ILE JEST MATEMATYKI W PODSTAWACH PROGRAMOWYCH INNYCH PRZEDMIOTÓW?

Marcin Karpiński

Redaktor naczelny czasopisma „Matematyka w szkole”, autor wielu artykułów metodycznych, współautor podręczników dla szkoły podstawowej, gimnazjum i liceum.

Spis treści

1. Szkoła podstawowa

Przyroda

Umiejętności matematyczne przydają się uczniom szkoły podstawowej głównie na lekcjach przyrody. W tabeli 1 przedstawiono zestawienie wymagań opisanych w podstawach programowych przedmiotów: *Przyroda* oraz *Matematyka*.

Tabela 1. Zestawienie wymagań opisanych w podstawach programowych przedmiotów *Przyroda* i *Matematyka*

Przyroda	Matematyka
Uczeń: • posługuje się podziałką liniową do określania odległości, porównuje odległość na mapie z odległością rzeczywistą w terenie, • wykonuje pomiary np. taśmą mierniczą, szacuje odległości i wysokości w terenie, • podaje jednostki pomiaru temperatury i opadów stosowane w meteorologii, • wskazuje na globusie: bieguny, równik, południk zerowy i 180°, • interpretuje prędkość jako drogę przebytą w jednostce czasu, wyznacza doświadczalnie prędkość swojego ruchu, np. marszu lub biegu.	Uczeń: • oblicza długość odcinka, gdy dana jest jego długość w skali, oraz długość odcinka w skali, gdy dana jest jego rzeczywista długość, • mierzy długość odcinka z dokładnością do milimetra, • odczytuje temperaturę (dodatnią i ujemną); stosuje jednostki pola, • mierzy kąty mniejsze od 180 stopni z dokładnością do 1 stopnia, • w sytuacji praktycznej oblicza: drogę przy danej prędkości i danym czasie, prędkość przy danej drodze i danym czasie, czas przy danej drodze i danej prędkości; stosuje jednostki prędkości: km/h, m/s.

Warto podkreślić, że podstawa programowa przedmiotu *Przyroda* nie wymaga od ucznia szkoły podstawowej posługiwania się skalą na planie i mapie, a jedynie tzw.

podziałką liniową. Wobec tego, ze skalą uczeń spotka się po raz pierwszy najprawdopodobniej na lekcjach matematyki. Z liczbami ujemnymi natomiast uczeń zetknie się wcześniej na lekcjach przyrody przy okazji pomiarów temperatury (najczęściej w klasie IV), gdyż na lekcjach matematyki jest to temat późniejszych klas szkoły podstawowej.

Podstawa przyrody nie wymaga umiejętności posługiwania się współrzędnymi geograficznymi, zatem brak omówienia układu współrzędnych na lekcjach matematyki nie będzie utrudniał pracy na lekcjach przyrody. Tym niemniej uczeń powinien umieć posługiwać się stopniową miarą kąta.

Wymagania zawarte w części, która dotyczy prędkości, w podstawie matematyki są większe niż w podstawie przyrody.

Historia i społeczeństwo

Wymagania mające związek z matematyką znajdziemy także w podstawie przedmiotu H*istoria i społeczeństwo*. W tabeli 2 zamieszczono ich zestawienie.

Tabela 2. Zestawienie wymagań opisanych w podstawach programowych przedmiotów *Historia* i *Matematyka*

Historia	Matematyka
(Wymagania ogólne) Uczeń: • posługuje się podstawowymi określeniami czasu historycznego: okres p.n.e., n.e., tysiąclecie, wiek, rok, • oblicza upływ czasu między wydarzeniami historycznymi i umieszcza je na linii chronologicznej.	Uczeń: • liczby w zakresie do 30 zapisane w systemie rzymskim przedstawia w systemie dziesiątkowym, a zapisane w systemie dziesiątkowym przedstawia w systemie rzymskim, • interpretuje liczby naturalne na osi liczbowej, • dodaje i odejmuje w pamięci liczby naturalne dwucyfrowe, liczby wielocyfrowe w przypadkach takich jak np. 230 + 80 lub 4600 – 1200; liczbę jednocyfrową dodaje do dowolnej liczby naturalnej i odejmuje od dowolnej liczby naturalnej; dodaje i odejmuje liczby naturalne wielocyfrowe pisemnie, a także za pomocą kalkulatora.

W tym zestawieniu wyraźnie widać jeden z powodów ograniczenia w podstawie matematyki zakresu posługiwania się rzymskim systemem zapisu liczb (do 30). Uczniom w szkole podstawowej ten system zapisu służy do zapisywania (i odczytywania) numerów miesięcy oraz wieków, a do tego wystarczą liczby mniejsze od 30.

Na lekcjach historii uczniowie posługują się tzw. linią chronologiczną. W niektórych podręcznikach jest ona przedstawiana podobnie do osi liczbowej, z którą uczniowie spotykają się na lekcjach matematyki. Różnice między tymi pojęciami są jednak istotne i dobrze by było, gdyby nauczyciele matematyki zdawali sobie z nich sprawę i potrafili je wyjaśnić. Po pierwsze, na linii chronologicznej nie ma zera, bo nie było roku zerowego ani wieku zerowego. Po drugie, lata lub wieki na linii chronologicznej to nie punkty (jak liczby na osi liczbowej), a raczej odcinki. Przecież każdy wiek i rok ma swój początek i koniec, a także pierwszą i drugą połowę.

2. Gimnazjum

W gimnazjum każda z podstaw programowych przedmiotów przyrodniczych (biologia, chemia, geografia, fizyka) zawiera wymagania związane z matematyką. Głównym problemem korelacji treści matematycznych w rożnych przedmiotach jest oczywiście kolejność pojawiania się tych treści. Niestety, potrzeby fizyków czy chemików, a nawet biologów wymagają, by niektóre pojęcia i problemy omawiane na lekcjach matematyki, wcześniej pojawiły się na lekcjach innych przedmiotów. Tak jest np. z wykresami funkcji, proporcjonalnością czy też z notacją wykładniczą.

