Zestaw 6

Zeszyt 2

Kinga Pietrasik-Kulińska
Dorota Szuba

Jak wykorzystać architekturę i przyrodę w edukacji matematycznej?

- Strategie w kształceniu matematycznym
- Funkcja pytań w uczeniu się matematyki
- Przykłady wykorzystania architektury i przyrody w zadaniach matematycznych

Analiza merytoryczna
Elżbieta Miterka

Recenzja
Jolanta Lazar

Redakcja językowa i korekta
Aleksandra Grzemska

Projekt graficzny, projekt okładki
Wojciech Romerowicz, ORE

Skład i redakcja techniczna
Grzegorz Dębiński

Projekt motywu graficznego „Szkoły ćwiczeń"
Aneta Witecka

ISBN 978-83-65967-00-8 (Zestawy materiałów dla nauczycieli szkół ćwiczeń – matematyka)
ISBN 978-83-65967-23-7 (Zestaw 6: Wykorzystanie potencjału otoczenia w edukacji matematycznej)
ISBN 978-83-65967-25-1 (Zeszyt 2: Jak wykorzystać architekturę i przyrodę w edukacji matematycznej?)

Warszawa 2017
Ośrodek Rozwoju Edukacji
Aleje Ujazdowskie 28
00-478 Warszawa
www.ore.edu.pl

Fundusze Europejskie
Wiedza Edukacja Rozwój

ORE Ośrodek Rozwoju Edukacji

Unia Europejska
Europejski Fundusz Społeczny

Spis treści

Wstęp

Matematyka jest dziedziną dostarczającą narzędzi do opisywania środowiska otaczającego człowieka oraz zjawisk, z którymi się spotykamy w życiu codziennym. Umiejętności kształcone przez matematykę ułatwiają radzenie sobie w konkretnych sytuacjach życiowych, rozwiązywanie napotkanych problemów oraz krytyczne i refleksyjne podchodzenie do informacji z zewnątrz. Uczy również łączenia drobnych elementów w logiczne ciągi.

Matematyka powinna być nauczana w taki sposób, by wzmacniać naturalną ciekawość poznawczą dziecka. Należy dopasowywać jej nauczanie w szkole do możliwości intelektualnych uczniów i stopnia ich dojrzałości.

W kształceniu wczesnoszkolnym przekazywanie wiedzy matematycznej powinno odbywać się w odniesieniu do zjawisk znanych uczniom z otaczającego ich świata. Wprowadzanie pojęć i symboli matematycznych należy robić stopniowo oraz na podstawie obiektów znanych uczniom.

Jedną z najważniejszych umiejętności rozwijanych w ramach kształcenia ogólnego w szkole podstawowej jest sprawne wykorzystywanie narzędzi matematyki w życiu codziennym, a także kształcenie myślenia matematycznego.

W zakresie edukacji matematycznej, w poznawczym obszarze rozwoju dziecka, na koniec edukacji zintegrowanej uczeń osiąga:

- potrzebę i umiejętność samodzielnego, refleksyjnego, logicznego, krytycznego i twórczego myślenia;
- umiejętność rozumienia podstawowych pojęć i działań matematycznych, samodzielnego korzystania z nich w różnych sytuacjach życiowych, wstępnej matematyzacji wraz z opisem tych czynności: słowami, obrazem, symbolem;
- umiejętność stawiania pytań, dostrzegania problemów, zbierania informacji potrzebnych do ich rozwiązania, planowania i organizacji działania, a także rozwiązywania problemów;
- umiejętność czytania prostych tekstów matematycznych, np. zadań tekstowych, łamigłówek i zagadek, symboli;
- umiejętność samodzielnej eksploracji świata, rozwiązywania problemów i stosowania nabytych umiejętności w nowych sytuacjach życiowych.

W drugim zeszycie, który oddajemy w ręce czytelników: metodyków, mentorów, nauczycieli oraz innych osób związanych z procesem nauczania matematyki na etapie kształcenia wczesnoszkolnego, omówimy wybrane metody dydaktyczne i ich praktyczne zastosowanie w obszarze wykorzystania potencjału otoczenia w edukacji matematycznej, a w szczególności architektury i przyrody.

Strategie w kształceniu matematycznym

We współczesnym kształceniu matematycznym dominują trzy główne strategie nauczania:

- nauczanie realistyczne,
- nauczanie czynnościowe,
- nauczanie problemowe.

Nauczanie realistyczne

Nauczanie realistyczne wprowadzone zostało w XX w. przez holenderskiego dydaktyka matematyki H. Freudenthala, a w Polsce propagowane jest m.in. przez Stefana Turnaua, Iwonę Turnau, Marka Pisarskiego, Mariannę Ciosek, Marię Legutko. Kładzie ono nacisk na budowanie pojęć i operacji matematycznych na podstawie sytuacji wziętych z życia, naturalnych dla ucznia, nadających kontekst uczeniu się. Mniejszą rolę przypisuje formalizmowi matematycznemu, który szczególnie na etapie wczesnoszkolnym jest dla uczniów obcy i często utrudniający zrozumienie problemu.

Realistyczne nauczanie matematyki jest nauczaniem matematyki równolegle z jej stosowaniem w sytuacjach realnych (Turnau, 1993: 5). Według S. Turnaua na nauczanie warto patrzeć z szerszej perspektywy – celów ogólnej edukacji uczniów. Szkoła ma za zadanie przygotowywać każdego do życia, w którym jednostka osiąga sukces, zarówno w perspektywie indywidualnej, jak i społecznej. Powinna kształcić w sposób zapewniający możliwość rozwinięcia i wykorzystania wszelkich uzdolnień uczniów oraz umożliwiać bierne i czynne uczestnictwo w życiu kulturalnym i naukowym.

W strategii nauczania realistycznego istotne są samodzielne działania uczniów, wyrobienie u nich umiejętności zauważania powiązań matematycznych i zastosowań matematyki w różnych życiowych sytuacjach. W nauczaniu realistycznym wcześniejsze doświadczenia ucznia są fundamentem nowo zdobywanej wiedzy. Dzieci rozwijają swoją intuicję matematyczną oraz trenują zdolność syntezy i analizy. Ważne jest, by uczeń miał prawo do popełniania błędów i możliwość uczenia się na nich. Rzeczywisty świat otaczający dziecko pozwala mu na stwarzanie konstrukcji wyobrażeniowych, abstrahowanie i formalizowanie pojęć, przechodzenie przy pomocy modeli matematycznych do matematycznych pojęć symbolicznych i operacji na nich.

