 2.$$

Mamy udowodnić, że $\Delta \leq 0$, czyli że $4b^2 + 4c^2 - 4b - 4c + 2 \geq 0$. Po podzieleniu obu stron przez 2 mamy trójmian kwadratowy zmiennej b (ze współczynnikiem 2 przy b^2):

$$2b^2 - 2b + 2c^2 - 2c + 1.$$

Jego wyróżnik jest równy

$$\Delta_1 = (-2)^2 - 4\cdot 2\cdot(2c^2 - 2c + 1) = 4 - 16c^2 + 16c - 8 = -4(2c-1)^2 \leq 0.$$

To kończy dowód nierówności.

19. Udowodnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych a i b zachodzi nierówność

$$a^2 + b^2 + ab \geq 3(a + b - 1).$$

Rozwiązanie. Przekształcamy tę nierówność w sposób równoważny:

$$a^2 + (b-3)a + b^2 - 3b + 3 \geq 0.$$

Po lewej stronie mamy trójmian kwadratowy zmiennej a (ze współczynnikiem 1 przy a^2). Wystarczy pokazać, że jego wyróżnik Δ jest niedodatni:

$$\Delta = (b-3)^2 - 4(b^2 - 3b + 3) = -3b^2 + 6b - 3 = -3(b-1)^2 \leq 0.$$

To kończy dowód.

20. Udowodnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych a i b takich, że $a \neq 0$ zachodzi nierówność

$$a^2 + b^2 + \frac{1}{a^2} + \frac{b}{a} \geq \sqrt{3}.$$

Rozwiązanie. Przekształćmy nierówność w sposób równoważny:

$$b^2 + \frac{b}{a} + a^2 + \frac{1}{a^2} - \sqrt{3} \geq 0,$$
$$a^2b^2 + ab + a^4 - \sqrt{3} \cdot a^2 + 1 \geq 0.$$

Po lewej stronie mamy trójmian kwadratowy zmiennej b (ze współczynnikiem $a^2 > 0$ przy b^2). Wystarczy zatem pokazać, że jego wyróżnik Δ jest niedodatni:

$$\Delta = a^2 - 4a^2(a^4 - \sqrt{3} \cdot a^2 + 1) = a^2(1 - 4a^4 + 4\sqrt{3} \cdot a^2 - 4) =$$
$$= -a^2(4a^4 - 4a^2\sqrt{3} + 3) = -a^2(2a^2 - \sqrt{3})^2 \leq 0.$$

To kończy dowód.

21. Dane są takie liczby dodatnie a, b, c, że $abc = 1$. Udowodnij, że

$$\frac{1+ab}{1+a} + \frac{1+bc}{1+b} + \frac{1+ca}{1+c} \geq 3.$$

Rozwiązanie. Zauważmy, że

$$\frac{1+ab}{1+a} = \frac{abc+ab}{1+a} = ab \cdot \frac{1+c}{1+a}.$$

Podobnie

$$\frac{1+bc}{1+b} = bc \cdot \frac{1+a}{1+b}$$

oraz

$$\frac{1+ca}{1+c} = ca \cdot \frac{1+b}{1+c}.$$

Z nierówności między średnią geometryczną i średnią arytmetyczną wynika, że

$$\frac{\frac{1+ab}{1+a} + \frac{1+bc}{1+b} + \frac{1+ca}{1+c}}{3} = \frac{ab \cdot \frac{1+c}{1+a} + bc \cdot \frac{1+a}{1+b} + ca \cdot \frac{1+b}{1+c}}{3} \geq$$
$$\geq \sqrt[3]{ab \cdot \frac{1+c}{1+a} \cdot bc \cdot \frac{1+a}{1+b} \cdot ca \cdot \frac{1+b}{1+c}} = \sqrt[3]{a^2b^2c^2} = 1.$$

Po pomnożeniu obu stron przez 3 otrzymujemy żądaną nierówność.

Inny sposób rozwiązania polega na pomnożeniu obu stron nierówności przez wspólny mianownik $(1+a)(1+b)(1+c)$. Po redukcji wyrazów podobnych i skorzystaniu kilkakrotnie z równości $abc = 1$, otrzymujemy nierówność

$$ab^2 + bc^2 + ca^2 \geq ab + bc + ca$$

udowodnioną w zadaniu 12.

22. Dane są takie liczby dodatnie a, b, c, że $a + b + c = 1$. Udowodnij, że

$$\sqrt{6a + 7} + \sqrt{6b + 7} + \sqrt{6c + 7} \leq 9.$$

Rozwiązanie. W tym zadaniu skorzystamy z nierówności między średnią geometryczną i średnią arytmetyczną. Udowodnimy najpierw nierówność pomocniczą:

$$\sqrt{x} \leq \frac{y^2 + x}{2y}$$

dla dowolnych liczb dodatnich x i y. Mianowicie

$$\sqrt{x} = \sqrt{y \cdot \frac{x}{y}} \leq \frac{y + \frac{x}{y}}{2} = \frac{y^2 + x}{2y}.$$

Teraz weźmy $y = 3$ i podstawmy $6x + 7$ w miejsce x:

$$\sqrt{6x + 7} \leq \frac{9 + 6x + 7}{6} = x + \frac{8}{3}.$$

Mamy zatem trzy nierówności:

$$\sqrt{6a + 7} \leq a + \frac{8}{3}, \quad \sqrt{6b + 7} \leq b + \frac{8}{3}, \quad \sqrt{6c + 7} \leq c + \frac{8}{3}.$$

Po dodaniu tych nierówności stronami, otrzymamy

$$\sqrt{6a + 7} + \sqrt{6b + 7} + \sqrt{6c + 7} \leq a + b + c + 3 \cdot \frac{8}{3} = 1 + 8 = 9.$$

To kończy dowód.

Uwaga. Należy wyjaśnić, w jaki sposób można się domyślić, żeby wziąć $y = 3$. Otóż nietrudno zauważyć, że dowodzona nierówność staje się równością dla $a = b = c = \frac{1}{3}$. Zatem chcemy tak dobrać y, by w nierówności

$$\sqrt{6x + 7} = \sqrt{y \cdot \frac{6x + 7}{y}} \leq \frac{y + \frac{6x+7}{y}}{2}$$

równość zachodziła dla $x = \frac{1}{3}$. Ale równość w nierówności między średnimi zachodzi wtedy, gdy obie liczby są równe. Chcemy zatem, by

$$y = \frac{6x + 7}{y}$$

dla $x = \frac{1}{3}$. Proste obliczenie pokazuje, że wtedy $y^2 = 9$, a więc $y = 3$ (bowiem $y > 0$).
Inny sposób otrzymania nierówności

$$\sqrt{6x+7} \le x + \frac{8}{3}$$

polega na dobraniu takich a i b, by nierówność

$$\sqrt{6x+7} \le ax + b$$

była spełniona dla każdej liczby dodatniej x i by stała się równością dla $x = \frac{1}{3}$. Mamy zatem równanie

$$\sqrt{6 \cdot \frac{1}{3} + 7} = \frac{a}{3} + b,$$

skąd dostajemy $b = 3 - \frac{a}{3}$. Następnie mamy nierówność

$$\sqrt{6x+7} \le ax + 3 - \frac{a}{3},$$

którą przekształcamy w sposób równoważny:

$$\begin{gathered} 3\sqrt{6x+7} \le 3ax + 9 - a, \\ 9(6x+7) \le 9a^2x^2 + 81 + a^2 + 54ax - 6a^2x - 18a, \\ 9a^2x^2 + (54a - 6a^2 - 54)x + (a^2 - 18a + 18) \ge 0. \end{gathered}$$