Sposób posługiwania się matematyką na lekcjach przedmiotów przyrodniczych zależy nie tylko od podstaw programowych, ale także od pewnych przyzwyczajeń i tradycji nauczania tych przedmiotów. Wyraźnie to widać, gdy przyjrzymy się sposobom rozwiązywania zadań obliczeniowych przez geografów czy chemików. Dlatego warto, by nauczyciele matematyki znali nie tylko zapisy podstaw programowych przedmiotów przyrodniczych, ale także by przyjrzeli się przykładom zadań rozwiązywanych przez uczniów.

■ Biologia

Wydawałoby się, że na biologii na poziomie gimnazjum uczniowie nie posługują się umiejętnościami matematycznymi, tymczasem w podstawie programowej biologii znajdziemy kilka zapisów odnoszących się do matematyki (tab. 3).

Tabela 3. Zestawienie wymagań opisanych w podstawach programowych przedmiotów *Biologia* i *Matematyka*

Biologia	Matematyka
Wymagania ogólne: Uczeń: ● wykorzystuje różnorodne źródła i metody pozyskiwania informacji, w tym technologię informacyjno-komunikacyjną, odczytuje, analizuje, interpretuje i przetwarza informacje tekstowe, graficzne, liczbowe (…). Wymagania szczegółowe: Uczeń: ● oblicza indeks masy ciała (…).	Uczeń: ● odczytuje i interpretuje informacje przedstawione za pomocą wykresów funkcji (w tym wykresów opisujących zjawiska występujące w przyrodzie, gospodarce, życiu codziennym), ● interpretuje dane przedstawione za pomocą tabel, diagramów słupkowych i kołowych, wykresów.

Wymieniony w podstawie biologii indeks masy ciała (*Body Mass Index*, BMI) to liczba obliczana jako wartość wyrażenia:

$\frac{m}{w^2}$, gdzie m – masa ciała człowieka w kilogramach, w – wzrost w metrach.

Na lekcjach biologii uczniowie będą obliczali wartość BMI dla konkretnych danych i zapewne będą sprawdzali, czy otrzymana liczba mieści się w przedziale normy. Na matematyce mogłyby się pojawić zadania związane z przekształcaniem wzoru dotyczącego BMI, a także z rozwiązywaniem równań (ile powinienem ważyć, żeby mieścić się w normie).

Na lekcjach matematyki można też analizować zasadę, według której zbudowano BMI, tzn. można badać zależność (funkcję), jaką on wprowadza między masą ciała a wzrostem. Ze wzoru opisującego BMI widać na przykład, że przy prawidłowej budowie ciała masa jest proporcjonalna do kwadratu wzrostu. Wynika stąd, że rosnąc, człowiek nie zmienia swoich rozmiarów w pewnej skali (tak jak figury podobne), bo wówczas masa proporcjonalna by była do objętości, a więc do sześcianu wzrostu. Korzystając z odpowiedniego oprogramowania komputerowego, można nawet rysować wykresy odpowiednich funkcji.

Odczytywanie, analiza i interpretacja informacji liczbowych na lekcjach biologii może kryć pewne niespodzianki dla nauczycieli matematyki. Przede wszystkim dość szybko pojawiają się wielkości opisane za pomocą notacji wykładniczej. Na lekcjach matematyki potęgi o wykładnikach wyższych niż 3 wprowadzane są na ogół dopiero w klasie II, a sama notacja wykładnicza traktowana jest dużo ściślej niż w naukach przyrodniczych. Dobrze to widać w poniższym przykładzie zadania egzaminacyjnego:

W tabeli przedstawiono wyniki dwóch kolejnych badań krwi pewnej pacjentki przeprowadzonych w tym samym tygodniu oraz normę wartości wybranych parametrów krwi.

Parametr	Wyniki		Norma
	badanie I	badanie II	
Liczba erytrocytów	$4{,}2 \cdot 10^6$ w 1 mm^3	$4{,}2 \cdot 10^6$ w 1 mm^3	$3{,}7 \cdot 10^6 - 5{,}1 \cdot 10^6$ w 1 mm^3
Liczba leukocytów	$8 \cdot 10^3$ w 1 mm^3	$7{,}9 \cdot 10^3$ w 1 mm^3	$3{,}8 \cdot 10^3 - 10 \cdot 10^3$ w 1 mm^3
Zawartość glukozy	156 mg/dl	168 mg/dl	70 – 110 mg/dl
Zawartość cholesterolu całkowitego	178 mg/dl	181 mg/dl	150 – 200 mg/dl

Zadanie 9. (0–1)
Który z parametrów krwi pacjentki ma wartość niezgodną z normą?

Egzamin gimnazjalny z 2009 r.

W wierszu opisującym liczbę leukocytów, w ostatniej kolumnie pojawia się zapis $10 \cdot 10^3$. Na lekcjach matematyki ta liczba zapisana byłaby w notacji wykładniczej jako 10^4, bo notacja ta jest na lekcjach matematyki ściśle zdefiniowana. Swoją drogą, definicja ta wpisana jest nawet w podstawę programową matematyki:
(Uczeń) zapisuje liczby w notacji wykładniczej, tzn. w postaci $a \cdot 10^k$, gdzie $1 \leq a < 10$ oraz k jest liczbą całkowitą.