Zadania stawiane uczniowi powinny angażować go emocjonalnie, stawiać przed koniecznością dokonania wyboru i rozstrzygnięcia problemu. Dużą rolę pełni tu możliwość samodzielnego zweryfikowania wybranego przez ucznia rozwiązania. Zastosowanie osiągniętych wyników w innych, nowych sytuacjach dają uczniom możliwość ich krytycznej ewaluacji. Umiejętność analizy zebranych informacji, wyciąganie wniosków i ich weryfikacja pozwala uczniom na twórcze rozwiązywanie problemów nie tylko w matematyce, ale każdej dowolnej dziedzinie życia.

W nauczaniu realistycznym dużą rolę odgrywają społeczne interakcje – dyskusje, współpraca z rówieśnikami, nauczycielem lub innymi osobami.

Nauczyciel pełni rolę przewodnika, ma stanowić oparcie dla uczniów, ale z drugiej strony nie powinien wyręczać ich w pracy własnej. Ma za zadanie dostosowywać zadania do kompetencji uczniów, jednak nie mogą być one zbyt łatwe ani zbyt trudne, by nie zniechęcały do działania.

Współpraca uczniów może przybierać formy partnerskie, gdy uczniowie prezentują podobny poziom rozwoju umiejętności lub tzw. tutoringu, kiedy któryś z nich pełni rolę eksperta, a inni – uczących się od niego.

Założenia nauczania realistycznego zakładają, że zadanie powinno mieć charakter otwarty, być interesujące i dostosowane do możliwości ucznia. Proces matematycznego poznania należy rozpocząć od dostrzeżenia sytuacji problemowej zawartej w zadaniu, sformułowania pytań oraz postawienia hipotez. Uczniowie powinni prześledzić możliwe rozwiązania i wyciągnąć odpowiednie wnioski.

Zadania otwarte dają znakomite możliwości do zastosowania różnorodnych nowoczesnych metod aktywizujących, które oprócz kompetencji przedmiotowych pozwalają wypracować uczniom kompetencje społeczne.

Porównując podręczniki sprzed dwudziestu, trzydziestu lat ze współczesnymi, można dostrzec, jak zmieniło się podejście do formułowania treści zadań tekstowych i przykładów ich rozwiązywania. Obecnie w podręcznikach szkolnych występuje wiele zadań odnoszących się do konkretnych tematyk związanych z rzeczywistymi sytuacjami – zawierającymi rzeczywiste dane, grafiki. Dzięki temu uczeń tłumaczy na język matematyczny to, co widzi na co dzień i oswaja się z szerokim zastosowaniem matematyki w życiu. Pojęcia używane w mowie potocznej przypisywane są do konkretnych matematycznych definicji i operacji.

W treści takich zadań znajdują się informacje, których dostarczają:

- rozkłady jazdy,
- przepisy kulinarne,
- rozliczenia za zużycie energii i wody,
- tabele z wartościami kalorycznymi dla różnorodnych produktów,
- rozliczenia bankowe,
- informacje kredytowe,
- materiały reklamowe – obniżki, promocje itp.

Przy stosowaniu strategii realistycznych zestaw pomocy dydaktycznych rozszerza się o materiały, które uczeń napotyka w realnych sytuacjach.

Do nich należą np.:

- rozkłady jazdy autobusów i pociągów,
- rachunki za zakupy,
- rachunki za opłaty związane z prowadzeniem gospodarstw domowych,
- gazetki promocyjne z różnego rodzaju sklepów,
- repertuary kin i teatrów,
- restauracyjne menu,
- kursy wymiany walut,
- prognozy pogody,
- mapy topograficzne,
- statystyki i diagramy.

Uczeń, który ma do czynienia z wyżej wymienionymi materiałami na lekcjach matematyki rozwija i doskonali umiejętności matematyczne potrzebne mu w młodzieńczym i dorosłym życiu oraz umożliwiające mu krytyczne podejście do napotykanych problemów, takich jak:

- porównywanie miar wag i długości;
- prawidłowe odczytywanie informacji związanych z czasem;
- porównywanie cen towarów, prawidłowego rozumienia informacji o promocjach i przecenach;
- planowanie tras i kosztów podróży
- rozumienie ofert bankowych;
- przeliczanie walut;
- prawidłowe odczytywanie rachunków za zakupy i opłaty.

Podsumowując, realistyczne nauczanie matematyki:

- opiera się na sytuacjach naturalnych, które uczeń spotyka w życiu codziennym;
- stawia na samodzielność uczenia się – nauczyciel pomaga, ale nie narzuca i nie wskazuje sposobu rozwiązania problemu;
- daje możliwość różnicowania poziomu pracy uczniów;
- nie wymaga stosowania wyuczonych algorytmów;
- kształtuje umiejętność współpracy z innymi;
- umożliwia refleksję i samokontrolę otrzymywanych wyników;
- uczy myślenia matematycznego umożliwiającego zastosowanie znalezionych rozwiązań na inne zagadnienia.

Nauczanie czynnościowe

Metoda nauczania czynnościowego w matematyce wprowadzona została przez Z. Krygowską i rozwijana jest m.in. przez H. Siwek. Uwzględnia zarówno matematyczne podstawy metodologiczne, jak i psychologiczne procesy kształtowania pojęciowego u dzieci, tzw. procesy interioryzacji. Zakładają one, że proces ten przebiega od czynności konkretnych i wyobrażeniowych do operacji abstrakcyjnych. W procesie tym wcześniejsze doświadczenia życiowe dziecka odgrywają ważną rolę. Jako główny cel metoda stawia zdobycie przez ucznia wiedzy operatywnej. Nacisk kładziony jest na uporządkowanie, precyzję, klarowność i prawidłowe zrozumienie pojęć matematycznych przez ucznia. Liczy się nie tylko wiedza, lecz także umiejętność jej zastosowania.

Interioryzacja to proces na płaszczyźnie psychologicznej, z którym mamy do czynienia na każdym etapie nauczania matematyki. Szczególną funkcję odgrywa w momencie, gdy wprowadzane są nowe pojęcia i następuje przejście od obrazu realnego przedmiotu (tego, co widzimy) przez jego odwzorowania w zeszycie ucznia aż do stworzenia symbolicznego obiektu matematycznego, przedstawiającego umownie jego cechy, istniejącego w umyśle dziecka. Celem nauczania w matematyce jest przechodzenie od poziomu realnego do symbolicznego. Wszystkie trzy etapy są tu niezwykle istotne.

Z **asymilacją** mamy do czynienia wówczas, gdy wytworzone wcześniej schematy dają się zastosować do poszerzenia umiejętności. Przykładem asymilacji jest rozwiązywanie przez ucznia typowego zadania dzięki poznanej przez niego wcześniej metody.