Mamy trójmian kwadratowy ze współczynnikiem $9a^2$ przy x^2. Nierówność jest spełniona przez każdą liczbę x, jeśli wyróżnik Δ jest niedodatni. Obliczmy zatem ten wyróżnik:

$$\begin{aligned} \Delta &= (54a - 6a^2 - 54)^2 - 36a^2(a^2 - 18a + 18) = \\ &= 36(a^2 - 9a + 9)^2 - 36(a^4 - 18a^3 + 18a^2) = \\ &= 36(a^4 + 81a^2 + 81 - 18a^3 + 18a^2 - 162a) - 36(a^4 - 18a^3 + 18a^2) = \\ &= 36(81a^2 - 162a + 81) = 36 \cdot 81 \cdot (a^2 - 2a + 1) = 36 \cdot 81 \cdot (a-1)^2. \end{aligned}$$

Ponieważ $\Delta \le 0$, więc $a = 1$ i $b = 3 - \frac{1}{3} = \frac{8}{3}$. Stąd dostajemy

$$\sqrt{6x+7} \le x + \frac{8}{3}.$$

23. Dana jest liczba dodatnia x. Udowodnij, że

$$x + \frac{4}{x^2} \ge 3.$$

Rozwiązanie. Z nierówności między średnią geometryczną i średnią arytmetyczną wynika, że

$$\frac{x + \frac{4}{x^2}}{3} = \frac{\frac{x}{2} + \frac{x}{2} + \frac{4}{x^2}}{3} \ge \sqrt[3]{\frac{x}{2} \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{4}{x^2}} = 1.$$

Wystarczy teraz pomnożyć obie strony nierówności przez 3.

24. Dana jest liczba dodatnia x. Udowodnij, że

$$x^2 + \frac{16}{x} \geq 3.$$

Rozwiązanie.

$$\frac{x^2 + \frac{16}{x}}{3} = \frac{x^2 + \frac{8}{x} + \frac{8}{x}}{3} \geq \sqrt[3]{x^2 \cdot \frac{8}{x} \cdot \frac{8}{x}} = \sqrt[3]{64} = 4.$$

Wystarczy teraz pomnożyć obie strony nierówności przez 3.

25. Dane są liczby dodatnie a i b. Udowodnij, że

$$\frac{a^3}{b} + \frac{b^3}{a} \geq a^2 + b^2.$$

Wskazówka. Ciągi (a^3, b^3) i $\left(\frac{1}{b}, \frac{1}{a}\right)$ są uporządkowane zgodnie.

26. Dane są liczby dodatnie a i b. Udowodnij, że

$$\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} \leq \frac{1}{a^3} \cdot \sqrt{\frac{b}{a}} + \frac{1}{b^3} \cdot \sqrt{\frac{a}{b}}.$$

Wskazówka. Ciągi $(\sqrt{a}, \sqrt{b})$ i $\left(\frac{1}{b^3\sqrt{b}}, \frac{1}{a^3\sqrt{a}}\right)$ są uporządkowane zgodnie.

27. Dane są liczby dodatnie a, b i c. Udowodnij, że

$$a^3 + b^3 + c^3 \geq a^2b + b^2c + c^2a.$$

Rozwiązanie. Ze względu na cykliczność wyrażeń po obu stronach nierówności wystarczy rozpatrzeć dwa przypadki: $a \leq b \leq c$ i $a \leq c \leq b$. W obu przypadkach stwierdzamy, że ciągi (a, b, c) i (a^2, b^2, c^2) są uporządkowane zgodnie. Zatem

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} a & b & c \\ c^2 & a^2 & b^2 \end{bmatrix},$$

czyli

$$a^3 + b^3 + c^3 \geq ac^2 + ba^2 + cb^2.$$

28. Dane są liczby dodatnie a, b i c. Udowodnij, że

$$a^3b + b^3c + c^3a \geq a^2bc + b^2ca + c^2ab.$$

Wskazówka. Ciągi (a^2, b^2, c^2) i (bc, ca, ab) są uporządkowane przeciwnie.

29. Dane są liczby dodatnie $a_1, \ldots, a_n$. Udowodnij, że

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \ldots + \frac{a_n}{a_1} \geq n.$$

Wskazówka. Ciągi $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ i $\left(\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \ldots, \frac{1}{a_n}\right)$ są uporządkowane przeciwnie.

30. (Nierówność Nesbitta) Dane są liczby dodatnie a, b i c. Udowodnij, że

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{3}{2}.$$

Rozwiązanie. To zadanie udowodnimy kilkoma sposobami. Jest to zadanie cytowane w wielu zbiorach zadań olimpijskich i znamy co najmniej kilkanaście jego rozwiązań.

Sposób 1. Najpierw zastosujemy metodę ciągów uporządkowanych zgodnie. Zauważmy, że ciągi (a,b,c) i $\left(\frac{1}{b+c},\frac{1}{c+a},\frac{1}{a+b}\right)$ są uporządkowane zgodnie. Zatem

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ \frac{1}{b+c} & \frac{1}{c+a} & \frac{1}{a+b} \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} a & b & c \\ \frac{1}{c+a} & \frac{1}{a+b} & \frac{1}{b+c} \end{bmatrix},$$

czyli

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{a}{c+a}+\frac{b}{a+b}+\frac{c}{b+c}.$$

W podobny sposób dowodzimy, że

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{a}{a+b}+\frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+a}.$$

Po dodaniu stronami obu ostatnich nierówności i podzieleniu obu stron przez 2, otrzymamy tezę.

Sposób 2. Niech

$$x=b+c,\quad y=a+c,\quad z=a+b.$$

Wówczas

$$x+y=a+b+2c=z+2c.$$

Stąd

$$c=\frac{x+y-z}{2}.$$

Podobnie otrzymujemy

$$a=\frac{y+z-x}{2}\quad \text{oraz}\quad b=\frac{x+z-y}{2}.$$

Podstawiamy obliczone wartości do lewej strony naszej nierówności:

$$\begin{aligned}\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}&=\frac{y+z-x}{2x}+\frac{x+z-y}{2y}+\frac{x+y-z}{2z}=\\ &=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{y+z}{x}-1+\frac{x+z}{y}-1+\frac{x+y}{z}-1\right)=\\ &=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}+\frac{x}{z}+\frac{z}{x}+\frac{y}{z}+\frac{z}{y}-3\right)\geq\\ &\geq\frac{1}{2}\cdot(2+2+2-3)=\frac{3}{2}.\end{aligned}$$

Sposób 3. Niech

$$x = b + c, \quad y = a + c, \quad z = a + b.$$

Niech następnie $s = a + b + c$. Wówczas $x + y + z = 2s$ oraz

$$a = s - x, \quad b = s - y, \quad c = s - z.$$

Podstawmy te wartości do lewej strony nierówności:

$$\begin{aligned}
\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} &= \frac{s-x}{x} + \frac{s-y}{y} + \frac{s-z}{z} = \\
&= \frac{s}{x} - 1 + \frac{s}{y} - 1 + \frac{s}{z} - 1 = s \cdot \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) - 3 = \\
&= \frac{1}{2} \cdot (x + y + z) \cdot \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) - 3 \geq \\
&\geq \frac{1}{2} \cdot 9 - 3 = \frac{3}{2}.
\end{aligned}$$

Ostatnia nierówność wynika z zadania 8:

$$(x + y + z) \cdot \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) \geq 9.$$

Sposób 4. Niech $s = a + b + c$. Niech następnie

$$x = \frac{a}{s}, \quad y = \frac{b}{s}, \quad z = \frac{c}{s}.$$

Wówczas $0 < x < 1$, $0 < y < 1$, $0 < z < 1$ oraz

$$x + y + z = \frac{a + b + c}{s} = 1.$$

Przekształcimy teraz lewą stronę naszej nierówności:

$$\begin{aligned}
\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} &= \frac{a}{s-a} + \frac{b}{s-b} + \frac{c}{s-c} = \\
&= \frac{\frac{a}{s}}{1 - \frac{a}{s}} + \frac{\frac{b}{s}}{1 - \frac{b}{s}} + \frac{\frac{c}{s}}{1 - \frac{c}{s}} = \\
&= \frac{x}{1-x} + \frac{y}{1-y} + \frac{z}{1-z} = \\
&= \frac{x - 1 + 1}{1-x} + \frac{y - 1 + 1}{1-y} + \frac{z - 1 + 1}{1-z} = \\
&= -1 + \frac{1}{1-x} - 1 + \frac{1}{1-y} - 1 + \frac{1}{1-z} = \\
&= \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1-y} + \frac{1}{1-z} - 3.
\end{aligned}$$