Uczymy notacji wykładniczej po to, by uczniowie w przyszłości mogli się nią swobodnie posługiwać w innych dziedzinach wiedzy. Skoro tam nie zawsze istotna jest ścisła definicja, co jest zapisem wykładniczym, a co już nie, nauczyciel matematyki powinien wziąć to pod uwagę. Istotne jest skupienie się głównie na umiejętnościach związanych z posługiwaniem się tak zapisanymi liczbami, a nie na zadaniach ćwiczących formalną poprawność zapisu.

Chemia

Chemia, obok fizyki, jest przedmiotem najsilniej wykorzystującym umiejętności matematyczne uczniów. Niestety, najczęściej właśnie na lekcjach chemii uczniowie rozwiązują takie same zadania jak na matematyce, ale w zupełnie inny sposób. Niezbędne jest, aby nauczyciele chemii i matematyki wspólnie przeanalizowali podstawy programowe tych przedmiotów. Co więcej, powinni oni razem omówić typowe zadania obliczeniowe pojawiające się na lekcjach chemii. Różne podejście do tych zadań często wynika z przyzwyczajeń nauczycieli chemii i wieloletniej tradycji nauczania tych zagadnień. Niestety, ta tradycja rozmija się czasem z metodyką nauczania matematyki. Dobrze ilustruje to następujący przykład:

Obicz rzeczywistą masę atomu (m) węgla, jeśli wiadomo, że masa atomowa (M) węgla wynosi 12 u

Rozwiązanie:
I sposób
Korzystamy z zależności: $m = M \cdot u$.
Dolny indeks przy literach m_C, M_C oznacza symbol pierwiastka.
$m_C = M_C \cdot 0,166 \cdot 10^{-23}$ g $= 12 \cdot 0,166 \cdot 10^{-23}$ g $= 2,00 \cdot 10^{-23}$ g

II sposób
1 u $= 0,166 \cdot 10^{-23}$ g
12 u $= x$ g
$$x = \frac{12\ \text{u} \cdot 0,166 \cdot 10^{-23}\ \text{g}}{1\ \text{u}} = 2,00 \cdot 10^{-23}\ \text{g}$$

Odpowiedź:
Masa atomu węgla wynosi $2,00 \cdot 10^{-23}$ g.

Chemia. Vademecum. Egzamin gimnazjalny, Operon 2009.

W prezentowanym rozwiązaniu nauczyciela matematyki uderza kilka kwestii:
1. Dosyć swobodne traktowanie notacji wykładniczej, podobnie jak to było w cytowanym wyżej zadaniu z biologii. Na lekcjach matematyki uczeń zapisuje liczbę $0,166 \cdot 10^{-23}$ g jako $1,66 \cdot 10^{-24}$ g.
2. Uderzająco schematyczne traktowanie proporcji w II sposobie rozwiązania. Skoro wiemy, ile to jest 1 u, to 12 u będzie dwanaście razy tyle. Układanie dziwacznych schematów, z których wynika ułamek z mianownikiem równym 1 jest wręcz szkodliwe z punktu widzenia nauczania matematyki.
3. Zapis (w obu sposobach rozwiązania) nie uwzględniający, że podana odpowiedź to tylko przybliżenie ($12 \cdot 0,166 \neq 2$).

Takich różnic w sposobie nauczania nie da się usunąć zapisami w podstawach programowych. To może być rozstrzygnięte w szkole tylko we współpracy nauczycieli tych przedmiotów. Być może uda się wypracować jednakowe podejście do tych samych zagadnień. Bardzo szkodliwa jest bowiem typowa obecnie sytuacja, gdy uczeń na lekcji matematyki dowiaduje się, jak ma rozwiązywać zadania np. o mieszaninach, a po przerwie idzie na lekcję chemii i tam nauczyciel nie pozwala rozwiązywać tych zadań tak, jak godzinę wcześniej na lekcji matematyki, tylko wymaga stosowania innych, preferowanych przez niego metod.

Poniżej porównano związane ze sobą zapisy obu podstaw (chemii i matematyki) (tab. 4) oraz sposoby rozwiązywania zadań z tej wspólnej tematyki.

Tabela 4. Związane ze sobą zapisy podstaw programowych przedmiotów *Chemia* i *Matematyka*

Chemia	Matematyka
Uczeń przeprowadza obliczenia z wykorzystaniem pojęć: masa, gęstość i objętość.	Uczeń stosuje obliczenia na liczbach wymiernych do rozwiązywania problemów w kontekście praktycznym, w tym do zamiany jednostek (także jednostek prędkości, gęstości itp.).

Oto przykład zadania, z którym uczniowie mogą się spotkać zarówno na lekcjach chemii, jak i matematyki.

Uczeń wsypał do naczynia z wodą 88 g substancji i otrzymał 250 ml roztworu o gęstości $1{,}1\ \frac{g}{cm^3}$
Oblicz stężenie procentowe otrzymanego roztworu.
Rozwiązanie:
$m_S = 88$ g
$V_r = 250$ ml $= 250\ cm^3$
$C_p = ?$
Ze wzoru na gęstość $m = d \cdot V = 1{,}1\ \frac{g}{cm^3} \cdot 250\ cm^3 = 275$ g

$$C_p = \frac{88g \cdot 100\%}{275g} = 32\%$$

Odpowiedź:
Stężenie procentowe otrzymanego roztworu wynosi 17,65%.

Chemia. Vademecum. Egzamin gimnazjalny, Operon 2009.