Akomodacja występuje wówczas, gdy napotkany problem pokazuje, że znane schematy nie wystarczają do jego rozwiązania. Następuje proces twórczy – uczeń poszukuje i odkrywa nowy schemat postępowania. Efektem tego procesu jest poszerzenie jego wiedzy i umiejętności.

Metoda czynnościowa nadaje się znakomicie do stosowania w edukacji przedszkolnej i wczesnoszkolnej, jak również na dowolnym etapie edukacyjnym, pozwalając na wykorzystanie realnych sytuacji do formułowania pojęć abstrakcyjnych. Staje się szczególnie efektywna w połączeniu z nauczaniem realistycznym. Podobnie jak w nauczaniu realistycznym punkt ciężkości w nauczaniu czynnościowym spoczywa na uczniu, rolą nauczyciela jest zaś doradzanie i przeprowadzanie przez trudności, których dziecko mimo swoich wysiłków nie jest w stanie samodzielnie pokonać.

Różnica między obiema metodami polega (wg H. Siwek, 1998: 12) na tym, że metoda czynnościowa kładzie nacisk na czynności potrzebne do skonstruowania pojęcia matematycznego, a następnie przypisanie go do sytuacji rzeczywistej, natomiast w metodzie realistycznej proces ten przebiega odwrotnie.

Nauczanie czynnościowe wpisuje się bardzo dobrze we współczesne koncepcje kształcenia wielostronnego, które obejmuje aktywności intelektualne, emocjonalne i praktyczne (Krygowska, 1977: 127).

W metodzie czynnościowej, na etapie nauczania wczesnoszkolnego, w fazie wstępnej zadania przybierają formę zabawy, następnie są stopniowo interioryzowane; realne przedmioty, którymi posługuje się uczeń, zostają zastąpione słowami, symbolami lub odpowiednimi schematami. Nauczanie jest rozumiane jako organizowanie czynności, które wykonywane są za pomocą rzeczywistych środków i przedmiotów dydaktycznych.

Według Z. Krygowskiej (1977: 127) czynnościowe nauczanie matematyki opiera się na dwóch głównych zasadach:

1. Wydobyciu przez analizę teoretyczną z materiału nauczania podstawowych operacji w każdej definicji, twierdzeniu, dowodzie;

2. Świadomym organizowaniu sytuacji problemowych sprzyjających procesowi interioryzacji i kształtowaniu myślenia matematycznego ucznia jako specyficznego działania, jako swobodnego i świadomego posługiwania się przyswajanymi stopniowo operacjami oraz na konsekwentnym stosowaniu zabiegów dydaktycznych, mających na celu zapewnienie prawidłowości i efektywności tego procesu.

Zasady te realizowane są przez:

a) wiązanie treści matematycznych z wyraźnie formułowanymi schematami postępowania;
b) wiązanie operacji z operacjami do nich odwrotnymi;
c) wiązanie operacji z różnych dziedzin matematyki w bardziej złożone schematy;
d) uwzględnienie różnych ciągów operacji doprowadzających do tego samego rezultatu;
e) stwarzanie wobec uczniów sytuacji konfliktowych i przeciwstawnych, w których opanowane schematy postępowania są zawodne lub nieskuteczne i w których uczniowie muszą dokonać transformacji (adaptacji) poznanego schematu lub wypracować schemat nowy;
f) wymaganie od dzieci słownego opisywania operacji wykonywanych lub przewidywanych do samodzielnego wykonania;
g) celowe integrowanie konkretnych czynności uczniów z operacjami myślowymi, przy czym czynności te mogą być traktowane jako:

    - źródło procesu interioryzacji, w którym jako jej rezultat powstaje odpowiednio wywołana operacja myślowa;
    - operacje wykonywane równolegle z operacjami myślowymi − konkretna weryfikacja ustalonego teoretycznie ciągu operacji myślowych;

h) systematyczne i konsekwentne stwarzanie sytuacji wymagających od ucznia swobodnego oraz aktywnego posługiwania się poznanymi operacjami;
i) zwracanie uwagi na to, aby stosowana symbolika miała również charakter aktywny, wizualnie sugerowała określoną operację;
j) przyzwyczajanie uczniów do planowania swoich czynności w rozwiązywaniu sytuacji zadaniowych.

Postulaty te H. Siwek (1998: 94–95) przekłada na listę ćwiczeń w metodzie czynnościowej, które realizują postulaty Z. Krygowskiej:

1. ćwiczenia wprost,
2. zadania odwrotne do poprzednich,
3. zadania tej samej czynności myślowej na różnych materiałach, w różnych położeniach, z zastosowaniem różnych zmiennych, w różnych sytuacjach,
4. ćwiczenia prowadzące do różnych ciągów czynności o tym samym rezultacie,
5. ćwiczenia w słownym opisie czynności danego rodzaju,
6. ćwiczenia prowokujące konflikt myślowy,
7. zadania o różnych formach przedstawiania, ilustrowania lub zapisu.

Wymienione ćwiczenia mogą, ale nie muszą w całości pojawiać się w zaplanowanym przez nauczyciela ciągu czynności, natomiast zalecane jest, by ostatnie trzy, reprezentujące ogólny charakter metody, były wykorzystywane zawsze.

Ćwiczenia te powinny pojawiać się na trzech etapach:

1. Zadań kształtujących czynności konkretne.
2. Zadań kształtujących czynności wyobrażeniowe.
3. Zadań kształtujących czynności abstrakcyjne.

Zadania powinny być organizowane przez nauczyciela tak, by pojawiało się kształtowanie czynności w wymienionym wyżej porządku na wszystkich trzech etapach w czasie dopasowanym do indywidualnych potrzeb ucznia.

Tab. 1. Typy ćwiczeń a rodzaj czynności podejmowanych przez ucznia

Typ ćwiczeń	Rodzaj czynności		
	konkretne	wyobrażone	abstrakcyjne
1. Wprost 2. Odwrotne 3. Na różnych materiałach 4. Z różnymi ciągami operacji 5. Słowny opis czynności 6. Konfliktowe 7. Z różnymi formami zapisu			

Źródło: Siwek, 1998: 96.

Nauczanie problemowe

Nauczanie problemowe (popularyzowana przez J. Deweya, W. Okonia) polega na kierowaniu pracą uczniów, którzy zdobywają nowe wiadomości i umiejętności, rozwiązując problemy teoretyczne i praktyczne (Bereźnicki 2011: 273). Zaletami tej strategii jest większy udział procesu uczenia się nad procesem nauczania, aktywizacja ucznia, kształcenie jego samodzielności w myśleniu, doskonalenie umiejętności poznawczych i praktycznych. Nauczanie w trybie rozwiązywania problemów czyni nauczanie bardziej autentycznym, przybliża uczniom realia życiowe, zwiększa udział ucznia w procesie jego kształcenia, co przekłada się na wzrost motywacji do zgłębiania wiedzy przez niego.