Teraz skorzystamy jeszcze raz z zadania 8:

$$\big((1-x)+(1-y)+(1-z)\big)\cdot\left(\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1-y}+\frac{1}{1-z}\right)\geq 9.$$

Ponieważ

$$(1-x)+(1-y)+(1-z)=3-(x+y+z)=3-1=2,$$

więc

$$\left(\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1-y}+\frac{1}{1-z}\right)\geq\frac{9}{2}.$$

Powracamy do naszej nierówności:

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}=\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1-y}+\frac{1}{1-z}-3\geq\frac{9}{2}-3=\frac{3}{2}.$$

Sposób 5. Tak jak w sposobie 4, otrzymujemy

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}=\frac{x}{1-x}+\frac{y}{1-y}+\frac{z}{1-z}.$$

Teraz dowodzimy, że dla dowolnej liczby x takiej, że $0<x<1$ zachodzi nierówność

$$\frac{x}{1-x}\geq\frac{9}{4}x-\frac{1}{4}.$$

W tym celu przekształcamy tę nierówność w sposób równoważny:

$$\begin{gathered}\frac{4x}{1-x}\geq 9x-1,\\ 4x\geq(1-x)(9x-1),\\ 4x\geq 9x-1-9x^2+x,\\ 9x^2-6x+1\geq 0,\\ (3x-1)^2\geq 0.\end{gathered}$$

Mamy zatem nierówności

$$\frac{x}{1-x}\geq\frac{9}{4}x-\frac{1}{4},\qquad\frac{y}{1-y}\geq\frac{9}{4}y-\frac{1}{4},\qquad\frac{z}{1-z}\geq\frac{9}{4}z-\frac{1}{4}.$$

Dodajemy stronami te trzy nierówności:

$$\frac{x}{1-x}+\frac{y}{1-y}+\frac{z}{1-z}\geq\frac{9}{4}\cdot(x+y+z)-3\cdot\frac{1}{4}=\frac{9}{4}-\frac{3}{4}=\frac{3}{2}.$$

Jeszcze raz popatrzmy, w jaki sposób można znaleźć nierówność

$$\frac{x}{1-x}\geq\frac{9}{4}x-\frac{1}{4}.$$

Szukamy liczb a i b takich, by dla każdego x takiego, że $0 < x < 1$ zachodziła nierówność

$$\frac{x}{1-x} \geq ax + b$$

oraz by dla $x = \frac{1}{3}$ ta nierówność stawała się równością. Zauważamy bowiem, że dla $x = y = z = \frac{1}{3}$ zachodzi równość

$$\frac{x}{1-x} + \frac{y}{1-y} + \frac{z}{1-z} = \frac{3}{2}.$$

Podstawmy zatem $x = \frac{1}{3}$:

$$\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{a}{3} + b.$$

Stąd otrzymujemy $b = \frac{1}{2} - \frac{a}{3}$. Teraz próbujemy wyznaczyć a. Mamy nierówność

$$\frac{x}{1-x} \geq ax + \frac{1}{2} - \frac{a}{3}.$$

Przekształcamy tę nierówność w sposób równoważny:

$$\begin{gathered} \frac{6x}{1-x} \geq 6ax + 3 - 2a, \\ 6x \geq (1-x)(6ax + 3 - 2a), \\ 6x \geq 6ax + 3 - 2a - 6ax^2 - 3x + 2ax, \\ 6ax^2 + (9-8a)x + (2a-3) \geq 0. \end{gathered}$$

Szukamy takiego a, by $a > 0$ oraz $\Delta \leq 0$. Obliczmy zatem wyróżnik Δ:

$$\Delta = (9-8a)^2 - 24a(2a-3) = 81 - 144a + 64a^2 - 48a^2 + 72a = 16a^2 - 72a + 81 = (4a-9)^2.$$

Stąd $a = \frac{9}{4}$ oraz $b = -\frac{1}{4}$.

Sposób 6. Tak jak w sposobie 4, otrzymujemy

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} = \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1-y} + \frac{1}{1-z} - 3.$$

Teraz możemy łatwo pokazać (szczegóły pozostawię jako ćwiczenie), że dla każdego x takiego, że $0 < x < 1$, zachodzi następująca nierówność pomocnicza:

$$\frac{1}{1-x} \geq \frac{9}{4}x + \frac{3}{4}.$$

Stąd otrzymujemy

$$\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1-y} + \frac{1}{1-z} \geq \frac{9}{4} \cdot (x+y+z) + \frac{9}{4} = \frac{9}{2}.$$

Stąd ostatecznie

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} = \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1-y} + \frac{1}{1-z} - 3 \geq \frac{9}{2} - 3 = \frac{3}{2}.$$

Sposób znalezienia nierówności pomocniczej jest taki sam, jak w poprzednim przykładzie. Szczegóły pozostawię jako ćwiczenie.

Zestaw 9.
Geometria

1. Dane są odcinki o długościach $1, 2, 3, \ldots, 16$. Ile różnych trójkątów można zbudować, wybierając za każdym razem trzy różne odcinki?

Rozwiązanie. Zastanówmy się, ile jest trójkątów o najdłuższym boku równym n. Warunkiem koniecznym i wystarczającym dla istnienia takiego trójkąta jest to, by suma dwóch krótszych boków była dłuższa od boku najdłuższego. Popatrzmy zatem, jakie trójki boków mogą utworzyć trójkąt, gdy najdłuższy bok jest równy $4, 5, 6, \ldots$:

$$\begin{aligned}
4:&\quad (2,3,4),\\
5:&\quad (2,4,5),(3,4,5),\\
6:&\quad (2,5,6),(3,5,6),(4,5,6),\\
&\quad (3,4,6),\\
7:&\quad (2,6,7),(3,6,7),(4,6,7),(5,6,7),\\
&\quad (3,5,7),(4,5,7),\\
8:&\quad (2,7,8),(3,7,8),(4,7,8),(5,7,8),(6,7,8),\\
&\quad (3,6,8),(4,6,8),(5,6,8),\\
&\quad (4,5,8),\\
9:&\quad (2,8,9),(3,8,9),(4,8,9),(5,8,9),(6,8,9),(7,8,9),\\
&\quad (3,7,9),(4,7,9),(5,7,9),(6,7,9),\\
&\quad (4,6,9),(5,6,9),\\
10:&\quad (2,9,10),(3,9,10),(4,9,10),(5,9,10),(6,9,10),(7,9,10),(8,9,10),\\
&\quad (3,8,10),(4,8,10),(5,8,10),(6,8,10),(7,8,10),\\
&\quad (4,7,10),(5,7,10),(6,7,10),\\
&\quad (5,6,10),
\end{aligned}$$

Nietrudno dostrzec regułę. Jeśli najdłuższy bok ma długość parzystą, to liczba trójkątów jest sumą kolejnych liczb nieparzystych (gdy grupujemy trójkąty według drugiego pod względem długości boku). Zatem liczby tych trójkątów są kwadratami liczb naturalnych. Popatrzmy na sytuację ogólną, w której patrzymy na trójkąty o najdłuższym boku równym $2n$:

drugi bok	trójkąty	liczba trójkątów
$2n-1$	$(2, 2n-1, 2n), \ldots, (2n-2, 2n-1, 2n)$	$2n-3,$
$2n-2$	$(3, 2n-2, 2n), \ldots, (2n-3, 2n-2, 2n)$	$2n-5,$
$2n-3$	$(4, 2n-3, 2n), \ldots, (2n-4, 2n-3, 2n)$	$2n-7,$
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
$n+3$	$(n-2, n+3, 2n), \ldots, (n+2, n+3, 2n)$	$5,$
$n+2$	$(n-1, n+2, 2n), \ldots, (n+1, n+2, 2n)$	$3,$
$n+1$	$(n, n+1, 2n)$	$1.$