To było rozwiązanie, które uczeń pozna na lekcji chemii. Na matematyce będzie to wyglądać najprawdopodobniej tak:
250 ml roztworu to 250 cm^3
Skoro 1 cm^3 waży 1,1 g, to 250 cm^3 ważyć będzie $250 \cdot 1{,}1$ g $= 275$ g

Ponieważ w tym roztworze jest 88 g rozpuszczonej substancji, więc jego stężenie procentowe wynosi:

$$\frac{88}{275} = 0{,}32 = 32\%$$

Różnice w podejściu są uderzające i warto je omówić. W obu przypadkach temat realizowany jest w I klasie gimnazjum. Najprawdopodobniej na lekcjach matematyki uczniowie zapoznają się z nim wcześniej (to może zależeć od wybranych przez szkołę programów nauczania). Chemicy opierają swoje rozwiązanie na przekształcaniu wzorów i podstawianiu odpowiednich wartości. Wzorem opisane jest także stężenie procentowe. Matematycy będą się starali każdy krok postępowania opierać na pojęciu procentu i intuicyjnie rozumianej proporcjonalności. Przekształcania wzorów w tym miejscu nauczyciel matematyki nie powinien wprowadzać, nie tylko dlatego, że lepsze są prostsze rozwiązania, ale także z tego powodu, że algebra w gimnazjum pojawia się zwykle później niż procenty. Po szkole podstawowej uczeń nie potrafi jeszcze tak biegle przekształcać wzorów, jak by sobie tego życzyli chemicy.

Są w podstawie programowej chemii takie zagadnienia, które przy niewłaściwym podejściu mogą wymagać od ucznia umiejętności wykraczających poza podstawę matematyki dla gimnazjum (tab. 5).

Tabela 5. Wymagania zapisane w podstawie programowej chemii, które mogą wymagać od ucznia umiejętności wykraczających poza wymagania zapisane w podstawie programowej matematyki dla gimnazjum

Chemia	Matematyka
Uczeń definiuje pojęcie masy atomowej (średnia mas atomów danego pierwiastka z uwzględnieniem jego składu izotopowego).	W gimnazjum: • Uczeń wyznacza średnią arytmetyczną i medianę zestawu danych. W szkole pogimnazjalnej, zakres podstawowy: • Uczeń oblicza średnią ważoną i odchylenie standardowe zestawu danych (także w przypadku danych odpowiednio pogrupowanych), interpretuje te parametry dla danych empirycznych.

Przy ćwiczeniu tej umiejętności na lekcjach chemii wykorzystywana bywa średnia ważona, którą na matematyce omawia się dopiero w szkole ponadgimnazjalnej. Nauczyciel chemii powinien sobie z tego zdawać sprawę, bo inaczej uczniowie zobaczą rozwiązanie, którego nie będą w stanie zrozumieć. Przykładem jest poniższe zadanie:

Oblicz średnią masę atomową węgla, jeżeli jest on mieszaniną dwóch trwałych izotopów ^{12}C o zawartości 98,89% i ^{13}C.

Rozwiązanie:
$A_1 = 12$ u, $X_1 = 98{,}89\%$
$A_2 = 13$ u, $X_2 = 100\% - 98{,}89\% = 1{,}11\%$
Podstawiamy dane do wzoru:

$$M_{śr.} = \frac{12u \cdot 98{,}89\% + 13u \cdot 1{,}11\%}{100\%} = 12{,}011u$$

Odpowiedź:
Masa atomowa węgla wynosi 12,011 u.

Chemia. Vademecum. Egzamin gimnazjalny, Operon 2009.

Gimnazjaliści są w stanie zrozumieć potrzebne obliczenia, tylko nie mogą się one opierać wyłącznie na podstawianiu do magicznego i niezrozumiałego wzoru. To zadanie, dostępną dla gimnazjalisty metodą, można rozwiązać tak:
Przypuśćmy, że cała rozpatrywana mieszanina ma masę m. Jest w niej 98,89% węgla ^{12}C, którego każdy atom ma masę równą 12 jednostkom atomowym (12u). Zatem ten węgiel w mieszaninie ma masę $0{,}9889 \cdot m \cdot 12u$.

Reszta mieszaniny, 1.11%, to węgiel ^{13}C, którego każdy atom ma masę 13u. Ta część mieszaniny ma więc masę $0{,}0111 \cdot m \cdot 13u$. Średnia masa atomu węgla w tej mieszaninie to:

$$\frac{0{,}9889 \cdot m \cdot 12u + 0{,}0111 \cdot m \cdot 13u}{m} = 12{,}0111u$$

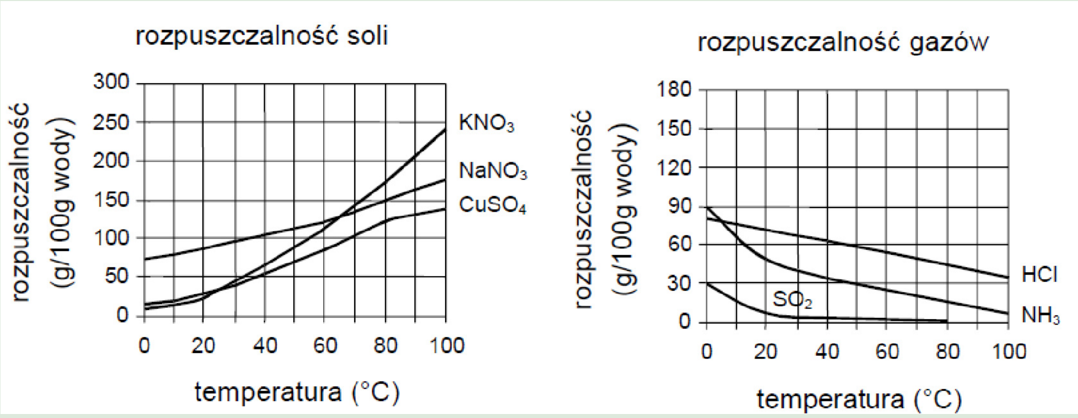
Kolejne porównywane zapisy podstaw programowych dotyczą wykresów funkcji (tab. 6).