Zadaniem nauczyciela jest przedstawianie problemów, powstrzymanie się przed przekazywaniem uczniom gotowych i schematycznych rozwiązań na rzecz pozostawienia im sporej dowolności w wyborze rozwiązania.

Uczniowie mogą zajmować się postawionym przez nauczyciela problemem indywidualnie, ale najlepsze wyniki z reguły daje praca zespołowa, umożliwiająca ogląd zagadnienia z różnych perspektyw i przedyskutowanie ewentualnych scenariuszy pomagające w jego rozwiązaniu. Praca w grupach przygotowuje uczniów do przyszłego życia zawodowego, gdzie współpraca z innymi stanowi ważny element.

W nauczaniu problemowym wyróżnia się cztery etapy pracy nauczyciela (Bereźnicki, 2011: 274):

- wytworzenie sytuacji problemowej,
- pomoc przy formułowaniu problemów przez uczniów i szukaniu przez nich możliwych rozwiązań,
- stworzenie warunków do rozwiązywania problemów,
- kierowanie procesem poszukiwania sposobów weryfikacji pomysłów na rozwiązanie problemów,
- uporządkowanie otrzymanych wyników i zastosowanie ich w nowych zadaniach.

Przy stawianiu uczniom problemu ważny jest jasno określony cel, który uczniowie mają osiągnąć, a także występowanie ograniczeń i przeszkód w dochodzeniu do celu. Sytuacja problemowa powinna mieć niedookreśloną strukturę oraz zmieniać swój charakter wraz z uzyskiwaniem nowych informacji.

Złożone i dobrze postawione uczniom zadania umożliwiają w strategii nauczania problemowego realizowanie zasad dydaktycznych:

- odwoływanie się i wykorzystywanie doświadczeń życiowych, potrzeb i zainteresowań poznawczych uczniów (zasada świadomej aktywności uczniów),
- łączenie praktyki z teorią, myślenia konkretnego z abstrakcyjnym – uczniowie sami eksperymentują, gromadzą przedmioty, prowadzą obserwacje, a następnie przechodzą do uogólnień i abstrakcji (zasada poglądowości),

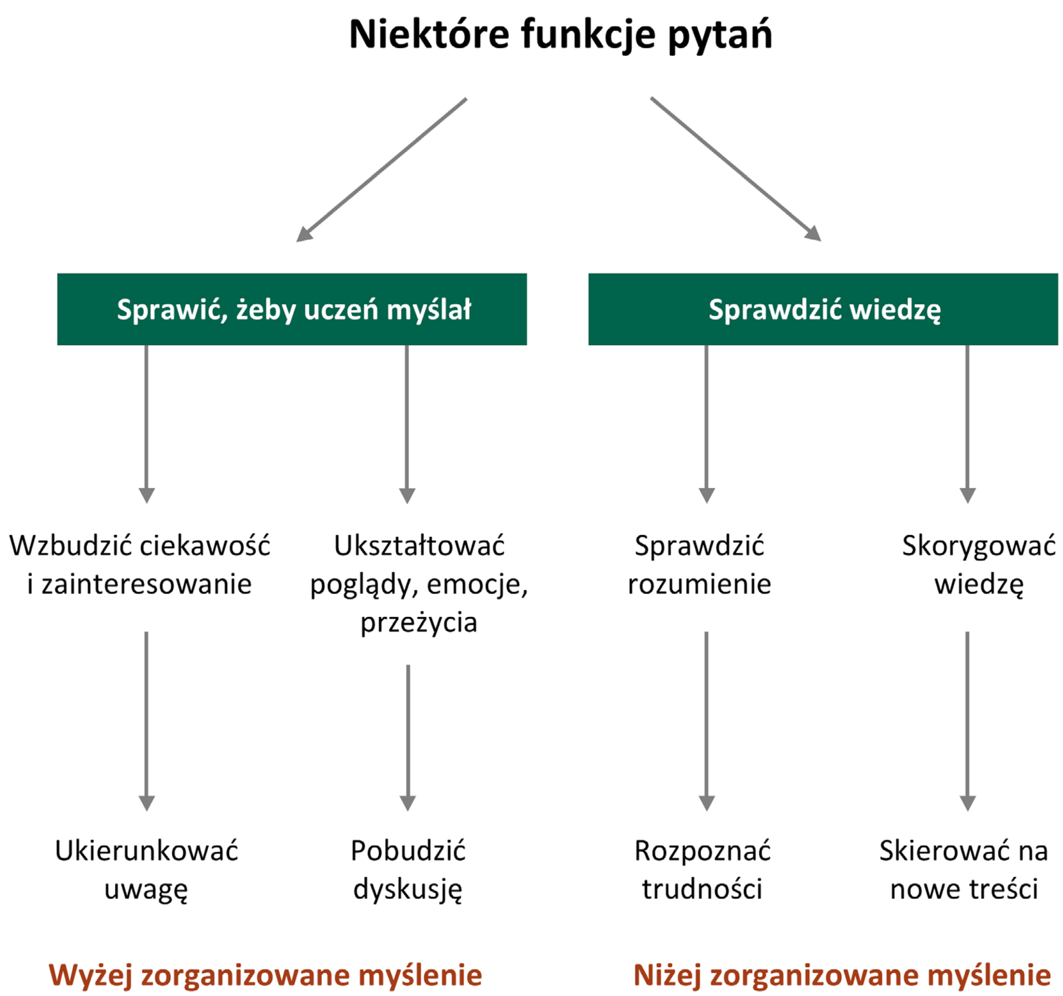
- przechodzenie od zadań prostych do bardziej złożonych, od tego, co uczniom jest znane i bliskie, do tego, co jest trudniejsze (zasada stopniowania trudności lub zasada przystępności),
- porządkowanie przyswajanej wiedzy i uogólnianie oraz wdrażanie uczniów do samodzielnej pracy i systematycznego wysiłku (zasada systematyczności),
- uwzględnienie indywidualnych możliwości każdego ucznia oraz współpraca i współdziałanie wszystkich uczniów (zasada indywidualizacji i zespołowości),
- utrwalanie wiedzy przez tworzenie nowych układów treściowych ze znanych już elementów (zasada trwałości wiedzy).