Łączna liczba tych trójkątów jest zatem równa (por. uwagę po zadaniu 13 w zestawie 5 z kombinatoryki):

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-7) + (2n-5) + (2n-3) = (n-1)^2.$$

W podobny sposób możemy przekonać się, że jeśli nadłuższy bok jest równy $2n+1$, to liczba wszystkich trójkątów jest równa $n(n-1)$ (utworzenie odpowiedniej tabelki pozostawię jako ćwiczenie). Teraz możemy zbudować tabelkę pokazującą, ile jest trójkątów o danej długości najdłuższego boku:

4 :	1	11 :	20
5 :	2	12 :	25
6 :	4	13 :	30
7 :	6	14 :	36
8 :	9	15 :	42
9 :	12	16 :	49
10 :	16		

Po zsumowaniu otrzymamy 252 trójkąty.

2. Dane są odcinki o długościach $1, 2, 3, \ldots, 17$. Ile różnych trójkątów można zbudować, wybierając za każdym razem trzy różne odcinki?

Rozwiązanie. Istnieje 56 trójkątów o najdłuższym boku równym 17. Zatem szukana liczba trójkątów jest równa $252+56=308$.

Uwaga. Można udowodnić, że jeśli liczba n jest parzysta, to liczba trójkątów zbudowanych z odcinków o długościach $1, 2, 3, \ldots, n$ jest równa $\frac{1}{24} \cdot n(n-2)(2n-5)$. Dla $n=16$ mamy:

$$\frac{1}{24} \cdot 16 \cdot 14 \cdot 27 = 2 \cdot 14 \cdot 9 = 252.$$

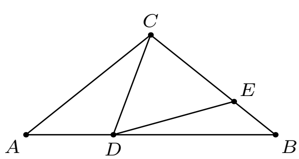
Natomiast, jeśli liczba n jest nieparzysta, to ta liczba rozważanych trójkątów jest równa $\frac{1}{24} \cdot (n-1)(n-3)(2n-1)$. Dla $n=17$ mamy

$$\frac{1}{24} \cdot 16 \cdot 14 \cdot 33 = 2 \cdot 14 \cdot 11 = 308.$$

Dowody tych wzorów są już trudniejsze (potrzebny jest wzór na sumę kwadratów liczb od 1 do n) i nie pokazuję ich gimnazjalistom. Te dowody mogą być pokazane licealistom przygotowującym się do Olimpiady.

3. Dany jest trójkąt równoramienny ABC, w którym $AC=BC$. Na bokach AB i BC wybrano odpowiednio punkty D i E w taki sposób, by $CD=CE$. Udowodnij, że $\measuredangle ACD = 2 \cdot \measuredangle BDE$.

Rozwiązanie. Oczywiście $\measuredangle ABC = \measuredangle BAC$ oraz $\measuredangle CDE = \measuredangle CED$ (rys. 20.51). Korzystając dwukrotnie z własności kątów zewnętrznych trójkątów, otrzymujemy



Rys. 20.51

$$\begin{aligned}\measuredangle BAC + \measuredangle ACD = \measuredangle BDC = \measuredangle BDE + \measuredangle CDE = \\ = \measuredangle BDE + \measuredangle CED = \\ = \measuredangle BDE + \measuredangle BDE + \measuredangle ABC = \\ = \measuredangle BAC + 2 \cdot \measuredangle BDE,\end{aligned}$$

skąd natychmiast wynika teza.

4. Punkt D leży wewnątrz trójkąta ABC. Na bokach AC i BC wybrano odpowiednio punkty E i F tak, że półprosta AF jest dwusieczną kąta CAD oraz półprosta BE jest dwusieczną kąta CBD. Półproste AF i BE przecinają się w punkcie G. Udowodnij, że

$$\measuredangle AGB = \frac{1}{2} \cdot (\measuredangle ACB + \measuredangle ADB).$$

Rozwiązanie. Zauważmy, że

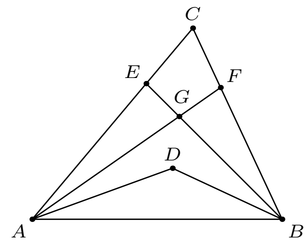
$$\measuredangle BAG = \measuredangle BAC - \measuredangle CAG = \measuredangle BAC - \measuredangle DAG$$

oraz

$$\measuredangle BAG = \measuredangle BAD + \measuredangle DAG.$$

(rys. 20.52). Stąd dostajemy

$$2 \cdot \measuredangle BAG = \measuredangle BAC + \measuredangle BAD.$$



Rys. 20.52

W podobny sposób pokazujemy, że

$$2 \cdot \measuredangle ABG = \measuredangle ABC + \measuredangle ABD.$$

Teraz

$$2 \cdot \measuredangle BAG + 2 \cdot \measuredangle ABG = (\measuredangle BAC + \measuredangle ABC) + (\measuredangle BAD + \measuredangle ABD) =$$
$$= (180^\circ - \measuredangle ACB) + (180^\circ - \measuredangle ADB) = 360^\circ - (\measuredangle ACB + \measuredangle ADB).$$

Z drugiej strony,

$$2 \cdot \measuredangle BAG + 2 \cdot \measuredangle ABG = 2 \cdot (180^\circ - \measuredangle AGB) = 360^\circ - 2 \cdot \measuredangle AGB.$$

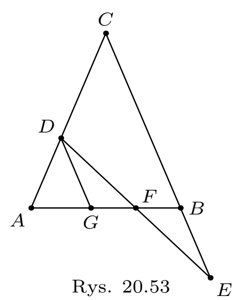
Zatem

$$360^\circ - 2 \cdot \measuredangle AGB = 360^\circ - (\measuredangle ACB + \measuredangle ADB),$$

skąd natychmiast wynika teza.

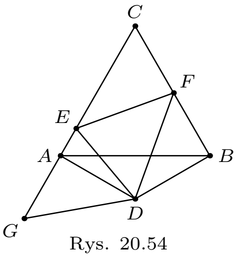
5. Dany jest trójkąt równoramienny ABC, w którym $AC = BC$. Na boku AC wybieramy punkt D. Na półprostej CB, za punktem B, wybieramy taki punkt E, by $BE = AD$. Odcinki AB i DE przecinają się w punkcie F. Udowodnij, że $DF = EF$.

Rozwiązanie. Rysujemy odcinek DG równoległy do boku BC (rys. 20.53). Zauważamy, że $\measuredangle AGD = \measuredangle ABC = \measuredangle BAC$, skąd wynika, że $BE = AD = AG$. Następnie, z równości kątów naprzemianległych $\measuredangle FDG = \measuredangle FEB$ oraz $\measuredangle FGD = \measuredangle FBE$, wynika, że $\triangle DGF \equiv \triangle EBF$. Zatem $DF = EF$.



Rys. 20.53

6. Dany jest trójkąt równoboczny ABC. Prosta prostopadła do AC przechodząca przez punkt A przecina w punkcie D prostą prostopadłą do BC przechodzącą przez punkt B. Na bokach AC i BC wybieramy odpowiednio punkty E i F tak, by $\measuredangle EDF = 60°$. Udowodnij, że $EF = AE + BF$.