Tabela 6. Porównanie zapisów dotyczących funkcji w podstawach programowych przedmiotów *Chemia* i *Matematyka*

Chemia	Matematyka
Uczeń: odczytuje rozpuszczalność substancji z wykresu jej rozpuszczalności; oblicza ilość substancji, którą można rozpuścić w określonej ilości wody w podanej temperaturze.	Uczeń: • odczytuje z wykresu funkcji wartość funkcji dla danego argumentu, argumenty dla danej wartości funkcji, dla jakich argumentów funkcja przyjmuje wartości dodatnie, dla jakich ujemne, a dla jakich zero, • odczytuje i interpretuje informacje przedstawione za pomocą wykresów funkcji (w tym wykresów opisujących zjawiska występujące w przyrodzie, gospodarce, życiu codziennym).

Na lekcjach chemii uczniowie analizują wykresy rozpuszczalności substancji już w klasie I. Na matematyce wykresy funkcji pojawiają się zwykle dużo później. O tym, jaki jest poziom trudności problemów, które uczniowie rozważają na chemii, można się przekonać na przykładzie poniższego zadania z egzaminu gimnazjalnego z 2007 r.

Na wykresach przedstawiono zależność rozpuszczalności wybranych substancji w wodzie od temperatury.



Ze wzrostem temperatury rozpuszczalność soli .... (rośnie/maleje) z gazów .... (rośnie/maleje). W 100 g wody o temperaturze 50 °C można rozpuścić co najwyżej .... g NH_3. Aby w 50 g wody można było rozpuścić 75 g $NaNO_3$, trzeba ogrzać wodę do temperatury co najmniej .... °C.

Egzamin gimnazjalny z 2007 r.

Najwięcej uzgodnień nauczycieli chemii i matematyki wymagać będą tematy związane z procentami. Zapisy obu podstaw przedstawiono w tabeli 7.

Tabela 7. Zapisy dotyczące procentów w podstawach programowych przedmiotów *Chemia* i *Matematyka*

Chemia	Matematyka
Uczeń: prowadzi obliczenia z wykorzystaniem pojęć: stężenie procentowe, masa substancji, masa rozpuszczalnika, masa roztworu, gęstość; oblicza stężenie procentowe roztworu nasyconego w danej temperaturze (z wykorzystaniem wykresu rozpuszczalności).	Uczeń: • przedstawia część pewnej wielkości jako procent lub promil tej wielkości i odwrotnie, • oblicza procent danej liczby; • oblicza liczbę na podstawie danego jej procentu, • stosuje obliczenia procentowe do rozwiązywania problemów w kontekście praktycznym, np. oblicza ceny po podwyżce lub obniżce o dany procent, wykonuje obliczenia związane z VAT, oblicza odsetki dla lokaty rocznej.

Podstawa chemii i tradycja nauczania tego przedmiotu przewiduje dość skomplikowane obliczenia procentowe, a jak już wspomniano, chemicy często podchodzą zupełnie inaczej do zagadnień podobnych do tych omawianych na lekcjach matematyki. Dla uczniów stanowi to poważny dyskomfort. Jeszcze raz podkreślmy, że w szkole potrzebne jest porozumienie między nauczycielami matematyki i chemii, by te same zagadnienia nie były traktowane w diametralnie różny sposób. Przyjrzyjmy się jeszcze kilku „chemicznym" zadaniom.

Przygotowano 450 g roztworu wodorotlenku sodu o stężeniu 12%.

Oblicz masę wodorotlenku zawartą w tym roztworze.

S. Hejwowska, R. Marcinkowski, *Chemia 1*.

Jest to jeden z najprostszych typów zdań procentowych, z którym uczniowie nieźle sobie radzą. Na lekcjach matematyki rozwiązują je tak:

$$12\% \text{ masy } 450\text{g to } 0{,}12 \cdot 450 \text{ g} = 54 \text{ g}$$

Na lekcjach matematyki cała trudność kryje się w zrozumieniu chemicznego kontekstu zadania, tzn. w uświadomieniu sobie, że stężenie procentowe roztworu to zawartość substancji w roztworze (podana w procentach). Natomiast na lekcjach chemii uczeń często poznaje rozwiązanie bardzo skomplikowane, którego trudność tkwi w złożonych przekształceniach matematycznych, na przykład takich, jak w tym rozwiązaniu:

przekształcamy wzór:

$$m_s = \frac{C_\% \cdot m_r}{100\%}$$

$$m_s = \frac{12\% \cdot 450\text{g}}{100\%} = 54\text{g NaOH}$$

Odpowiedź:
Powyższy roztwór zawiera 54 g NaOH.

Warto zwrócić uwagę, że przekształcany wzór to:

$$C_\% = \frac{m_s}{m_r} \cdot 100\%$$

czyli po prostu definicja stężenia procentowego. Nauczyciel matematyki pracuje nad tym, by uczeń potrafił się posługiwać tym pojęciem bez przekształcania wzorów. Warto, by nauczyciel chemii z tego korzystał.

Są też takie typy zadań, w których chemicy wypracowali sobie prosty algorytm z nieskomplikowanymi rachunkami, a pełne rozwiązanie matematyczne jest bardziej złożone, więc niedostępne dla większości uczniów. Oto przykład:

W sprzedaży detalicznej można kupić ocet o stężeniu 10-procentowym lub 6-procentowym. Oblicz, w jakim stosunku masowym należy zmieszać te dwa rodzaje octu, aby otrzymać roztwór o stężeniu 7-procentowym.

Chemia. Vademecum. Egzamin gimnazjalny, Operon 2009.