Funkcja pytań w uczeniu się matematyki

Formułowanie pytań

Małe dzieci mają tendencję do nieustannego zadawania pytań. Z upływem czasu czynią to coraz rzadziej, a zdarza się, że edukacja szkolna kompletnie wygasza u nich tę umiejętność. Tymczasem formułowanie pytań w procesie uczenia się odgrywa zasadniczą funkcję. Uczeń, który przestaje zadawać pytania, przechodzi z aktywnej fazy uczenia się w pasywną, staje się biernym, często bezkrytycznie przyjmującym odbiorcą.

Podobnie ważną funkcję w procesie nauczania odgrywa umiejętność stawiania pytań przez nauczyciela. Interesujące pytanie, często intrygujące, wzbudza ciekawość i aktywność ucznia. Ciekawie przedstawione zagadnienie bywa zachętą do uczenia się, powoduje często lawinę kolejnych pytań



Rys. 1. Niektóre funkcje pytań wg Fischera (1999: 29)

Pytania (wg Fischera) mają pełnić dwojaką funkcję:

- z jednej strony mają za zadanie sprawić, by uczeń myślał samodzielnie,
- z drugiej mają sprawdzać stan jego wiedzy.

Pierwszą kategorię określa jako wyżej zorganizowane myślenie, drugą zaś jako niżej zorganizowane myślenie.

Do pierwszej grupy należą pytania aktywizujące ucznia, które powinny wzbudzać jego dziecięcą ciekawość i zainteresowanie odkrywaniem otaczającego świata, jak również skierować uwagę w stronę rozważanego problemu. Pytania pozwalają na formułowanie własnych przemyśleń i wyrażanie emocji. Ich zadawanie powoduje nawiązywanie dyskusji, w wyniku której mogą się pojawić odpowiedzi ułatwiające rozwiązanie postawionego w pytaniu problemu.

Druga grupa pytań związana jest z osobą nauczyciela i funkcją, jaką pełni on w kształceniu ucznia. Dają one nauczycielowi możliwość sprawdzenia poziomu rozumienia zagadnień przez ucznia i rozpoznanie ewentualnych trudności, które mu w tym przeszkadzają. Dzięki nim można korygować ewentualne błędy popełniane przez ucznia i umiejętnie naprowadzić go na poszukiwanie nowych rozwiązań.

Ze względu na proces kształcenia ucznia optymalne jest stosowanie pytań należących do obu kategorii, w sposób wzajemnie się uzupełniający, zależny od potrzeb ucznia.

Nauczyciel powinien w życzliwy i przyjazny sposób zachęcać nieustannie uczniów do stawiania pytań. W idealnym przypadku powinien również znać wszystkie odpowiedzi. W realnym życiu jednak tak nie jest, a nauczyciel powinien również nauczyć swoich podopiecznych, że ma prawo do niewiedzy, czego nie należy utożsamiać z niekompetencją. Ważne jest, by w takich przypadkach nie ucinał dyskusji, lecz dawał sobie czas na znalezienie odpowiedzi. Odpowiedzi na pytanie można udzielić na następnej lekcji lub w innym, obiecanym uczniom terminie. Ważna jest tu konsekwencja, w przeciwnym wypadku uczniowie nauczą się, że ich pytania są lekceważone. W taki sposób buduje się więź i zaufanie pomiędzy nauczycielem i uczniem.

Uczniowie również potrzebują czasu na znalezienie odpowiedzi. Należy o tym pamiętać podczas zadawania pytania. Warto odczekać kilkanaście sekund, a nawet więcej. Uczeń najpierw musi dobrze usłyszeć pytanie, potem je zrozumieć, a następnie znaleźć na nie odpowiedź. Często zdarza się, że na zadane przez nauczyciela pytanie uczeń odpowiada bardzo szybko: „Nie wiem”. W takim wypadku warto zastosować pytania dodatkowe, ułatwiające zrozumienie problemu, i wydłużyć oczekiwanie na jego odpowiedź. Istotne jest to szczególnie, gdy uczniowie są słabsi lub nieśmiali, ponieważ nie znają odpowiedzi na zadane pytanie albo obawiają się, że ich odpowiedzi nie spełnią oczekiwań nauczyciela.

Wydłużenie czasu oczekiwania na odpowiedzi uczniów daje nauczycielowi możliwość obserwacji, jak uczniowie podchodzą do rozwiązywania problemu, w jaki sposób pracują, gdzie tkwią ewentualne przeszkody.

Uczeń formułuje często pytania, które z punktu widzenia odpowiadającego (nauczyciela lub innej osoby starszej) są nieprecyzyjne lub nielogiczne. Pytania takie odzwierciedlają jednak trudności w rozumieniu pewnych pojęć, jakie na danym etapie rozwoju intelektualnego mu towarzyszą. Niejednokrotnie podczas formułowania pytania uczniowie sami się poprawiają, ponieważ częściowo samodzielnie rozumieją problemy. To pokazuje, jak ważne w procesie uczenia się jest zadawanie pytań.

O ile jednak uczeń ma prawo do zadawania nie do końca prawidłowo sformułowanych pytań, o tyle pytania kierowane do niego przez nauczyciela powinny być ścisłe, zwięzłe, celowe i zawierające pojęcia i słowa dla ucznia zrozumiałe.

Błędne odpowiedzi uczniów

Błędne odpowiedzi uczniów są naturalną częścią procesu uczenia się. Traktowane w ten sposób przez nauczyciela mogą być okazją do nauczenia się czegoś nowego, postawienia kolejnych pytań, które ukażą dane zagadnienie od innej strony i pozwolą znaleźć prawidłowe rozwiązanie. Nauczyciel musi zdecydować, czy dane zagadnienie jest warte takiej analizy, czy będzie dla uczniów lepiej, jeśli w sposób niewartościujący ich odpowiedzi wskaże błędy.

Liczy się również cierpliwość nauczyciela, nie powinien od razu w pełni naprowadzać ucznia na właściwe rozwiązanie, aby nie narzucać mu schematów i umożliwiać twórcze działanie.

Nieprawidłowa odpowiedź na zadane pytanie może również wskazywać, że było ono niejasno sformułowane lub zawiera pewne logiczne alternatywy prowadzące do takiej, a nie innej odpowiedzi ucznia. Warto wtedy przeformułować pytanie i zadać je ponownie. Szczególnie istotne jest to w matematyce, gdzie jedno, z pozoru niewinne słowo zasadniczo może zmienić treść pytania.

Istotnym aspektem jest umiejętne odnoszenie się do błędnych odpowiedzi ucznia. Nauczyciel powinien zachować do nich neutralny stosunek i nie wartościować ich wobec odpowiedzi innych uczniów. Uczeń przyswaja sobie ten model postępowania i przenosi to na swoje zachowanie w dyskusjach z innymi. Nabywa przez to kompetencje, które mają wartość ponadprzedmiotową i staną się również przydatne w dorosłym życiu.