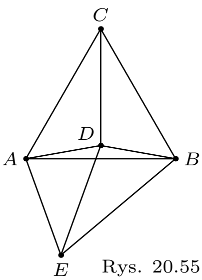
Rys. 20.54

Rozwiązanie. Na półprostej CA, za punktem A, wybieramy punkt G w taki sposób, by $AG = BF$ (rys. 20.54). Wtedy dość łatwo wykazujemy, że $\triangle DAG \equiv \triangle DBF$ (cecha BKB). Stąd wynika, że $DG = DF$ oraz $\measuredangle ADG = \measuredangle BDF$. Teraz zauważamy, że $\measuredangle EDG = 60°$ i stąd łatwo wynika, że trójkąty EDF i EDG są przystające. Zatem

$$EF = EG = AE + AG = AE + BF,$$

co kończy dowód.

7. Dany jest trójkąt równoboczny ABC. Punkt D leży wewnątrz trójkąta ABC oraz $AD = BD$. Punkt E leży na zewnątrz trójkąta ABC, przy czym $AB = BE$ oraz $\measuredangle DBC = \measuredangle DBE$. Udowodnij, że $\measuredangle BED = 30°$.



Rys. 20.55

Rozwiązanie. Punkty C i D leżą na symetralnej odcinka AB, a więc półprosta CD jest dwusieczną kąta ACB. Stąd $\measuredangle BCD = 30°$ (rys. 20.55). Teraz wystarczy zauważyć, że trójkąty BCD i BED są przystające. Zatem otrzymujemy

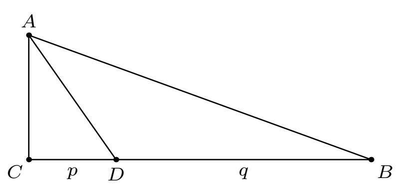
$$\measuredangle BED = \measuredangle BCD = 30°.$$

8. Dany jest trójkąt prostokątny ABC, w którym $\measuredangle ACB = 90°$. Odcinek AD jest dwusieczną kąta BAC. Dane są długości odcinków BD i CD:

$$CD = p, \quad BD = q.$$

Oblicz długość boków AB i AC.

Rozwiązanie. Niech $a = BC = p + q$, $b = AC$ oraz $c = AB$ (rys. 20.56).



Rys. 20.56

Z twierdzenia o dwusiecznej wynika, że

$$\frac{p}{q} = \frac{b}{c},$$

skąd wynika, że $b = c \cdot \frac{p}{q}$. Z twierdzenia Pitagorasa wynika, że

$$c^2 = a^2 + b^2 = (p+q)^2 + c^2 \cdot \frac{p^2}{q^2}.$$

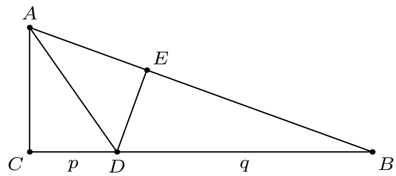
Rozwiązujemy otrzymane równanie:

$$c^2q^2 = q^2(p+q)^2 + c^2p^2,$$
$$c^2(q^2-p^2) = q^2(p+q)^2,$$
$$c = \frac{q(p+q)}{\sqrt{q^2-p^2}} = \frac{q\sqrt{q^2-p^2}}{q-p}.$$

Stąd

$$b = c \cdot \frac{p}{q} = \frac{p\sqrt{q^2-p^2}}{q-p}.$$

Inny sposób rozwiązania polega na zastosowaniu twierdzenia Pitagorasa zamiast twierdzenia o dwusiecznej. Niech punkt E będzie rzutem punktu D na przeciwprostokątną AB (rys. 20.57).



Rys. 20.57

Wówczas nietrudno zauważyć, że trójkąty ACD i AED są przystające. Stąd wynika, że $DE = p$ i $BE = c - b$. Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta BED otrzymujemy

$$(c-b)^2 + p^2 = q^2.$$

Zatem $c - b = \sqrt{q^2-p^2}$. Następnie z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta ABC otrzymujemy

$$(p+q)^2 = a^2 = c^2 - b^2 = (c-b)(c+b) = (c+b)\sqrt{q^2-p^2}.$$

Stąd

$$c + b = \frac{(p+q)^2}{\sqrt{q^2-p^2}} = \frac{(p+q)^2\sqrt{q^2-p^2}}{q^2-p^2} = \frac{(p+q)\sqrt{q^2-p^2}}{q-p}.$$

Zatem

$$2b = (c+b) - (c-b) = \frac{(p+q)\sqrt{q^2-p^2}}{q-p} - \sqrt{q^2-p^2} =$$
$$= \sqrt{q^2-p^2} \cdot \left(\frac{p+q}{q-p} - 1\right) = \frac{2p\sqrt{q^2-p^2}}{q-p}$$

oraz

$$2c = (c+b) + (c-b) = \frac{(p+q)\sqrt{q^2-p^2}}{q-p} + \sqrt{q^2-p^2} =$$
$$= \sqrt{q^2-p^2} \cdot \left(\frac{p+q}{q-p} + 1\right) = \frac{2q\sqrt{q^2-p^2}}{q-p}.$$

Ostatecznie dostajemy

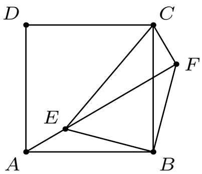
$$b = \frac{p\sqrt{q^2-p^2}}{q-p} \qquad \text{oraz} \quad c = \frac{q\sqrt{q^2-p^2}}{q-p}.$$

9. Dany jest kwadrat $ABCD$ i punkt E leżący wewnątrz niego. Dane są odległości punktu E od wierzchołków A, B i C kwadratu:

$$AE = 1, \quad BE = 2, \quad CE = 3.$$

Udowodnij, że $\measuredangle AEB = 135°$.

Rozwiązanie. Obracamy punkt E wokół punktu B o $90°$ zgodnie z ruchem wskazówek zegara i otrzymujemy w ten sposób punkt F. Ten punkt łączymy odcinkami z punktami B i C (rys. 20.58). Wówczas $BF = BE = 2$ oraz $\measuredangle EBF = 90°$. Zatem $EF = 2\sqrt{2}$. Następnie zauważamy, że $\measuredangle ABE = \measuredangle CBF$, $BA = BC$ oraz $BE = BF$. Stąd wynika, że trójkąty ABE i CBF są przystające, a więc $CF = AE = 1$. Teraz



Rys. 20.58

$$EF^2 + CF^2 = (2\sqrt{2})^2 + 1^2 = 8 + 1 = 9 = 3^2 = CE^2.$$

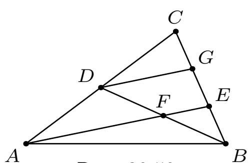
Z twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Pitagorasa wynika, że trójkąt EFC jest prostokątny. Zatem

$$\measuredangle AEB = \measuredangle BFC = \measuredangle BFE + \measuredangle EFC = 45° + 90° = 135°.$$

10. Na bokach AC i BC trójkąta ABC obrano odpowiednio punkty D i E w taki sposób, że

$$AD = CD, \quad 2 \cdot BE = CE.$$

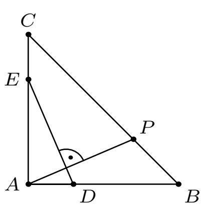
Odcinki AE i BD przecinają się w punkcie F. Udowodnij, że $AE = 4 \cdot EF$.



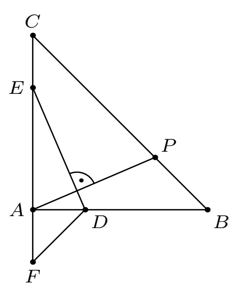
Rys. 20.58

Rozwiązanie. Niech punkt G będzie środkiem odcinka CE (rys. 20.59). Wówczas $BE = EG = GC$. Odcinek DG jest linią środkową w trójkącie AEC, zatem $AE = 2 \cdot DG$. Odcinek EF jest linią środkową w trójkącie DGB, zatem $DG = 2 \cdot EF$. Stąd $AE = 4 \cdot EF$.

11. Dany jest trójkąt prostokątny równoramienny ABC, w którym $\measuredangle A = 90°$. Punkty D i E leżą odpowiednio na bokach AB i AC tego trójkąta, przy czym $AD = CE$. Prosta przechodząca przez punkt A i prostopadła do prostej DE przecina bok BC w punkcie P (rys. 20.21). Wykaż, że $AP = DE$.