Takie zadania na lekcjach matematyki pojawiają się bardzo rzadko, bo gdy nieznaną wielkością jest stosunek mas, uczniom bardzo trudno jest zapisać związki między podanymi wielkościami. Chemicy stosują w tym wypadku następujący wygodny algorytm:

Rozwiązanie:

$C_{p1} = 10\%$
$C_{p2} = 6\%$
$C_{p3} = ?$

$$\begin{array}{ccccc} 10\% & & & \nearrow & 7-6=1 \\ & \searrow & 7\% & & \\ 6\% & \nearrow & & \searrow & 10-7=3 \end{array}$$

Odpowiedź:
Ocet 10-procentowy należy wymieszać z octem 6-procentowym w stosunku masowym 1 : 3 lub inaczej $\frac{1}{3}$.

Byłoby bardzo pożądane, aby nauczyciele chemii i matematyki uzgodnili, że nauczyciel matematyki w odpowiednim momencie pokaże uczniom, skąd wziął się taki algorytm. Mógłby to zrobić na przykład tak:

Gdy przez a oznaczymy masę potrzebnego octu sześcioprocentowego, przez b zaś – octu dziesięcioprocentowego, możemy ułożyć równanie:

$$0{,}06a + 0{,}1b = 0{,}07 \cdot (a + b)$$

Stąd:

$$0{,}06a + 0{,}1b = 0{,}07a + 0{,}07b$$

Po pomnożeniu obu stron równania przez 100, otrzymamy:

$$6a + 10b = 7a + 7b$$

Czyli:

$$10b - 7b = 7a - 6a$$

(tu już widać, skąd się wzięło to tajemnicze odejmowanie na schemacie w rozwiązaniu „chemicznym”). Z ostatniej równości otrzymamy:

$$3b = a, \text{ więc } a : b = 1 : 3$$

Geografia

Przy obliczeniach związanych ze skalą mapy istotną informacją dla nauczyciela geografii może być fakt, że o skali uczniowie na matematyce uczyli się już w szkole podstawowej (tab. 8). Mogli więc trochę zapomnieć.

Tabela 8. Zapis podstawy programowej geografii dla gimnazjum i zapis podstawy programowej matematyki dla szkoły podstawowej

Geografia	Matematyka (szkoła podstawowa)
Uczeń posługuje się skalą mapy do obliczenia odległości w terenie.	Uczeń oblicza rzeczywistą długość odcinka, gdy dana jest jego długość w skali, oraz długość w skali, gdy dana jest jego rzeczywista długość.

Oto przykład typowego zadania:

Julia, która mieszka w Darwin, postanowiła zwiedzić Sydney.
Korzystając z mapy, oblicz, jaką odległość w linii prostej pokona Julia.

Sprawdza umiejętność: uczeń, korzystając ze skali mapy, oblicza rzeczywistą odległość w terenie.
Rozwiąznie:
1. Odnajdź na mapie Darwin i Sydney.
2. Dokonaj dokładnego pomiaru odległości na mapie – 7,8 cm.
3. Odszukaj na mapie skalę liczbową, a następnie zamień ją na skalę mianowaną (wyrażoną w km).
   1 : 40 000 000
   1 cm – 40 000 000 cm
   1 cm – 400 000 m
   1 cm – 400 km
4. Ułóż równanie proporcji i oblicz rzeczywistą odległość:

1 cm – 400 km
7,8 cm – x

$$x = \frac{7{,}8 \text{ cm} \cdot 400 \text{ km}}{1 \text{ cm}} = 3120 \text{ km}$$

x = 3120 km

5. Podaj wynik, pamiętając o jednostce odległości: Julia, jadąc do Sydney, pokona odległość 3120 km.

Geografia. Vademecum. Egzamin gimnazjalny, Operon 2009.

Warto zwrócić uwagę na to, że w tym przykładzie rozwiązanie opiera się na podobnym sposobie stosowania proporcji jak w cytowanych wcześniej zadaniach chemicznych. Opisane tam wady tego podejścia widać także tutaj (tab. 9).

Tabela 9. Zapisy podstaw programowych przedmiotów *Geografia* i *Matematyka*

Geografia	Matematyka
Uczeń: ● określa położenie geograficzne oraz matematyczno-geograficzne punktów i obszarów na mapie, ● podaje główne cechy kształtu i wymiarów Ziemi; odczytuje współrzędne geograficzne na globusie, ● posługuje się ze zrozumieniem pojęciami: ruch obrotowy Ziemi, czas słoneczny, czas strefowy; (…) posługuje się mapą stref czasowych do określania różnicy czasu strefowego i słonecznego na Ziemi.	Uczeń: ● zaznacza w układzie współrzędnych na płaszczyźnie punkty o danych współrzędnych, ● odczytuje współrzędne danych punktów, ● rozpoznaje kąty środkowe, ● oblicza długość okręgu i łuku okręgu.

Poniższe zadanie także jest dość typowym przykładem obliczeń, z którymi uczniowie spotykają się na lekcjach geografii:

Różnica czasu słonecznego pomiędzy Meksykiem (19°N, 99°W) a Lagos (6°N, 3°E) jest równa
A. 1 godzinie 40 minutom.
B. 4 godzinom 8 minutom.
C. 6 godzinom 24 minutom.
D. 6 godzinom 48 minutom.

Egzamin gimnazjalny z 2009 r.

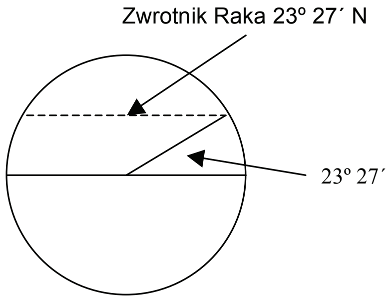
To przykład ważny dla nauczyciela matematyki, bo trudności, które może mieć uczeń z jego rozwiązaniem, wynikać mogą w równym stopniu z braku umiejętności matematycznych, jak i geograficznych. Takie zadania powinny pojawiać się także na lekcjach matematyki, bo pozwalają połączyć tematykę kilku działów (stereometria, zamiana jednostek, miary kątów).