Jak zadawać pytania uczniom?

Nie tylko uczeń, ale bardzo często również nauczyciel ma problem z tym, jak sformułować pytanie dotyczące problemu poruszanego z uczniami. Pytanie, na które istnieje jedyna słuszna odpowiedź, nie zmotywuje uczniów do myślenia i dyskusji tak, jak pytanie otwarte, problemowe i ciekawe.

R. Fisher dzieli pytania stymulujące myślenie u uczniów na kilka kategorii:

- **Pytania skupiające uwagę** _ wymagające odpowiedzi opisowej, podającej szczegóły, np. Co zauważyłeś? Co to jest?

- **Pytania wymagające porównań** _ wymagające przeprowadzenia obserwacji, sklasyfikowania i uporządkowania, znalezienia różnic i podobieństw, np. Ile? Który? Jak długo? Jak często?,

- **Pytania uściślające** _ wymagające doprecyzowania i sformułowania własnych przemyśleń, wciągające do dyskusji, np. Dlaczego tak sądzisz? Czy możesz podać jakiś przykład?,

- **Pytania zachęcające do badania** _ są podstawą do szukania informacji, przeprowadzania badania lub eksperymentu, np. Co należy zrobić? Co się stanie, gdy? Skąd to wiemy?,

- **Pytania o wyjaśnienie** – nakłaniają do przedstawienia swojego toku myślenia, wybranej strategii, stanowią punkt wyjścia do dyskusji, np. Skąd to wiemy? Jakimi argumentami możesz to poprzeć?,

- **Pytania o interpretację** – prowokują do przedstawienia swojego rozumienia zjawisk, pojęć czy zdarzeń, np. Jak to oceniasz? Co o tym sądzisz?

Współczesne metody nauczania podkreślają, że osiągnięcie celu dydaktycznego jest ważne, ale równie ważna, jeśli nie ważniejsza, jest prowadząca do niego droga . Szkoła jest epizodem w znacznie dłuższym etapie, jakim jest dorosłe życie. Od niej zależy, czy uczeń stanie się dociekliwym dorosłym, umiejącym wyrazić to, co myśli, niebojącym się wyrażania swoich opinii, szanującym poglądy innych. Dlatego umiejętność zadawania pytań jest jedną z umiejętności kluczowych.

Przykłady wykorzystania architektury i przyrody w zadaniach matematycznych

Zamieszczone tu zadania pokazują zastosowanie architektury i przyrody w zadaniach matematycznych z uwzględnieniem omówionych wcześniej metod i problemów dydaktyczno-metodycznych. Mogą zostać one wykorzystane podczas zwykłych lekcji przedmiotowych, międzyprzedmiotowych projektów edukacyjnych lub w ramach kół przedmiotowych, które rozwijają kompetencje matematyczne uczniów.

Większość z zadań jest wielopoziomowa – w zależności od scenariusza lekcji można wykorzystać część zadania, rozłożyć go na kilka lekcji lub potraktować jako większą całość, np. w formie projektu.

Planowanie wycieczki

Zadanie problemowe, które daje bardzo duże pole do różnicowania poziomu podzagadnień.

Uczniowie mają zaplanować ramy czasowe i przestrzenne krótkiej wycieczki w pobliże szkoły, może być to zwykłe wyjście do parku, muzeum, kina. Aby nadać zadaniu wymiar konkretnego problemu do rozwiązania, należy wziąć pod uwagę, jaka wycieczka planowana jest w najbliższym czasie, i pod jej kątem przygotować zadanie. Z punktu widzenia przedmiotowego cel dydaktyczny wycieczki jest tu podrzędny, ważna jest znajomość punktu wyjścia, określanego dalej jako punkt A, i punktu docelowego, określanego dalej jako punkt B. W przypadku dzieci młodszych warto operować konkretnymi słowami, czyli punkt A to szkoła, punkt B to park, muzeum, kino...

Można przedstawić uczniom zadanie jako problem do rozwiązania, stawiając pytanie kluczowe, np.

- (bardzo ogólne) W jaki sposób możemy dostać się z punktu A do punktu B?,
- (szczegółowe, narzucające pewne ograniczenia) W jaki sposób możemy dostać się z punktu A do punktu B:
    - » najbezpieczniej,
    - » najszybciej,
    - » wyłącznie pieszo,
    - » środkami komunikacji publicznej,
    - » najładniejszą trasą?

Możliwe pomoce dydaktyczne

- mapa miejscowości,
- rozkłady jazdy autobusów/tramwajów/pociągów,
- zdjęcia interesujących obiektów znajdujących się między punktami A i B.

Formy pracy

- indywidualna (najmniej tutaj polecana),
- w parach,
- grupowa.

Metoda

- realistyczna.

Uwzględniając wiek i umiejętności uczniów, rozwiązywanie problemu można przeprowadzić według trójstopniowej skali trudności. Warto zastosować wariant ogólny – wszyscy uczniowie wykonują zadania na tym samym stopniu trudności lub też w ramach klasy zróżnicować poziom zadań.

Faza rozwiązywania zadania

Nauczyciel przedstawia uczniom problem, zadaje pytanie kluczowe. Podkreśla fakt, że za jakiś czas wycieczka odbędzie się naprawdę i będą mogli samodzielnie zweryfikować rozwiązania problemu, które zaproponują.

Za pomocą tablicy interaktywnej, na mapie (np. przy użyciu Google Maps) nauczyciel pokazuje uczniom położenie punktów A i B. (Jeśli mamy do czynienia z położeniem któregoś z punktów w przestrzeni zabytkowej, gdzie zachował się charakterystyczny układ ulic, warto zwrócić uwagę na ten fakt, ewentualnie poszukać podobnych relacji w nowocześniejszych rozwiązaniach urbanizacyjnych).

Położenie punktów warto pokazać w ujęciu satelitarnym lub trójwymiarowym. Rozpoznanie znajomych obiektów ułatwia połączenie pojęcia mapy kartograficznej z rzeczywistym obrazem otoczenia.

Przełączenie między funkcjami mapy topograficznej i satelitarnej warto kilkakrotnie powtórzyć, aby uczniowie mieli czas na przyswojenie sobie punktów odniesienia.

Rys. 2. Położenie punktów na mapie

Stopień I

Uczniowie otrzymują wydruk fragmentu mapy, na której naniesione są punkty A i B.