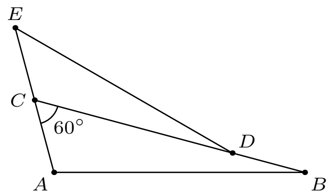
Rys. 20.21



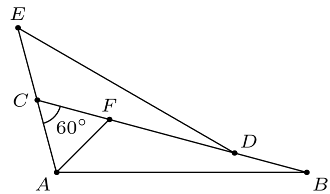
Rys. 20.60

Rozwiązanie. Na półprostej CA, na zewnątrz odcinka CA, wybieramy taki punkt F, by $AF = AD = CE$ (rys. 20.60). Wtedy: $EF = EA + AF = EA + CE = AC = AB$, $\measuredangle FED = 90° - \measuredangle EAP = \measuredangle BAP$ oraz $\measuredangle EFD = \measuredangle ABP = 45°$. Zatem trójkąty EFD oraz ABP są przystające i stąd $ED = AP$.

12. Dany jest trójkąt ABC, w którym $\measuredangle ACB = 60°$ oraz $AC < BC$. Punkt D leży na boku BC, przy czym $BD = AC$. Punkt E jest punktem symetrycznym do punktu A względem punktu C (rys. 20.22). Udowodnij, że $AB = DE$.



Rys. 20.22



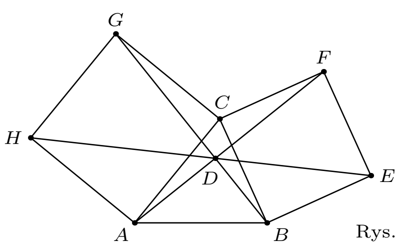
Rys. 20.61

Rozwiązanie. Na odcinku CB wybieramy taki punkt F, by $CF = CA$ (rys. 20.61). Wtedy trójkąt AFC jest równoboczny. Teraz pokazujemy, że $\triangle CDE \equiv \triangle FBA$:

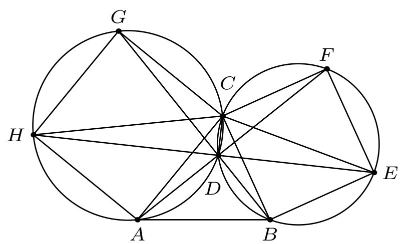
$$CD = FB, \quad CE = CA = FA, \quad \measuredangle ECD = \measuredangle AFB = 120°.$$

Stąd wynika, że $AB = DE$.

13. Na bokach BC i AC trójkąta ostrokątnego ABC zbudowano, po zewnętrznej stronie, kwadraty $BCFE$ i $ACGH$ (rys. 20.23). Udowodnij, że proste AF, BG i EH przecinają się w jednym punkcie.



Rys. 20.23



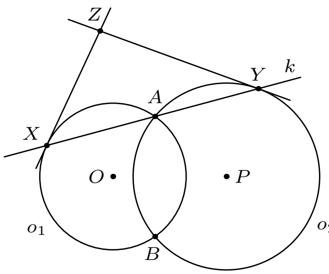
Rys. 20.62

Rozwiązanie. Niech D będzie różnym od C punktem przecięcia okręgów opisanych na obu kwadratach. Połączmy punkt D odcinkami z wierzchołkami obu kwadratów i narysujmy przekątne CH i CE kwadratów (rys. 20.62). Wówczas $\measuredangle CDH = \measuredangle CAH = 90°$ oraz $\measuredangle CDE = \measuredangle CBE = 90°$. Stąd wynika, że punkty H, D i E są współliniowe. Następnie $\measuredangle CDG = \measuredangle CHG = 45°$ oraz

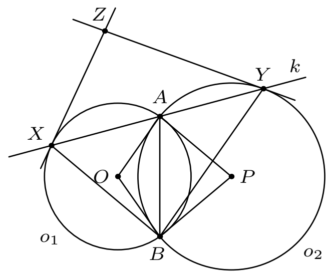
$$\measuredangle CDB = \measuredangle CDF + \measuredangle BDF = \measuredangle CEF + \measuredangle BCF = 45° + 90° = 135°.$$

Stąd wynika, że punkty B, D i G są współliniowe. W podobny sposób pokazujemy, że punkty A, D i F są współliniowe. Punkt D jest zatem punktem przecięcia prostych AF, BG i EH. To kończy dowód.

14. Dwa ustalone okręgi o_1 i o_2 przecinają się w punktach A i B. Prosta k przechodzi przez punkt A i przecina okręgi o_1 i o_2 odpowiednio w punktach X i Y, przy czym punkt X leży na zewnątrz okręgu o_2, a punkt Y na zewnątrz okręgu o_1. Styczne do okręgów o_1 i o_2 w punktach X i Y przecinają się w punkcie Z (rys. 20.24). Udowodnij, że miara kąta XZY nie zależy od wyboru prostej k.



Rys. 20.24



Rys. 20.63

Rozwiązanie. Łączymy punkty X i Y z punktem B, łączymy środki okręgów z punktami A i B i rysujemy odcinek AB (rys. 20.63). Z twierdzenia o kącie między styczną i cięciwą mamy:

$$\measuredangle XBY = \measuredangle XBA + \measuredangle ABY = \measuredangle ZXY + \measuredangle ZYX = 180^\circ - \measuredangle XZY.$$

Z drugiej strony

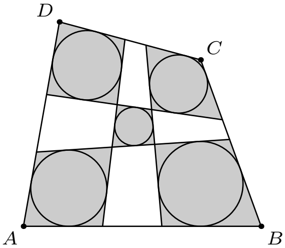
$$\measuredangle XBY = 180^\circ - \measuredangle BXY - \measuredangle BYX = 180^\circ - \frac{1}{2} \cdot \measuredangle AOB - \frac{1}{2} \cdot \measuredangle APB.$$

Zatem

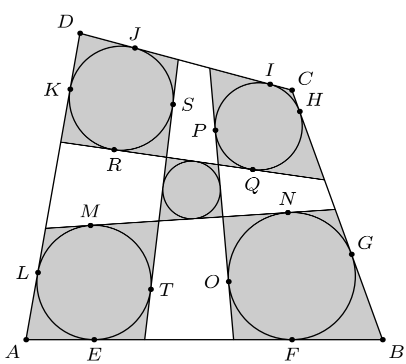
$$\measuredangle XZY = \frac{1}{2} \cdot \big(\measuredangle AOB + \measuredangle APB\big).$$

Stąd wynika, że kąt XZY nie zależy od wyboru prostej k.

15. Czworokąt wypukły $ABCD$ podzielono na dziewięć czworokątów, jak pokazano na rysunku 20.25. Udowodnij, że jeśli w zacieniowane czworokąty można wpisać okręgi, to również w czworokąt $ABCD$ można wpisać okrąg.



Rys. 20.25



Rys. 20.64

Rozwiązanie. Oznaczamy punkty styczności jak na rysunku 20.64. Z warunku koniecznego i wystarczającego na to, by w czworokąt wypukły można było wpisać okrąg dość łatwo wynika (szczegóły zostawiam jako ćwiczenie), że w środkowy czworokąt można wpisać okrąg wtedy i tylko wtedy, gdy

$$MN + RQ = OP + ST.$$

Teraz zauważamy, że

$$MN = EF, \quad RQ = JI, \quad OP = GH, \quad ST = KL.$$

Zatem

$$EF + JI = GH + KL.$$

Ponieważ

$$AE = AL, \quad BF = BG, \quad CH = CI, \quad DJ = DK,$$

więc

$$AB + CD = BC + DA,$$

co kończy dowód.