Kolejne zadanie to przykład problemu, który uczniowie rozwiązują co prawda na lekcjach geografii, ale nauczyciel tego przedmiotu nie ma możliwości ani czasu, by dokładnie wyjaśnić uzasadnienie reguł, z których uczniowie korzystają. A jest to wcale niebanalne uzasadnienie matematyczne. Na pewno warto poświęcić na nie trochę czasu na lekcjach matematyki. W zadaniu λ i φ oznaczają odpowiednio długość i szerokość geograficzną.

Spośród podanych wzorów wybierz ten, za pomocą którego obliczysz wysokość Słońa w południe w dniu 21 III: a) $h = 90° - \lambda$ b) $h = 90° - \varphi$ c) $h = 90° - 23°27' - \varphi$ d) $h = 90° + 23°27' - \varphi$	**Półkula północna** **21 III i 23 IX** 90° – szerokość geograficzna miejsca = kąt padania promieni słonecznych **22 VI** 90° + 23°27’ – szerokość geograficzna miejsca = kąt padania promieni słonecznych **22 XII** 90° – 23°27’ – szerokość geograficzna miejsca = kąt padania promieni słonecznych

Geografia. Vademecum. Egzamin gimnazjalny, Operon 2009.

Dla wielu uczniów będzie odkryciem, że te wielkości można interpretować jako kąty środkowe na przekrojach kuli. Wyjaśnienie zapisanej wyżej reguły o kącie padania promieni słonecznych w południe 22 IV można odczytać z poniższych rysunków:



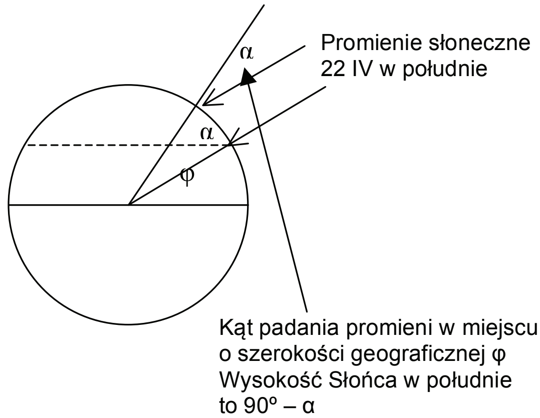
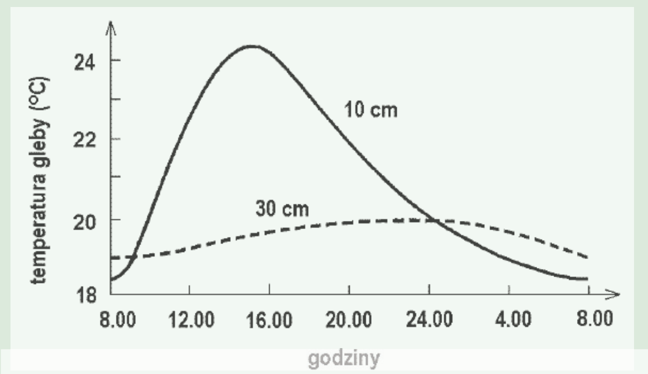


Tabela 10. Zapisy podstaw programowych przedmiotów *Geografia* i *Matematyka*

Geografia	Matematyka
Uczeń: ● charakteryzuje na podstawie wykresów lub danych liczbowych przebieg temperatury powietrza i opadów atmosferycznych w ciągu roku; (…) oblicza amplitudę i średnią temperaturę powietrza.	Uczeń: ● odczytuje z wykresu funkcji: wartość funkcji dla danego argumentu, argumenty dla danej wartości funkcji, dla jakich argumentów funkcja przyjmuje wartości dodatnie, dla jakich ujemne, a dla jakich zero, ● odczytuje i interpretuje informacje przedstawione za pomocą wykresów funkcji (w tym wykresów opisujących zjawiska występujące w przyrodzie, gospodarce, życiu codziennym).

Chociaż sformułowania podstaw programowych geografii i matematyki zawarte w tabeli 10 wyglądają podobnie, to niektóre własności, które uczeń ma charakteryzować na podstawie wykresów, wykraczają poza własności funkcji badane na lekcjach geografii. Tak jest na przykład w następującym zadaniu egzaminacyjnym:

Wykres ilustruje zmiany temperatury gleby w pewnej miejscowości na głębokości 10 cm i 30 cm w ciągu doby w okresie lata.



Z analizy wykresu wynika, że

A. w ciągu całej doby temperatura gleby jest niższa na głebokości 30 cm niż na głębokości 10 cm.
B. na obu głębokościach gleba ma najniższą temperaturę o północy.
C. gleba na głębokości 30 cm nagrzewa się wolniej i stygnie wolniej niż gleba na głębokkości 10 cm.
D. amplituda dobowa temperatur gleby na głębokości 10 cm jest mniejsza niż amplituda dobowa temperatur na głębokości 30 cm.

Egzamin gimnazjalny z 2006 r.

Uczeń ma rozstrzygnąć, czy gleba na głębokości 30 cm nagrzewa się wolniej i stygnie wolniej niż gleba na głębokości 10 cm. Z matematycznego punktu widzenia uczeń ma porównać tempo zmian wartości funkcji, a tym na matematyce zajmują się uczniowie w liceum (i to w zakresie rozszerzonym) po wprowadzeniu pochodnej. Oczywiście nie ma potrzeby używania pochodnej do prostej analizy takich zjawisk, jak tu omawiane. Warto tylko zauważyć, że interpretowanie wykresów na innych przedmiotach wyprzedza, w pewnym sensie, wprowadzane w gimnazjum narzędzia matematyczne.

Fizyka

Nie ma tu miejsca, aby szczegółowo omówić wszystkie potrzebne na lekcjach fizyki pojęcia i umiejętności matematyczne, gdyż jest ich niezwykle dużo. Wspólny niewątpliwie jest cel, by uczniowie posiedli umiejętność logicznego myślenia. Oto przykład zadania, z pozoru fizycznego, do którego rozwiązania wystarczy taka umiejętność – niepotrzebna jest wiedza o dżulach i jednostkach ciepła właściwego.

Ciepło właściwe substancji to ilość energii, którą należy dostarczyć, aby ogrzać 1 kg substancji o 1°C. W tabeli podano ciepła właściwe wybranych cieczy o temperaturze 20°C.

Ciecz	Ciepło właściwe $\left(\frac{J}{kg \cdot {}^\circ C}\right)$
Kwas octowy	2050
Olej lniany	1840
Olej parafinowy	2200
Woda	4180

Do czterech jednakowych naczyń wlano po 200 gramów: kwasu octowego, oleju lnianego, oleju parafinowego i wody (do każdego naczynia inną ciecz). Temperatura początkowa każdej cieczy wynosiła 20°C. Do wszystkich naczyń dostarczono taką samą ilość energii. Najbardziej wzrosła temperatura

A. kwasu octowego.
B. oleju lnianego.
C. oleju parafinowego.
D. wody.

Egzamin gimnazjalny z 2007 r.

Z informacji podanych w tabeli wynika, że najłatwiej jest ogrzać olej lniany (aby go ogrzać o jeden stopień, trzeba najmniej energii), zatem to temperatura oleju lnianego najbardziej wzrośnie.

Poniżej przedstawiono te zapisy podstawy programowej fizyki, które mają najwyraźniejsze odniesienia do zagadnień, z którymi uczeń spotka się na lekcjach matematyki.

Fizyka Uczeń:
- posługuje się pojęciem prędkości do opisu ruchu; przelicza jednostki prędkości,
- odczytuje prędkość i przebytą odległość z wykresów zależności drogi i prędkości od czasu oraz rysuje te wykresy na podstawie opisu słownego,
- stosuje do obliczeń związek między masą ciała, przyspieszeniem i siłą,
- wyjaśnia zasadę działania dźwigni dwustronnej, bloku nieruchomego, kołowrotu,
- stosuje do obliczeń związek między masą, gęstością i objętością ciał stałych i cieczy, na podstawie wyników pomiarów wyznacza gęstość cieczy i ciał stałych,
- (…) odczytuje amplitudę drgań i okres z wykresu x(t) dla drgającego ciała,

- (…) rysuje konstrukcyjnie obrazy wytworzone przez zwierciadła wklęsłe i przez soczewki.

Wymagania przekrojowe
Uczeń:
- szacuje rząd wielkości spodziewanego wyniku i ocenia na tej podstawie wartości obliczanych wielkości fizycznych,
- przelicza wielokrotności i podwielokrotności (przedrostki mikro-, mili-, centy-, hekto-, kilo-, mega-); przelicza jednostki czasu (sekunda, minuta, godzina, doba),
- odczytuje dane z tabeli i zapisuje dane w formie tabeli,
- rozpoznaje proporcjonalność prostą na podstawie danych liczbowych lub na podstawie wykresu oraz posługuje się proporcjonalnością prostą,
- sporządza wykres na podstawie danych z tabeli (oznaczenie wielkości i skali na osiach), a także odczytuje dane z wykresu,
- rozpoznaje zależność rosnącą i malejącą na podstawie danych z tabeli lub na podstawie wykresu oraz wskazuje wielkość maksymalną i minimalną.

Wymagania doświadczalne
Uczeń:
- wyznacza gęstość substancji, z jakiej wykonano przedmiot w kształcie prostopadłościanu, walca lub kuli za pomocą wagi i linijki,
- wyznacza masę ciała za pomocą dźwigni dwustronnej, innego ciała o znanej masie i linijki.

W przypadku niemal każdej z tych umiejętności można sobie wyobrazić zadanie, które świetnie się sprawdzi na lekcjach matematyki. Wskazane jest, by nauczyciel matematyki dobrze się orientował, jakie zadania jego uczniowie rozwiązują na lekcjach fizyki. Niektóre z nich może sam wykorzystać.

Głównym problemem korelacji nauczania fizyki i matematyki są terminy pojawiania się na lekcjach matematyki pojęć niezbędnych fizykom. Na przykład: niemal od początku I klasy niektóre programy nauczania i podręczniki wymagają sporej biegłości w przekształcaniu wzorów. Tymczasem dla gimnazjalisty jest to umiejętność nowa i na matematyce pojawia się najwcześniej w trzecim miesiącu nauczania w klasie I. Dużo wcześniej od matematyków będą też fizycy posługiwali się wykresami funkcji i proporcjonalnością (prostą i odwrotną). Dlatego przy omawianiu proporcjonalności odwrotnej nauczyciele matematyki mogą skorzystać z dobrze znanego uczniom modelu – z zasady dźwigni.

Podsumowanie

Z zaprezentowanego zestawienia treści matematycznych pojawiających się w podstawach programowych innych przedmiotów wynika, że na poziomie gimnazjum niezbędna jest współpraca nauczycieli matematyki, biologii, chemii, geografii i fizyki. Można uniknąć wielu błędów i zaoszczędzić wiele czasu, jeśli nauczyciele w szkole uzgodnią sposób i termin nauczania takich działów matematyki jak: procenty, algebra, wykresy funkcji. Czasami warto też wspólnie ustalić sposoby rozwiązywania niektórych typów zadań. W przeciwnym razie osiągnięty zostanie skutek odwrotny do intencji autorów podstawy. Zamiast przeświadczenia o wielu praktycznych zastosowaniach matematyki, uczeń odniesie wrażenie, że gdy trzeba matematykę stosować, robi się to zupełnie inaczej niż na lekcjach matematyki.