Ich zadaniem jest zaznaczenie trasy między obydwoma punktami, spełniającej wymagania zawarte w pytaniu kluczowym.

Zaznaczenie trasy powinno być poprzedzone dyskusją w parach lub grupach. W zależności od wymagań pytania szczegółowego (np. poruszanie się pieszo lub autem) pewne warianty powinny być przez uczniów zaakceptowane lub odrzucone.

Na koniec nauczyciel wraca do mapy interaktywnej, pokazuje uczniom trasy sugerowane przez algorytmy Google. Uczniowie dyskutują podobieństwa i różnice między ich rozwiązaniami a tym, co widzą na tablicy, zastanawiają się, co jest korzystniejsze i dlaczego.

Stopień II

Uczniowie otrzymują wydruk fragmentu mapy, na której naniesione są punkty A i B.

Ich zadaniem jest zaznaczenie trasy między obydwoma punktami, spełniającej wymagania zawarte w pytaniu kluczowym.

Liczenie odległości między punktem A i B

Zaznaczoną trasę uczniowie mierzą za pomocą linijki lub dowolnego przedmiotu, który określony zostanie jako przyrząd mierniczy (w zależności od skali mapy może to być długość ołówka, gumki do zmazywania itp., można ustalić przedmioty jednakowe lub różne dla całej grupy). Można zwrócić uwagę na to, że warto podzielić trasę na kilka odcinków, aby ułatwić mierzenie odległości.

Zmierzone odległości uczniowie przekładają na podaną przez nauczyciela skalę: np. „1 cm to 200 m", „długość ołówka, którego użyłeś, to 7 cm, co odpowiada w rzeczywistości 100 m" lub „gumka do zmazywania ma 2 cm, czyli na naszej mapie to 500 m".

W przeliczeniu wartości może pomóc poniższa tabela.

Tabela 2. Liczenie odległości między punktem A i B

Trasę podzieliłem/am na (wpisać ile) odcinków			
Odcinek nr.	Ile ołówków?	Ile to cm?	Ile to m?
1	2		
2	5		
3	4		
	Cała trasa to:		
Wszystkie odcinki razem to:	x (ołówków)	x (cm na mapie)	x (m w rzeczywistości)

Oszacowanie czasu potrzebnego do przebycia drogi z punktu A do B

Jeśli przebycie drogi z punktu A do punktu B wymaga skorzystania z autobusu/tramwaju lub innego środka lokomocji, nauczyciel wręcza uczniom rozkład jazdy danej linii. Na podstawie rozkładu jazdy uczniowie odczytują, ile czasu potrzeba na dostanie się do celu.

Aby wsiąść do pojazdu komunikacji miejskiej, należy dostać się na konkretny przystanek, z reguły pieszo. Poniżej opisana metoda może być wykorzystana również wtedy, gdy uczniowie będą przebywać drogę z punktu A do B w całości na pieszo.

Wykorzystując dane policzone w pierwszym etapie rozwiązywania zadania, uczniowie mogą oszacować czas, jaki jest potrzebny na dotarcie ze szkoły na przystanek.

W tym celu mierzą długość szkolnego korytarza lub boiska. Następnie mierzą czas (za pomocą stopera), jaki potrzebują na przebycie wyznaczonego odcinka w średnim tempie.

Kolejnym krokiem jest odpowiedzenie na pytanie, ile razy zmierzona długość korytarza/ boiska mieści się w trasie wyznaczonej od punktu A do B.

Następnie odpowiadają na przykładowe pytanie: skoro na przebycie 20 m potrzebuję 5 s, to na całą trasę będę potrzebować (tu podaje wyliczoną liczbę) sekund. A to odpowiada (tu podaje wyliczoną liczbę) minutom.

Po zakończeniu obliczeń uczeń z pomocą nauczyciela porównuje wyniki swoje i te podane przez algorytm Google. Uczniowie w klasie dyskutują o ewentualnych rozbieżnościach między własnymi szacunkami i informacjami podawanymi przez komputer oraz możliwymi ich przyczynami.

Stopień III

Nauczyciel stawia uczniom pytanie kluczowe: „Jak dostać się z punktu A i B?”.

Uczniowie podzieleni na małe grupy rozpatrują problem w formie dyskusji (tu można zastosować technikę burzy mózgów, uczniowie mogą stworzyć metaplan itp.) i starają się sformułować pytania szczegółowe, na które będą szukać odpowiedzi.

Obok pytań rozbijających problem na mniejsze zagadnienia (Jak najszybciej?, Jak najbezpieczniej? itd.) uczniowie zastanawiają się, jakimi technikami mają się posłużyć, aby odpowiedzieć na zadane sobie pytania.

Nauczyciel przygotowuje różne materiały (wydruki mapy w różnej skali, listę interesujących obiektów znajdujących się na trasie, rozkłady jazdy, można dołączyć nawet taryfy taksówek, by móc porównać koszty dostania się do celu, różne przyrządy miernicze). Uczniowie wybierają z tych materiałów te, które uważają za przydatne do rozwiązania przedstawionego problemu ze względu na wybraną przez nich strategię.

Na koniec prezentują otrzymane wyniki, porównują je z innymi grupami oraz odpowiedziami algorytmu Google.

W Stopniu III ważne jest zarezerwowanie uczniom odpowiedniej ilości czasu do wykonania zadania. Kompleksowość przedstawionych rozwiązań będzie zależała w dużej mierze od zaangażowania i kreatywności uczniów.

Obrus świąteczny

Problemem do rozwiązania jest tu określenie wielkości tkaniny potrzebnej na wykonanie obrusu na świąteczny stół. Zadanie jest z pozoru bardzo proste, jednak dzięki postawieniu odpowiednich pytań szczegółowych może się okazać dla uczniów na etapie wczesnoszkolnym dość skomplikowane.

Forma zadania pozostaje otwarta, ale można narzucić warunki ograniczające swobodę rozwiązania.

Pytanie kluczowe:

- (ogólne, otwarte) Ile należy kupić tkaniny, aby z niej wykroić obrus na świąteczny stół?,
- (szczegółowe, częściowo zamknięte) Ile należy kupić tkaniny, aby z niej wykroić obrus na stół o rozmiarach odpowiadających stolikowi uczniowskiemu?

Formy pracy:

- w parach,
- grupowa.

Pomoce dydaktyczne:

- papierowe rolki papieru obrusowego o różnej szerokości,
- nożyczki,
- stoliki uczniowskie lub inne o różnych wymiarach,
- centymetr krawiecki,
- karta z informacjami na temat szerokości dostępnych tkanin,
- karta z informacjami na temat szerokości i długości stołów powszechnie dostępnych w sprzedaży.

Metoda:

- problemowa.

Faza rozwiązywania zadania

Uczniowie dzielą się na zespoły. Każdy zespół ma za zadanie ułożyć przynajmniej sześć pytań dotyczących szczegółów problemu przedstawionego w zadaniu oraz przygotować odręczny rysunek obrazujący położenie obrusu na stole. Rysunek uczniowski może być bardzo prosty, ważne, by odwzorowywał jego ideę.

Zespoły przedstawiają ułożone przez siebie pytania i starają się je uporządkować.

Każda z grup podejmuje decyzję odnośnie do:

- wymiarów stołu, który będzie podstawą do wyznaczenia rozmiarów obrusu,
- wyglądu obrusu, tj. odpowiada na pytanie, czy wybrany przez nich obrus ma pokryć tylko blat stołu czy również ma swobodnie spadać po bokach stołu, a jeśli tak, to jak długie mają być boczne fałdy obrusu.

Zespoły przygotowują odpowiednie rysunki w dwóch wymiarach, nanosząc sugerowane przez nich wymiary obrusu, z uwzględnieniem powierzchni blatu i powierzchni fałd obrusu (w wersji skomplikowanej, można wspomnieć o technice krawieckiej pozwalającej na zabezpieczenie kantów obrusu, wówczas uczniowie powinni uwzględnić dodatkowy pas materiału na zakładki).

Każdy zespół z dostępnych materiałów wycina model obrusu i sprawdza poprawność dokonanych przez siebie założeń przy rozwiązywaniu problemu. W przypadku nieudanej próby może jeszcze raz przeprowadzić cały proces od nowa.

Uwaga

Niektóre grupy mogą wybrać niestandardowe rozwiązanie problemu: długość i szerokość wybranego przez nich obrusu może przekroczyć dostępne szerokości rolek. Nie powinni od nowa przechodzić całego procesu wybierania rozwiązania, lecz zastanowić się, jak praktycznie zastosować swoją strategię, np. przez zszycie (tu zlepienie) dwóch szerokości wybranej „tkaniny”.
Na zakończenie poszczególne grupy prezentują swoje wyniki i porównują dokonane wybory.

Zbiory darów jesieni a zbiory w matematyce

Podczas wycieczki do pobliskiego parku dzieci zbierają kasztany, żołędzie, liście o określonej barwie, wielkości itp. Aby uniknąć późniejszych sporów odnośnie tego, co uważane jest za małe lub duże, nauczyciel może poprosić uczniów, by ograniczyli się np. do zbierania liści klonowych i bukowych, wyraźnie mniejszych .

Liście w jesiennych barwach: po lewej liść klonu, po prawej buka

Zebrane obiekty mogą posłużyć do różnorodnych zadań: przeliczania, porównywania, wprowadzania pojęć matematycznych.

Metoda:

- czynnościowa.

Pomoce dydaktyczne:

- znalezione przez uczniów kasztany, żołędzie i liście,
- kolorowe sznurki dł. ok. 1 m.

Forma pracy:

- indywidualna,
- w parach,
- grupowa.

Zadanie A

Po powrocie każde dziecko przelicza zgromadzone przedmioty i sporządza niżej przedstawioną tabelę.

Pierwszy rząd wypełnia indywidualnie, pozostałe zaś podczas pracy z wybranym kolegą lub koleżanką. Zanim dzieci zaczną wypełniać razem tabelę, nauczyciel dyskutuje z nimi metody liczenia i porównywania zasobów.

	kasztany	żołędzie	liście duże	liście małe	liście żółte	liście czerwone	liście brązowe
Ile mam ja?							
Ile ma (imię kolegi/ koleżanki)?							
Ile mamy razem?							
Kto z nas ma więcej? O ile?							

Zadanie B

Nauczyciel prosi uczniów tworzących krąg, żeby na podłodze ułożyli przed sobą wszystkie zebrane obiekty i otoczyli je kawałkiem sznurka, tworząc zamkniętą pętlę.

Następnie wspólnie się im przyglądają. Nauczyciel wprowadza pojęcie zbioru – w tym wypadku uczniowie widzą zbiór darów jesieni. Pojedynczy liść lub kasztan to element zbioru. Nauczyciel rysuje symbolicznie zebrane przedmioty na tablicy i otacza je pętlą.

Następnie prosi, aby dzieci rozdzieliły swoje zbiory na kasztany, żołędzie i liście. Pokazuje uczniom, że mają do czynienia z trzema nowymi zbiorami, każdy wypełniony jednakowymi elementami.

Zabawę można ciągnąć dalej, segregując liście ze względu na kolory lub wielkość.

Zadanie C

Porównywanie wielkości zbiorów.

Dzieci siedząc w kółku, wymyślają sposoby na porównywanie własnych zbiorów bez konieczności ich przeliczania, np. układanie dwóch rzędów kasztanów obok siebie, układanie czwórkami itp.

Nauczyciel prosi dzieci o dobranie się w pary. Dzieci w parach mają za zadanie porównać liczbę zebranych darów jesieni w wybrany przez siebie sposób.

Bibliografia

Bereźnicki F., (2011), *Dydaktyka kształcenia ogólnego*, Kraków: Impuls.

Fisher R., (1999), *Uczymy jak myśleć*, Warszawa: WSiP.

Krygowska Z., (1977), *Zarys dydaktyki matematyki*, Warszawa: WSiP.

Nowak J. (2014), *Od dialogu do wiedzy w matematyce*, [w:] „Studia Scientifica Facultatis Paedagogicae", R: 13, 1.

Rozporządzenie Ministra Edukacji Narodowej z dnia 14 lutego 2017 r. w sprawie podstawy programowej wychowania przedszkolnego oraz podstawy programowej kształcenia ogólnego dla szkoły podstawowej, w tym dla uczniów z niepełnosprawnością intelektualną w stopniu umiarkowanym lub znacznym, kształcenia ogólnego dla branżowej szkoły I stopnia, kształcenia ogólnego dla szkoły specjalnej przysposabiającej do pracy oraz kształcenia ogólnego dla szkoły policealnej, Dz.U. 2017, poz. 356, [online, dostęp dn. 03.11.2017, pdf. 3,9 MB].

Siwek H., (1998), *Czynnościowe nauczanie matematyki*, Warszawa: WSiP.

Turnau S., (1993), *Co to jest realistyczne nauczanie matematyki*, [w:] „Nauczyciele i Matematyka", 5.

Spis ilustracji

Spis tabel

Fundusze Europejskie
Wiedza Edukacja Rozwój

Ośrodek Rozwoju Edukacji

Unia Europejska
Europejski Fundusz Społeczny