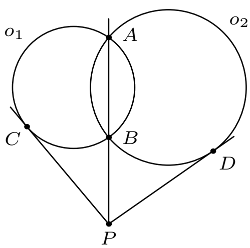
Uwaga. Można udowodnić więcej. Załóżmy, że w cztery narożne zacieniowane czworokąty można wpisać okręgi. Wówczas w czworokąt środkowy można wpisać okrąg wtedy i tylko wtedy, gdy w czworokąt $ABCD$ można wpisać okrąg. Dowód polega na przepisaniu powyższego dowodu w drugą stronę.

16. Okręgi o_1 i o_2 przecinają się w punktach A i B. Punkt P leży na prostej AB i na zewnątrz obu okręgów. Przez punkt P poprowadzono proste styczne do okręgów o_1 i o_2, odpowiednio w punktach C i D (rys. 20.26). Wykaż, że $PC = PD$.

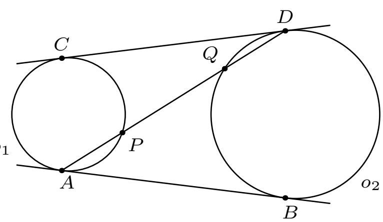
Rozwiązanie. Z twierdzeń o potędze punktu względem okręgu wynika, że

$$CP^2 = AP \cdot BP = DP^2,$$

czyli $CP = DP$.



Rys. 20.26



Rys. 20.27

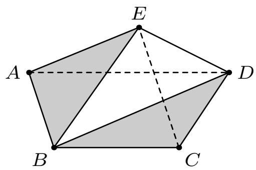
17. Okręgi o_1 i o_2 są rozłączne zewnętrznie. Wspólna styczna zewnętrzna do tych okręgów jest styczna do okręgów o_1 i o_2 odpowiednio w punktach A i B. Druga wspólna styczna zewnętrzna do tych okręgów jest styczna do okręgów o_1 i o_2 odpowiednio w punktach C i D. Prosta AD przecina okręgi o_1 i o_2 odpowiednio w punktach P i Q (rys. 20.27). Udowodnij, że $AP = QD$.

Rozwiązanie. Z twierdzeń o potędze punktu względem okręgu wynika, że

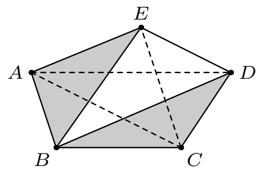
$$DP \cdot DA = DC^2 = AB^2 = AQ \cdot AD.$$

Zatem $DP = AQ$ i stąd $AP = DQ$.

18. Dany jest pięciokąt wypukły $ABCDE$. Jego przekątna AD jest równoległa do boku BC, a przekątna CE jest równoległa do boku AB (rys. 20.28). Wykaż, że pola trójkątów ABE i BCD są równe.



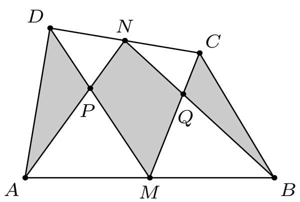
Rys. 20.28



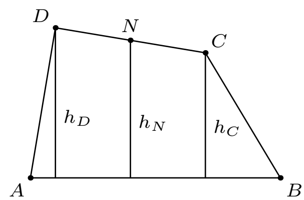
Rys. 20.65

Rozwiązanie. Dorysujmy przekątną AC pięciokąta (rys. 20.65). Ponieważ $AB \parallel EC$, więc $P_{ABE} = P_{ABC}$. Ponieważ $AD \parallel BC$, więc $P_{ABC} = P_{BCD}$. Zatem $P_{ABE} = P_{BCD}$.

19. Punkty M i N są odpowiednio środkami boków AB i CD czworokąta wypukłego $ABCD$. Odcinki AN i DM przecinają się w punkcie P, odcinki BN i CM przecinają się w punkcie Q (rys. 20.29). Udowodnij, że suma pól trójkątów ADP i BCQ jest równa polu czworokąta $MPNQ$.



Rys. 20.29



Rys. 20.66

Rozwiązanie. Opuśćmy z punktów D, N i C odcinki h_D, h_N i h_C prostopadłe do boku AB (rys. 20.66). Odcinek h_N jest linią środkową trapezu o podstawach h_D i h_C. Zatem

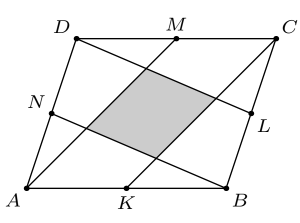
$$h_N = \frac{1}{2} \cdot (h_D + h_C).$$

Teraz

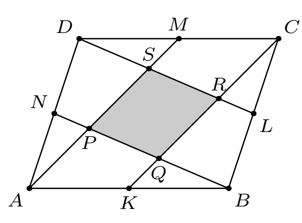
$$P_{AMD} + P_{BMC} = \frac{1}{2} \cdot AM \cdot h_D + \frac{1}{2} \cdot BM \cdot h_C = \frac{1}{4} \cdot AB \cdot (h_d + h_C) = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot h_N = P_{ABN}.$$

Odejmując pola części wspólnych (to znaczy trójkątów AMP i BMQ), otrzymujemy tezę.

20. Punkty K, L, M, N są odpowiednio środkami boków AB, BC, CD, DA równoległoboku $ABCD$ (rys. 20.30). Znając pole równoległoboku $ABCD$, oblicz pole czworokąta ograniczonego prostymi AM, BN, CK, DL.



Rys. 20.30



Rys. 20.67

Rozwiązanie. Pozostawię jako ćwiczenie wykazanie, że $AM \parallel KC$ oraz $BN \parallel LD$. Zatem zacieniowany czworokąt jest równoległobokiem. Oznaczmy jego wierzchołki tak jak na rysunku 20.67. Ponieważ $AN = ND$ oraz $NP \parallel DS$, więc odcinek PN jest linią środkową trójkąta ASD. Zatem

$$AP = PS \quad \text{oraz} \quad NP = \frac{1}{2} \cdot DS.$$

Podobnie

$$BQ = QP \quad \text{oraz} \quad KQ = \frac{1}{2} \cdot AP,$$
$$CR = RQ \quad \text{oraz} \quad LR = \frac{1}{2} \cdot BQ,$$
$$DS = SR \quad \text{oraz} \quad MS = \frac{1}{2} \cdot CR.$$

Ponieważ $PQ = SR$ i $PS = QR$, więc

$$AP = PS = CR = RQ = 2 \cdot MS = 2 \cdot KQ$$

oraz

$$BQ = QP = DS = SP = 2 \cdot NP = 2 \cdot LR.$$

Stąd wynika, że $BP = 4 \cdot NP$, czyli $P_{ABP} = 4 \cdot P_{APN}$. Następnie

$$P_{ABN} = \frac{1}{4} \cdot P_{ABCD},$$

więc

$$P_{ABP} = \frac{4}{5} \cdot P_{ABN} = \frac{1}{5} \cdot P_{ABCD}.$$

Podobnie

$$P_{BCQ} = P_{CDR} = P_{DAS} = \frac{1}{5} \cdot P_{ABCD}.$$

Stąd wynika, że $P_{PQRS} = \frac{1}{5} \cdot P_{ABCD}$.

21. Bibliografia

[Cut-the-Knot] `www.cut-the-knot.org` *The 80-80-20 triangle.*

[Engel] Engel A., *Problem-Solving Strategies.* Springer-Verlag, New York, 1998.

[Escher] `www.mcescher.com`

[Feller] Feller W., *Wstęp do rachunku prawdopodobieństwa*, tom I, PWN, Warszawa 1980, s. 202.

[Guzicki-1] Guzicki W., Diagramy Venna. *Delta*, 3 (382)/2006, s. 1–3.

[Guzicki-2] Guzicki W., *Geometria maswerków gotyckich.* Wydawnictwo Szkolne OMEGA, Kraków 2011.

[Guzicki-Δ] Guzicki W., cykl artykułów w czasopiśmie *Delta.*
Okna gotyckie. *Delta*, 11 (414) 2008, s. 10–11.
Wieloliście. *Delta*, 12 (415) 2008, s. 12–13.
Okna gotyckie — ciąg dalszy, *Delta*, 1 (416) 2009, s. 12–13.
Okna gotyckie i trójliście. *Delta*, 2 (417) 2009, s. 12–13.
Rozety. *Delta*, 6 (421) 2009, s. 8–9.
Rozety i ostrołuki. *Delta*, 7 (422) 2009, s. 12–13.
Rozeta katedry w Metz. *Delta*, 8 (423) 2009, s. 10–11.
Rozeta katedry w Metz — ciąg dalszy. *Delta*, 9 (424) 2009, s. 6–7.
Rozeta katedry w Metz — dokończenie. *Delta*, 11 (426) 2009, s. 8–9.
Środek potęgowy trzech okręgów. *Delta*, 12 (427) 2009, s. 12–13.
Jeszcze jedno zadanie konstrukcyjne. *Delta*, 4 (431) 2010, s. 12 − 13.

[Guzicki-Pompe-1] Guzicki W., Pompe W., Twierdzenie Carnota. *II Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów 2006/2007.* Wydawnictwo Szkolne OMEGA, Kraków 2009.

[Guzicki-Pompe-2] Guzicki W., Pompe W., Długości odcinków w trójkącie. *IV Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów 2008/2009* Wydawnictwo Szkolne OMEGA, Kraków 2012

[Iwaszkiewicz] Iwaszkiewicz B., *Geometria elementarna*, część III. Państwowe Zakłady Wydawnictw Szkolnych, Warszawa, 1964.

[Jakubowski-Sztencel] Jakubowski J., Sztencel R., *Rachunek prawdopodobieństwa dla (prawie) każdego.* SCRIPT, Warszawa, 2002.

[Kordos] Kordos M., *Wykłady z historii matematyki*, wyd. III. SCRIPT, Warszawa, 2010.

[Księga] Aigner M., Ziegler, G. M., *Dowody z Księgi.* PWN, Warszawa, 2002.

[Kourliandtchik] Kourliandtchik L., *Wędrówki po krainie nierówności.* Wydawnictwo Aksjomat, Toruń, 2000.

[Kubica-Szymczyk] Kubica A., Szymczyk T., *Nierówności.* PERSPEKTIV, Bielsko-Biała, 2007.

[Manfrino]	Manfrino R. B., Ortega J. A. G., Delgado R. V., *Inequalities. A Mathematical Olympiad Approach.* Birkhäuser Verlag AG, Basel, Boston, Berlin, 2009.
[Mitrinović]	Mitrinović D. S., *Elementarne nierówności.* PWN, Warszawa, 1972.
[Polya-1]	Polya G., *Jak to rozwiązać.* PWN, Warszawa, 1964.
[Polya-2]	Polya G., *Odkrycie matematyczne*, PWN, Warszawa, 1975.
[Pompe]	Pompe W., artykuły i zestawy zadań zamieszczone na stronie `www.pompe.pl/geometria/`
[Schattschneider-1]	Schattschneider D., *M. C. Escher. Visions of Symmetry.* Thames and Hudson, London, 2004.
[Schattschneider-2]	Schattschneider D. The Plane Symmetry Groups: Their Recognition and Notation. *The American Mathematical Monthly*, Vol. 85 (1978), No. 6, s. 439–450.
[Sierpiński-1]	Sierpiński W., *Wstęp do teorii liczb*, wydanie trzecie poprawione. Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne, Warszawa, 1987.
[Sierpiński-2]	Sierpiński W., *O rozwiązywaniu równań w liczbach całkowitych.* PWN, Warszawa, 2009.
[Skanavi]	*Сборник задач по математике для поступающих во втузы*; под редакцией М. И. Сканави, Вышэйшая школа, Минск, 1990.
[Stachowski]	Stachowski E., *Kombinatoryka i rachunek prawdopodobieństwa w zadaniach.* Oficyna Wydawniczo-Poligraficzna Adam, Warszawa, 2006.
[Steinhaus]	Steinhaus H., *Kalejdoskop matematyczny*, wyd. czwarte zmienione. Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne, Warszawa, 1989, s. 253.
[Stewart]	Stewart I., *Listy do młodego matematyka.* Prószyński i Ska, Warszawa 2008
[Straszewicz]	Straszewicz S., *Zadania z Olimpiad Matematycznych.* Państwowe Zakłady Wydawnictw Szkolnych, tom I, Warszawa, 1956. tom II, Warszawa, 1961. tom III, Warszawa, 1967. tom IV, Warszawa, 1972. Następne tomy zadań innych autorów: Browkin J., tom V, WSiP, Warszawa, 1980. Browkin J., tom VI, WSiP, Warszawa, 1983. Bryński M., tom VII, WSiP, Warszawa, 1995. Kuczma M., tom VIII, WSiP, Warszawa, 2000.
[Szurek]	Szurek M., *Opowieści geometryczne.* Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne, Warszawa, 1995.

[Turnau] Turnau S., *Wykłady o nauczaniu matematyki.* PWN, Warszawa, 1990.

[Wilson] Wilson R. J., *Wprowadzenie do teorii grafów.* PWN, Warszawa, 2004.

[Xu Jiagu] Xu Jiagu, *Lecture Notes on Mathematical Olympiad Courses*, t. I–II. World Scientific publishing Co. Pte. Ltd., Singapore, 2010.

Na zakończenie bibliografii chcę podać kilka zbiorów zadań, z których zaczerpnąłem wiele zadań; tych zbiorów nie cytuję w treści poradnika. Są to m. in. zbiory zadań, z których korzystałem w czasach, gdy sam chodziłem do szkoły (choć niektóre cytowane wydania są nieco późniejsze).

[Hornowski] Hornowski M., Pęczalski M., *Zbiór zadań algebraicznych dla klas VIII i IX*, Państwowe Zakłady Wydawnictw Szkolnych, Warszawa, 1966.

[Kartasiński] Kartasiński S., Okołowicz M., *Zbiór zadań maturalnych i egzaminacyjnych, część pierwsza, Algebra*, Państwowe Zakłady Wydawnictw Szkolnych, Warszawa, 1964.

[Modenow] Моденов П. С., *Сборник задач по специальному курсу элементарной математики*; Советская наука, Москва, 1957.

zdjęcie na okładce: www.photogenica.pl

Recenzowany poradnik będzie znakomitą pomocą dla nauczycieli matematyki w gimnazjum, którzy prowadzą, zajęcia rozszerzone z matematyki. Daje on nauczycielowi szeroki zestaw materiałów dydaktycznych, dotyczących zarówno tematów z gimnazjalnej podstawy programowej, jak i spoza tej podstawy. Te ostatnie materiały są dobrane zgodnie z ideą dobrego przygotowania uczniów zainteresowanych udziałem w Olimpiadzie Matematycznej Gimnazjalistów. Ogromną zaletą tego poradnika jest to, że stanowi on wynik autentycznego doświadczenia Autora. Każde z prezentowanych zadań zostało sprawdzone w pracy z uczniami. Z tekstu możemy się dowiedzieć także, jakie temu towarzyszyły okoliczności oraz jakie wnioski płyną z tego doświadczenia. Poradnik stanowi doskonały materiał wspierający pracę nauczyciela z uczniem zdolnym.

Prof. dr hab. Zbigniew Marciniak
fragment recenzji

OŚRODEK ROZWOJU EDUKACJI
Aleje Ujazdowskie 28
00-478 Warszawa
tel. 22 345 37 00, fax 22 345 37 70
mail: sekretariat@ore.edu.pl
www.ore.edu.pl

egzemplarz bezpłatny

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI · PTN POLSKIE TOWARZYSTWO NEOFILOLOGICZNE · talent · ORE Ośrodek Rozwoju Edukacji · SEM Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej · WYŻSZA SZKOŁA JĘZYKÓW OBCYCH WSJO.PL · UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

Publikacja współfinansowana przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego